

بیرکاری له چهند خوله کییک

روونکردنه وهی ۲۰۰ کلپله وشه به کورتی

بیرکاری له چه ند خوله کیك

روونکردنه وهی ۲۰۰ کلبله وشه به کورتی

پول گلندینینگ

وهرگیتان و ناماده کردنی:
نوسامه تحسین پیربال

پڻاسی ڪتاب

- ناوی ڪتاب، بیرکاری له چند خوله ڪيڪ
- بابته، لیکۆلینهوهی زانستی
- نووسره، پول گلندیڻنگ
- وهرگیڙان و ئاماده کردنی ؛ ئوسامه تحسین پیربال
- دیزاین؛ ناوهندی رینوین
- ژماره ی چاپ؛ یه ڪهم
- تیراژ؛ ۱۰۰۰
- نرخ؛ ۸۰۰۰ دینار

له به رپوه به رایه تی گشتی ڪتابخانه گشتیه ڪان
ژماره سپاردنی (۱۸۴۴) ی سالی ۲۰۱۹ ی پن دراوه.



RENWEN

ناوهندی رینوین



0751 140 8868 - 0750 126 9689



hakem1423@yahoo.com
renwen2009@yahoo.com



سلاطانی - بازار ی ناوباریک - لهومی په ڪهم
بهرامبر ڪاسمؤن - دوکالی ژماره (۶۶)

پیشکش به (دایک) و (باو کم)،

به ته و اوی ئەندامانی خیزانه که مان، که بچو کترینیان

ناوی خاتوو (روناس) ه.

سوپاس و پېژانين:

سوپاس بۇ ھەردوو مامۇستاي زۆر بەرپز (شېركۆ رەشىد قادر) و
(رېبين قادر محمد) كە من لەوانەو ە فېرى نووسين و نووسيني
بېركارى بووم. كە ھەميشە ھاندەرم بوونە، ئەگەرچى تا ھەنووكە
كەسيانم روو بە روو نەبينيووھ.

رېز و سوپاس بۇ ئەو مامۇستا و ھاوپرېي خۆشەويستانەي دەورم
كە ھەميشە پالپشت و يارمەتيدەرم بوونە بۇ ھەر شتېك،
ئەوانيش (م. ئەحمەد كەريم و م. كارزان كەريم) و ھەردوو
مامۇستاي زمانى ئىنگليزى (م. عبدالباسيت حوسين)، وەرگير
و نووسەرى سەرکەتوو (م. ئەبوبەكر ئەحمەد خدر)

سوپاس تايبەتى ھاوپرېي و مامۇستاي زۆر خۆشەويست (م.
ئەحمەد شېخانى) دەكەم كە ئەركى ھەلەچنى ئەو پەرتوكەي
گرتە ئەستۆ، ئەو ھەول و ماندووبونەي زۆر بەرزەنرخينم.

سوپاسى بى سنوورم بۇ تەواوى مامۇستاكانى قوناغى خوئندىم،
ھەموو ئەوانەي رۇژنىك لە رۇژان شتىكان فېرکردوومە و فېربوومە
لييان.

له خۆمم پرسى بىر كارى چييه؟ له وه لامدا وتم : به
بىر كرده وه و كار كردن تيدا، ده دره وشيته وه.

"على مغديد عبدالله"

(على مغديد عبدالله) قوتابيم بوو له پزلى 10ى زانستى. له وه لامى پرسيارىك: بىر كارى
چييه؟ به كىك بوو له قوتابيينه كى وه لامه كى به لامه وه زور جوان بوو. بويه له جياتى
ئه وهى وتهى بىر كاريزانىك دانيم، به پيوستم زانى، كه وته كى ئه به سهر هه موو وته يه ك
بخه! له بلوگى 'بىر كارى بۆ كورد' ده توانن خوینهرى وتهى هه موو قوتابيه كانم بن.

لاپه ره	ناوه پروک
10.....	پیشه کی وهرگنر- ناماده کار.....
13.....	پیشه کی نووسه ر.....
15.....	به شی یه که م.....
15.....	ژماره کان.....
59.....	به شی دووهم.....
59.....	کومه له کان.....
94.....	به شی سنیهم.....
95.....	زنجیره و یه که به دوا یه ک.....
127.....	به شی چواره م.....
127.....	ئه اندازه.....
185.....	به شی پینجه م.....
185.....	جه بر.....
219.....	به شی شه شه م.....
219.....	نه خشه کان و کالکیله س.....
271.....	به شی حوته م.....
271.....	پوخته ی ناراسته بره کان.....

- 299 بهشی ههشتهم
- 299 چهبری پوخت - پرووت
- 325 بهشی نۆیه م
- 325 ژماره ئالۆزه کان - ئاویتە کان
- 351 بهشی ده یه م
- 351 سازان
- 367 بهشی یازدهه م
- 367 ئاهووتە و توپۆلۆجی
- 413 بهشی دووانزهه م
- 413 ژیربیژی و سه لماندن
- 435 بهشی سیزدهه م
- 435 تیۆری ژماره کان
- 462 ژینده ره کان:
- 463 ده رباره ی وه رگنێ و ئاماده کار:

پیشەکی وەرگیر - ئامادەکار

بە ناوی خودای بەخشندە و میهرەبان. درود و سەلام بۆ سەر گیانی
پاکی پیشەوامان - محمد(ﷺ)، زوری دیدە، هیزی پۆح و چەرای پۆزی
دواییمان.

نزیکی گەلاریزانی 2014 بوو ناوم لە بەشی بیرکاری هاتووە. لە
قوناغی یەکەم، زۆر بە دواي پەرتوکیک دەگەرەم بە زمانی کوردی
سەبارەت بە بیرکاری، بۆ ئەوەی تۆزی خۆم بەهرەمەند بکەم، بەلام
بەداخووە، هیچ پەرتوکیک بوونی نەبوو لە نێو پەرتووخانەی کوردی! لەو
کاتە، پرسیاریکم بۆ دروست بوو؛ بۆ پەرتووخانەی کوردی لەم ڕووە
زۆر هەژار و نەدارە؟ لە کاتیکیدا، کە هەموو نەتەوێک واک خەریکە بە
ئەوپەڕی ئاواتی خۆی دەگات، کە لەم سەدەییە، زانست و هونەر،
گەشتۆتە پایەیک، کە بە کارەبا و ئەتۆم ناوەستن!

وەرگیران یان نووسینی پەرتوکیک لەبارەی بیرکارییەو، ئەگەر
چی زۆر سانا و ئاسانیش بێت لە ڕووی ناوەرۆکەو، بەلام کاریکی گران
و تاقەت پڕوکیته، چونکە ئامادەکارییەکی پیشووەختی باشی گەرەکە و،
هیچی لە بەهرەیک کەمتر نییە، کە ئەم بەهرەیهش، تاقیکردنەو و
مەشقی زۆری پێوستە، جیا لەمەش، تا ئێستا لە زمانی کوردیدا، هیچ
کاریکی وەها نەکرەو لەسەر زانستیکی ڕووخسارەکی وەک 'بیرکاری'، نە
وەک وەرگیران، نە وەک نووسین و دانانی پەرتوک بە زمانی کوردی؛ لە

ئاستیکی تریزیک بالا. بۆیه منیک، که هیشتا سالیکی به سهر به ده سته پێتانی
 بپروانامه ی به کالۆریۆسه که م تپه پنه بووه، ئه وهنگاوه سه ختم ناوه و
 ئه سه ی خۆم تاواوه! بۆیه، له کاتی کردنه کوردی زاراوه کان و
 ده سته واژه کان، دوو چاری گرفت ده بینه وه، که هه ندی جار ناچار ده بین
 ده سته واژه و چه مه کان وه ک خۆی دا بنێنه وه. له گه ل ئه مه ش، له
 هه لپێاردنی واتایه کی گونجاو بۆ هه ندی چه مک، شتی نوێ بهر چاو
 ده که ویت.

ئه م په رتوکه، ته نیا په رتوکیکی ئاسایی و وه رگێپرانیکی ئاسایی نییه،
 به لکو تیکه ل به ئه زموونی؛ خویندنه وه و هه ولدانی خۆم بووه له مه پ
 بیرکاری له و چند ساله ی که خویندکار بوومه. بۆیه، وه رگێپرانسی ئه م
 په رتوکه؛ وه رگێپرانیکه به 'ئیلهامه وه'، چونکه ته نیا بیرو که گشتیه که م له
 هه ر بابته تیک وه رگرتووه و دوو باره به دید و شیوازی خۆم، سه ر له نوێ
 دا پشتم بۆی کردوه، جا به شتیک که متر یان زیاتر، وه له گه ل نووسینی
 په راویزه کان له لایه ن خۆمه وه. له گه ل ئه وه ش، دوو بابته م له په رتوکه که
 لابردوه، دوو بابته ی ترم له شوینی داناوه، ئه مه ش به هزکاری ئه وه ی که
 به لامه وه گرنگترن. په رتوکی 'بیرکاری له چند خوله کیک' یه کیک بوو له و
 په رتوکه نه ی که زۆر به وردی خویندمه وه و زۆر سه ره نجی راکیشام،
 په رتوکیکه، که ئه توانم بلیم؛ نزیکه ی 70 له سه دی مهعه ریفه ی بیرکاری
 له خۆگرتووه، وه ک نووسه ریش خۆی باسی ئه کات. له گه ل ئه مه ش،
 په رتوکه که جگه له وه ی ئاشنات ده کات به هه ندی بابته و چه مکی زۆر
 گرنگ، کیشه بیرکاری به شیکار نه کراوه کانیشت پی ده ناسینیت (له به شی

سێزدهههه) ئه و کیشه-پرسیارانیهی که تا هه نووکه شیکار نه کراون، وهک: گریمانه ی ریمان، کیشه ی ژماره خوبه شهکان... هتد.

له کوتایدا: هه موو هه ول و ته قلا و ده سته و ته کانی خۆم، هه موو ئه و بابته و په رتوکانه ی خۆم لێ به هره مه ند کردوه، له م چەند سه د کاغه زه خستوو مه ته پوو؛ سه ره پای ئه مه ش، ئاستی سه رکه و تیشم له م کاره نازانم چەندیکه، هه موو ئه وهی که ده یزانم ئه وه یه: هه ستاوم به هه ولینک-ئهرکیکی خاکی. هیوا خوازم به و هه وله، بتوانم فینکییهک بخرمه نیو سینه ی خویتهر، هه روه ها به و ئاواته ی خویتهری هیژا به تام و چیژوه خهریکی خویندنه وهی ئه م په رتوکه بیت.

هه موو کاتیک ئاگادار کردنه وه م له هه له کان و که م و کوریه کانم له که سانی شاره زا و پسپۆر، هه لده ستین به خزمه تیکی باشتر. خودای که وره ته نیا خۆی سه رخه ر و پالپشته بو سه رکه وتن، هه ر ئه ویش مه به ست و نیازه.

ئوسامه تحسین پیربال

هه ولیر، ته مووزی 2019

<https://mathforkurd.wordpress.com>

osamamathematics@gmail.com

<fb/osama.mathematic>

پیشه کی نووسەر

بیرکاری زهمه نیکى زوره، نزیکی چوار هزار ساله خهت و خالی داوه. نیمه تا ئیستاش، پیدوانی گوشه کان ده کهین به هوی ژماره یه که وه، ئه ویش 'گوشه ی پله یی' که ده کاته 360، واته یه ک خولی (Period) ته وای باز نه یه ک. ئه م رژیمه، له لایه ن بابلیه کانه وه داهیندرا. ئه اندازه ش هه له گه ل شارستانییه تی گریک سه رئاو که وت، به جزریک تیگه یشتیان له مه ر 'ژماره ریژه یه کانی ش' هه بووه. شارستانییه تی عه ره ب، که شه یان به 'جه بردا'، له پال ئه مه ش، بیروکه ی 'سفر' یان ئاودا وه ک ژماره یه ک. بیرکاری، میژوو ه کی ده وله مه ندی هه یه به هزکاریکی تاییه ت، ئه ویش ئه وه یه که سوودی لى وه رده گیریت له زانسته کانی تری وه ک: فیزیاء، کیمیا، ته کنه لوجیا، ئه اندازه یاری، ته لارسازی و بازرگانی... هتد. له پروکاری ئه م په رتوکه ده رده که ویت؛ هه موو بیرکاری ده کریت له 200 پارچه نووسینی کورت و پوخت پیشکه ش بکریت؟! ئه م په رتوکه، هه ولنیکه بۆ ته فسیری هه ندیک له ده سته که وته کۆن و هاوچه رخنه کانی جیهانی بیرکاری و پرونکردنه وه له هه مبه ر ئه وه ده سته که وتانه؛ که بۆچی ئه وه ندی گرنه ک و

جی بایه‌خن. بؤ ئوهی هه‌ندیک بیروکه و چه‌مک به پنی پیوست به ورده‌کاریه‌کانیه‌وه بخرینه روو، ئوه پیوست ده‌کات که رۆبچینه چه‌قی بابه‌ته‌که. له‌گه‌ل ئه‌مه‌ش، هه‌ر بابه‌تیک باسی گرنگی و به‌کاربه‌ریه‌کی کراوه، به‌لام به‌بی ورده‌کاریه‌کی. بیروکه بیرکاریه‌کان هه‌مووی پشت به یه‌کتر ده‌به‌ستن و پیکه‌وه زنجیره‌یه‌ک دروست ده‌کن، بۆ‌یه‌ش بابه‌ته‌کانی ئه‌م په‌رتوکه، به‌جۆریک دانراوه، که خزمایه‌تی و په‌یوه‌ندی له نیوانیاندا هه‌یه. به‌لام ده‌رگا کراوه‌یه بؤ ئوهی به‌ دوا‌ی په‌یوه‌ندی زیاتر بگه‌رین. یه‌کیک له‌ تایه‌ته‌ندییه سه‌رسامکه‌ره‌کانی بیرکاری ئه‌وه‌یه، که ئه‌و پانتایه‌ فراوانه‌ی که وا ده‌رده‌که‌وێت سه‌ره‌خۆ و لیکجیا‌بن، ئه‌وه له راستیدا په‌یوه‌ندی له نیوانیاندا هه‌یه و به‌ قو‌لی پیکه‌سه‌تراونه‌ته‌وه. تیۆری به‌رق (Moonshine theory)، که نمونه‌یه‌کی زیندوی هاوچه‌رخه بؤ ئه‌مه، یان 'هاوکیشه ریزکراوه‌کان' په‌یوه‌ندی به‌ شتگه‌لیکه‌وه هه‌یه.

ئه‌م په‌رتوکه‌ش، بریتیه له‌ بژاردنیکی ورد، له ده‌ستگه‌وتی چوار هه‌زار سه‌اله‌ی مرۆفایه‌تی، به‌لام مومکینه ئه‌مه ته‌نیا ده‌سپیک و سه‌ره‌تایه‌ک بی‌ت. هیواخوازم که ئه‌م په‌رتوکه، پایه‌کی زیاتر ده‌سته‌به‌ر بکات بؤ خویندنه‌وه‌ی زیاتر و بیرکرده‌وه‌یه‌کی قولتر.

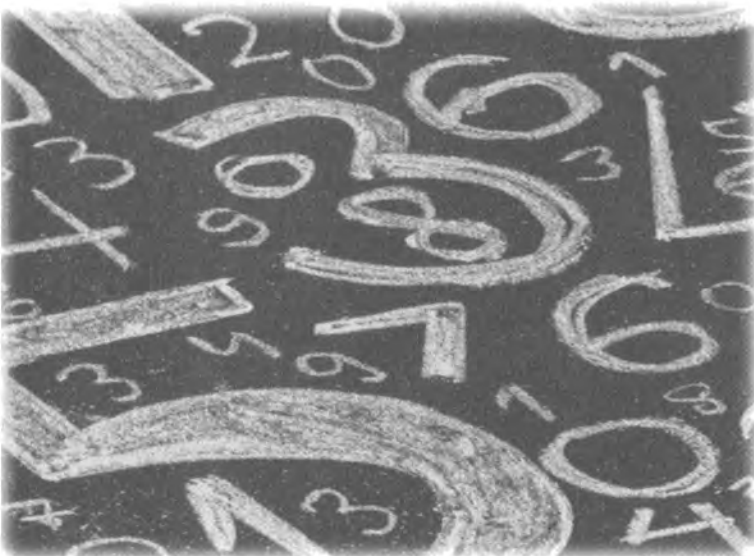
پول گلندینینگ،

که‌لاریزانی 2011

به شی یه که م

ژماره کان

Numbers



پوختهی ژماره‌کان

Introducing Numbers

ژماره‌کان² له بنچینه‌دا، ناوه‌لناویکن بۆ وسفی 'چەندیتی' شتەکانی دەورووبەرمان، ڤه‌نگه‌ بلین: سێ دانه کورسی یان دوو مەڤ...، که تیدا وه‌سفی مەڤ و کورسییه‌کانمان کردوو له ڤووی چەندایه‌تی نه‌ک له ڤووی چۆنییه‌تی (شیوه و پیکهاته)، به‌لام له هه‌موو باریک ناتوانین بۆ وتنی هه‌ندێ شت به‌کاریان بینین. یاخود به‌کارهێنانی هه‌ندیک له ژماره‌کان، له ژبانی ڤۆژانه، بۆ وه‌سفی چەندیتی شتەکان شیواو نین، وه‌ک: بز و نیویک! ئەمه‌یان ناشیت بۆ وه‌سفکردنی چەندیتی هه‌ندیک له و شتانه، چونکه هه‌یچ مانایه‌کی ته‌واو نادات به‌ده‌ستمه‌وه. ئەمه‌ش واتای ئەوه‌یه که ژماره‌کان له به‌کارهێنان دا، ناوه‌ڤۆک و مانای جیاوازی هه‌یه²، تاییه‌ت-لایه‌ق به‌شتیکی دیاریکراو نییه. له شارستانییه‌ته‌ کۆنه‌کان، ژماره‌کان به‌کارهێنراون به‌ چەندین ڤیکای جیاواز، بۆ ئەم مه‌به‌سته‌ش، هه‌یامان بۆ هه‌ندیک له و ژمارانه‌ داناوه، وه‌ک لای میسراییه‌ کۆنه‌کان، به‌ زمانی 'هیلۆگرافی' شلیڤری ناوی (Water lily) هه‌یماه‌ک بووه بۆ ژماره‌ هه‌زار (1000). که هه‌ر به‌م شیوه‌یه‌ش له کرداره‌کان به‌کاریان هه‌ناوه، به‌لام زۆر سه‌خت و چه‌توون بووه. به‌ تێپه‌ر بوونی کات و زیاتر

² ژماره‌کان له ڤراستییدا پیکهاته‌یه‌کی (Form) به‌تالان! بۆ نمونه (1) چی ده‌گه‌یه‌نیت؟ ئەو ژماره‌یه (1) ده‌شیت تۆپیک، سنیوک، یان هه‌رشتیکی تر بیت، بۆیه شتیک نییه له‌م کتییبه به‌ ناوی: 3 یان 7!

به کارهینانی ژماره کان له بواره کانی ژبان، هیناکان بو نواندنی ژماره کان ساده و ناسان بوونه وه، له گه له ئه م ساده کردنه وه به ش، هینشتا مامه کردن له گه له هندی جوری ژماره، زور ئالوز و دژواره. له دواي ئه م سهرده مه کونه ی میسر بیه کان، سیسته میکی مؤدیرنی نوی پهیدا بوو، نه ویش رژی می ژماری دهیی (Base of 10) که ئه م رژی مه سیسته مه له شارستانییه تی عه ره به وه بو جیهان په لی هاویشت، تا دوا جار گشت شارستانییه ته کانی تری گه رته وه. رژی می ژماره ی دهیی، سه رجه م هه ژماره کردنه زور ئالوزه کانی زولال و ناسان کرده وه له به کارهینان و نووسیندا، به جۆریک، ژماره کان له شیوه یه کی سه خت رزگاریان بوو، که ئه مه ش بووه هوی لیکۆلینه وه ی زیاتر له هه مبه ر ژماره کان بو دوزینه وه ی تایه ته مه ندیه کاتیان و پولینکردنیان. هه ر له گه له ئه م پیشکه وته، ده رگای چه ندین پرسیار به رو ماندا کرایه وه، که تا



هه نوو که ش شیکارییان نییه، به واتایه کی تر، تا نیستا یه کلانه کراونه ته وه³.

میسر بیه کان، به و هینایانه گوزارشتیان له ژماره کان ده کرد و به رکاریان ده هینا.

³ له بیرکاریدا، یه کلاکردنه وه ی پرسیک-کیشه یه ک، گرینگره له خودی ئه وه ی که پرسه که به کام ناراسته (سه لماندن یان پوچه لکردنه وه) ده بردریت. گرنگ یه کلاکردنه وه یه، جا به هه ر ناراسته یه ک بیت.

ژماره سروشتییه‌کان

Natural numbers

ژماره سروشتییه‌کان، ئه‌و ژماره ساده و ساکارانه‌ن، که بۆ ژماردنی شته ئاساییه‌کان-به‌چاوه‌کانی ژیانی پوژانه به‌کاریان دیتین $1, 2, 3, \dots$. کارامیی و به‌کاره‌یتانی ئه‌م ژمارانه، به شیوه‌یه‌کی راسته‌وخق په‌یوه‌ندی به بازرگانی، کپین و فرۆشتن، زه‌وی و زار ... هه‌بووه. هه‌رچهنده کرداری ژماردن پئویستر بووه له ژماره‌کان، بۆ ئه‌م مه‌به‌سته‌ش، خودی ژماره‌کان کرداره‌کانی: کۆکردنه‌وه و لیده‌رکردن ده‌گرنه خۆیان به‌شیوه‌یه‌کی سه‌ره‌کی. هه‌ر به زوویی ژماردن زانراوه و کرداره‌کان له ده‌فهری ژماره‌کان بوونه‌ته به‌شیک له زاراوه بیرکاریه‌کان، که به ته‌فسیریکه‌وه چوونه نیو ئه‌م پانتاییه، بوونه‌ته شتانیک، که ده‌توانن گۆرانکاری و کار له په‌کتر بکه‌ن. له 'کۆکردنه‌وه' (Addition) به سانایی حالی ده‌بین که شتیک ده‌خه‌ینه سه‌ر شتیکی تر، به زمانی بیرکاری: $1 + 1 = 2$. (کرداری 'کۆکردنه‌وه' وه‌ک هه‌ویتی کرداری 'جارانکردن') چونکه کرداری کۆکردنه‌وه بوو کرداری جارانکردنی (Multiplication) به‌دوای خویدا هیتا، که ئه‌ویش به‌هۆی وردبوونه‌وه له کۆی دوو شتی په‌کسان، وه‌ک: $3 + 3$ یان $5 + 5$. ده‌پرسین: چهنده شتمان هه‌یه له 5 کۆمه‌له، که هه‌ر کۆمه‌له‌یه‌ک 6 شت له‌خۆده‌گریت؟ دیاره که ده‌کاته ژماره‌ی کۆمه‌له‌کان جارانی (X) شته‌کانی ناو په‌ک کۆمه‌له، که به زمانی بیرکاری: $6 \times 5 = 30$. له دوا‌ی ئه‌م هه‌نگاوه،

کرداری دابهش (Division) بهر ژیری مـرړوف کـهوت، واته کرداری 'جارانکردن' هـوینـی درکردن یـوو به کرداری 'دابهش'، پـوونه که نهـم دوانه (جاران و دابهش) پیچهوانه یه کـرن (Inverse). نهـگر 30 شـت دابهش بکینه سهـر 5 کـومه له یه کسان، هر کـومه له یه کـ چـند شـتی بهـرده که ویت؟ به لام لیـره دوو چاری گرفتیک بوینه وه، نه ویش نه وه یه: چی پرووده دات نهـگر 31 دابهش بکینه سهـر 5 کـومه له؟ یان چی پرووده دات نهـگر 10 له 1 دهـر بکـه یـن⁴ ($1 - 10 = ?$)؟ بـز وه لامی نهـو پرسیارانه، پیوستمان به نهـو دیوی ژماره سروشتیه کان هـیه، که دواتر ناشنایان دهـین.



⁴ پرسیاریکی له م شتیه، بووه هوی نه وه ی که مروشایه تی بیر له ژماره ی 'نایه کی-نه رینی' (Negative numbers) بکاته وه.

یهک

One

سه‌ره‌رای هه‌بوونی ژماره کش-سفریش، به‌لام ژماره یهک به دلی زانستی ژماره داده‌ندریت. ژماره یهک، ناوه‌لناویکه بق تاکه شتیک یان یهک شت. تایبه‌تمندی ئه و ژماره‌یه، له‌وه‌دایه که به کۆکردنه‌وه‌ی له‌گه‌ل خۆی یان به لینه‌کردنی له‌گه‌ل خۆی، هه‌موو ژماره ئه‌رینه‌کان (Positive) و نه‌رینه‌کان (Negative) به‌ره‌م دینیست! که ئه‌مه‌ش بنه‌مای ژماره‌کان بوو، که له‌وانه‌شه سه‌ره‌تاکه‌ی بگه‌رینه‌وه بق چه‌ند سه‌د سالیک به‌ر له‌زاین. گرنگی ئه‌م ژماره‌یه هه‌ر ئه‌وه‌یه نییه که ژماره‌کانی تری لی به‌ره‌م دیت، به‌لکو له‌ کرداری "جاران" به‌و ژماره ده‌وترینیست: دانهی بی لایه‌ن له‌ کرداری جاراندکردن (Multiplication identity). ئه‌م ژماره‌یه دواتر ده‌بیته چه‌قی تیۆرییه‌ک به‌ ناوی: تیۆری گروپ. له‌گه‌ل ئه‌وه‌ش، ژماره یهک تایبه‌تمه‌ندییه‌کی ناوازه‌تری هه‌یه، ئه‌ویش ده‌بیته به‌شداربووی (Factor) هه‌موو ژماره‌یه‌ک، واتا هه‌موو ژماره‌یه‌ک ده‌تواند ریته له‌سه‌ر لیکدانی "خۆی و یه‌ک" بنوسریته، وه‌ک: $(7 = 1 \times 7)$. ژماره یهک له‌دوای سفر، یه‌که‌م ژماره‌ی تاکه (Odd). له‌ هه‌ندی بواری زانستی⁵، ئه‌م ژماره‌یه

⁵ له تیۆری نه‌گه‌ره‌کان، نه‌گه‌ری پرودانسی هه‌ر پروداویک ده‌که‌ویته نێوان 0 و 1. بق نمونه: نه‌گه‌ر مۆره‌به‌رده زاریک هه‌لده‌ین، ئه‌وه نه‌گه‌ری ئه‌و ژماره‌ی بۆمان ده‌رده‌چیت ده‌کاته: $1/6$ ، که دیاریشه ئه‌و ژماره‌یه له‌ نیوان سفر و یه‌ک دایه.

گرنگیه کی زور ههیه، بهجۆریک، هه ندیک تیۆری و ئه نجامی به ده ست
هاتوو له و تیۆریانه، له نیوان 'سفر و یهک' دایه، که ئه نجامه کهش چهنده
له یهک نزیکتر بیت، ئه وهنده باشتر و مایه ی دلخوشیه.

له گه ل ئه مهش، ژماره یهک ده بیته خهت و خالی ژماره خۆبه شهکان
(Prime numbers) که دواتر باسییان ده کهین.



سفر (کش)

Zero

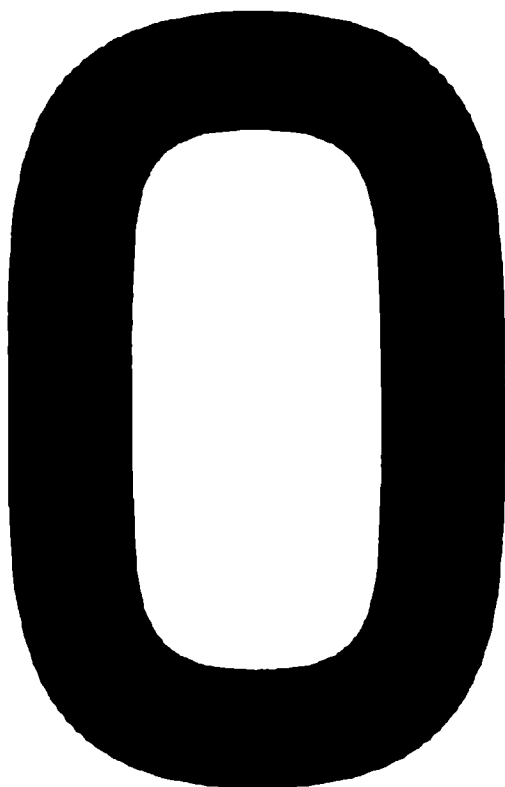
سفر، بیرۆکه به کی ئالۆز و تهلیسمایی. به درێژایی میژوو، ئەم ژمارهیه جیگای سه رنج و مشت و مری زۆریک له بیرمه ندان-فه یله سوفان و بیرکاریزانان بووه، ته نانه ت ناولیتانیشی، کاریکی هر وا ئاسان نه بووه. سفر: وتترین شت بوو به به راورد له گه له ژماره کانی تر. میژووی ناولیتانی سفر و به کارهینانی، له دواى دۆزینه وه و به کارهینانی ژماره سروشتیه کانه وه بووه. ئەگه ر شارستانیه تی بابلیه کان به نمونه وه گرین، ئەوان هیچ شتیکیان نه بوو تا کو گوزارشت له 'سفر' بکن، بۆیه که له ئیوان ژماره کان کاریان بگه یشتبا به سفر، ئەو شوینه یان به بۆشایی (Empty) به جن ده هینشت، به لام له کوتایی ژماره دا نا.

کۆنترین پیناسه بۆ سفر، ده گه رپته وه بۆ بیرکاریزان هیندییه کان له ده ور و به ری سه ده ی نۆیه م، ته نانه ت نوکته به کیش له و باره یه وه دراوه ته پالیان که؛ هیندییه کان له قرچۆکیان⁶ سفریان دا هینا، تا بلین: هیچ پاره مان پی نییه و موفلیسین. به لام له پانتایی فه لسه فه وه، هه میشه ئەم ژماره یه جیگای سه رنج بووه، چونکه وه ک ژماره کانی تر په فتار ناکات! بۆ نمونه: دابه شکردنی ژماره یه ک به سه ر سفر، شتیکی بی واتا و ناقولایه⁷ $(\frac{3}{0})^7$

⁶ قرچۆک: په زیل، چا و چنۆک، به رچا و ته نگ.

⁷ نا په سه نده، ریگه پینه دراوه.

واتا پیناسه نه کراوه (Undefined)! یان لیکدانی هر ژماره یهک له سفر،
نه نجامه که ی هر ده کاته وه سفر! به هه مان شیوه، سفر تاییه تمه ندییه کی
جیاوازتری هه یه، نه ویش کوی هر ژماره یه کی بکه یین، ده کاته وه ژماره که
خوی! که نه م تاییه تمه ندییه ش له بیرکاری پیی دهوتری: دانسه ی بی
لایهن له کرداری کوکردنه وه (Addition identity).



ناکوتا

Infinity

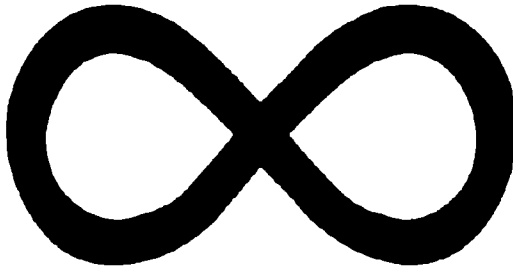
ناکوتا⁸، به دهربرپینی بیرکارییانه به (∞) هیما ده کړیت. ناکوتا واته شتیک که کوتایی نایهت و کوتاییه کی نییه، یان هیچ سنوریکی نییه. کارکردن له گهل بیرکاری، به بی پرووبه پرووبونه وهی ناکوتا، نه ستمه و تنانته قوتاییانی قونای نامادهیی ناشنایهتی له گهل هم شته سیره په یدا ده کن. زوریک له به لکه (Argument) بیرکاریه کان و تکنیکه کان، تیوه ده گلین له هلبژاردنی شتیک له خسته یه کی (List) ناکوتا، وه یان چی پروو ددهات نه گهر هندی دؤخ-پروسه له ناکوتا نریک بکریته وه؟ بده دوام بوون به ره و سنوری بی سنوری؟! کومه لهی (Set) ناکوتای ژماره کان (واته بی سنور له ژماره مان هیه) یان کومه له یه کی ناکوتا له شت، پیمان ده وتریت: کومه له ناکوتا کان (Infinite sets)، که نه مانهش به شیکن له کلیلی بیرکاری.

تفسیری بیرکاریانه بو نه و جوړه کومه لانه، ده مانبات به ره و نهجامیکی زور جوان، نه ویش: پتر له یه ک جوړی ناکوتامان هیه، نه مهش واتا زور جوړی ناکوتا هن، که ناکوتا هیه له ناکوتایه کی

⁸ نمونه وهک: ژماردرنی ژماره سروشتییه کان: $1, 2, 3, \dots$ هتا بروی، ژماره هر هیه و کوتایی نایهت، هر بهم لوژیکه، شتیکمان نییه به ناوی 'گوره ترین ژماره' چونکه گریمان نه گهر n گوره ترین ژماره بیته، نه وه $n+1$ له و گوره تره. ((له سهرتای پولی شمشی نامادهیی، وام ده زانی 'ناکوتا' ژماره یه، به لام ماموستای بیرکاریم (م. هوشمه ند زیاده) پیی وتین: له هیچ هنگاویکی چه بری ناتوانین هیماي 'ناکوتا' دابنینه وه، چونکه ژماره نییه))

تر جیاوازه. له راستیدا بی شمار جوری ناکوتا ههیه، که وره و که ورتره. ئیمهش له ههندیکیان حالی ده بین به هوی زارشتی⁹ بیرکاریه وه، که دواتر ئه و کومه له ناکوتانه پۆلین ده که یه به سهه دوو به ره دهسته. بیرۆکه ی 'ناکوتا' هه تایهت نییه به بیرکاری، بویه به شیوه یه کی گشتی سی جور له ناکوتا ههیه، ئه وانیش: ناکوتا له بیرکاری، ناکوتا له فیزیا، ناکوتا له هزری-دیدى ئایینی، به لام ئه وه ی ئیمه زور گرنگی پی ده دین، ناکوتایه له بیرکاری و فیزیا، که ئه مانهش به راستی زور چه توونن.¹⁰

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \infty$$



⁹ زارشت: لوجیک.

¹⁰ بلوگی 'بیرکاری بۆ کورد'

پژیمی ژماره‌کان

Number system

پژیمی (سیستم) ژماره‌کان، ږیگه‌یه‌که بۆ نووسینی ژماره‌کان، ده‌برینیان و تیگه‌یشتن لټیان. لیکولینه‌وه له‌وهی که خالی هاربه‌شی نیوان، ئەم ژمارانه چییه؟ له ژیانې پوژانه‌ماندا، له‌گه‌ل پژیمی ژماره‌کان: پژیمی ده‌یی¹¹ ناشنایه‌تیمان هه‌یه. پژیمی ده‌یی، ئەو پژیمه‌یه که بۆته په‌یره‌وی مرۆقه‌کان بۆ کاروباری پوژنه له زۆر بواردا. زۆر جار، ژماره‌ی له‌م شیوه‌ ده‌نووسین و به‌کار دینین: 434.15 که په‌نووسه‌کانی ئەم ژماره‌یه هه‌ر یه‌که و واتایه‌کی هه‌یه، به‌م شیوه‌یه: له راست بۆ چه‌پ (ژماره ته‌واوه‌که 434): یه‌کان، ده‌یان، سه‌دان، ...، له دوا‌ی فاریزه (که‌رته‌که 15): له ده‌یان، له سه‌دان، له هه‌زاران، ... به‌م شیوه‌ به‌هه‌ریه‌کتیک له‌مانه ده‌وتریت: کۆلکه (Coefficient). که‌ر به وردی سه‌یری ئەم نمونه‌ی سه‌روهه بکه‌ین:

$$434.15 = (4 \times 100) + (3 \times 10) + (4 \times 1) + \left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{5}{100}\right)$$

ئهمه‌ش بریتیه له ساده‌ترین نووسینی ژماره‌کان به‌هۆی پژیمی ده‌یی (Base of 10) که (10) به‌توانی ژماره‌ سروشتیه‌کان، که ئهمه‌ش بۆ هه‌موو ژماره‌ راستیه‌کانی تر به‌هه‌مان شیوه‌ به‌کار دیت. به‌لام له‌گه‌ل

¹¹ ئەو پژیمه‌یه که 10 جوړ ژماره (له 0 تا 9) به‌کار ده‌یښت بۆ نووسین و ده‌برینی هه‌موو ژماره‌کانی تر.

نهوهش، هیچ شتیکى وا تایبته نییه بلین که تهنیا به پښمى دهیى دهتوانین ژمارهکان بنوسین، هر هه مان ژماره، دهتواندریت به پښمى-سیستمى: 'یهک و سفر' و اتا 'دوانى' (Binary) بنوسریت. به سیستمه نه ژمارهیه: 8.3125 دهگوریت بؤ 1000.0101 به پنى سیستمى دوانى، که ژمارهکان له چهپوه بؤ راست و اتای نه مهیه: دوانى، چوارى، هه شتى... و اته 2 به توانى یه که کان (Units). له ژمارهیه که نووسیمان 8.3125 له راسته وه: نیوه، چاریک، هه شت یهک... پښمى دوانى، له نیستادا پولى سه ره کی دهگوریت له کارپیکردنى کومپیوتەر و بهرنامه سازى، تهنانهت نه و نووسینه ی بن دهستت؛ که به کومپیوتەر نووسراوه ته وه، هه مووی پشتى به پښمى دوانى به ستووه. هؤکاری نه وه ی نه و پښمه بؤته خهت و خالى کومپیوتەر، نه وه یه که کارکردن له گه ل نه و پښمه زور خیرایه به به راورد به پښمى دهیى، چونکه له پښمه تهنیا 0 و 1 به کاردیت.

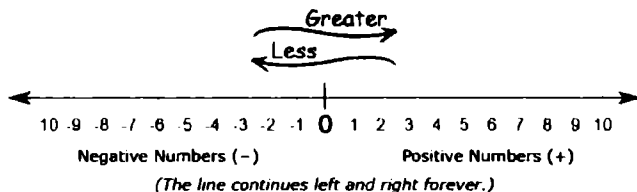
Decimal	Binary
0	0
1	1
2	10
3	11
<hr/>	
10	1010
11	1011
12	1100

هیلی ژماره کان

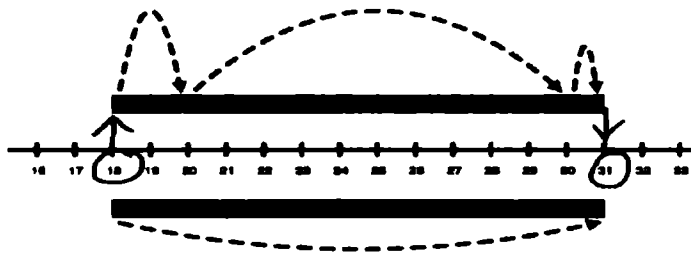
Number line

هیلی ژماره کان، بابهت و زارشتیکی گرنه له بیرکاری بو تیگه یشتن و بیرکردنه وه له واتای کرداره بیرکاریه کان، یان بو پوونکردنه وه و پیشاندانی شیکاری زوریک له هاوکیشه کان و لاسهنگه کان له سه ره ته هیله. هیله ژماره کان، هیلکی راسته که تیدا بهش بهش کراوه به هیلکی وهک چیلکه ی بچوک، که تیدا هه موو ژماره ته واوه ئه رینی (+) و نه ریه کان (-) ده گرته خوی به شیوه یه کی بنچینه یی. ئەم هیله، به دوو ناراسته به برده وامی به باری ناسویی دریزه بیته وه، ئه وانیش به ناراسته ی راست و چه پ، کرداری کۆکردنه وه ی له سه ره هیلکی ژماره کان پوونتر و ناسانتره، وهک: $4+3$ له کرداری کۆکردنه وه، جولانه وه ی ئیمه له هیلکی ژماره کان به ره و لای راسته، له و نمونه ی سه ره وه، له سه ره هیلکی ژماره کان له ژماره 4 دا، 3 ههنگاو پاز ده دهین بو لای راست، هه ههنگاویکیش ده بیت یه که بپریت نهک زیاتر. به هه مان شیوه بو کرداری لئ ده رکردن، جولمان به ره و لای چه پ ده بیت، بو نمونه: 3-5، له ژماره 5 سی ههنگاو پاز ده دهین بو لای چه پ، که هه ههنگاویک ده بیت یه که بپریت نهک زیاتر. پهنگه پرسیاریکت لا دروست بیت، ئه ویش: ئه ی نه مه: 10-1 چۆنه له سه ره هیلکی ژماره کان؟ نه مه شیان پووشنه، له ژماره یه که وه 10 ههنگاو پازیده بو لای چه پ، که نه مه ش ده کاته 9. مومکینه پرسیاریکی ترت لا دروست بیت، ئەم هیله بهس ئەم

جۆره ژمارانه‌ی له‌سه‌ره؟ وه‌لامه‌که نه‌خێر، به‌لکو که‌رته‌کانیش - پێژه‌یی (Rational numbers) له‌خۆ ده‌گریت. بۆ نمونه له نێوان 0 و 1 دا نیومان $0.5 = \frac{1}{2}$ هه‌یه، یان $\frac{1}{3}$ هه‌یه، ئه‌و ژمارانه‌ش پێان ده‌وترین ژماره پێژه‌یه‌یه‌کان (Rational numbers). به‌لام ئه‌وه‌ش له بیرمه‌که که ژماره پێژه‌یه‌کانی نێوان سفر و یه‌ک ئه‌وه‌نده زۆرن، که له توانادانییه له‌سه‌ر ئه‌م هێله بنوسریت و ناشکریت. به‌شیکێ تری ژماره‌کانی سه‌ر ئه‌و هێله، پێیان ده‌وتریت: ژماره نارپێژه‌یه‌یه‌کان (Irrational numbers). ژماره پێژه‌یه‌یه‌کان و ژماره نارپێژه‌یه‌یه‌کان، به‌یه‌که‌وه کۆمه‌له‌یه‌کی زۆر گه‌وره دروست ده‌که‌ن، که پێان ده‌وتریت ژماره پاس‌تییه‌یه‌کان (Real numbers). واتا، کۆمه‌له‌ی ژماره سروشتیه‌یه‌کان، ته‌واوه‌کان، پێژه‌یه‌یه‌کان و نارپێژه‌یه‌یه‌کان هه‌موویان به‌یه‌که‌وه کۆمه‌له‌ی ژماره پاس‌تییه‌یه‌کان دروست ده‌که‌ن.



$$18 + 13 = 31$$



خیزانی ژماره‌کان

Family of numbers

ژماره‌کان ده‌تواندريت دابه‌شېکړينه سهر چند توخم و ره‌گه‌زیک، که جیايان بکه‌ینه‌وه به پښی نه‌و خاسییه‌ت و تاییه‌تمه‌ندیانه‌ی هه‌یه‌تی. چندین ریگا و شیواز هن بؤ جیا‌کردنه‌وه‌ی نه‌و ژمارانه، که له شتیک یان سیفه‌تیک لیکچونیان هه‌یه و ، بیانخه‌ینه ناو خیزانیک، پاشان ناویکی تاییه‌تیان پی بده‌ین. وهک چوژن ناکوژا ژماره‌مان هه‌یه، به‌م شیوه‌یه‌ش ناکوژا ریگای هه‌مه‌چوژر هه‌یه بؤ جیا‌وازی کردن له نیوان جوړی ژماره‌کان و به‌ش به‌ش کردنیان-جیا‌کردنه‌وه‌یان، وهک: ژماره سروشتییه‌کان، ژماره ته‌واوه‌کان، ژماره ریژه‌ییه‌کان، ژماره نارپژه‌ییه‌کان، ژماره ناویته‌کان، ژماره راستییه‌کان، یان هه‌موو نه‌و شتانه‌ی که نئیمه له‌و جیهانه ده‌توانین بیانژمیرین، وهک: جوړی دره‌خته‌کان، جوړی پاسکیله‌کان... هتد، که هه‌موو نه‌مانه ده‌گړیت هر یه‌که‌یان وهک خیزانیک دابنیز. وتمان کؤمه‌له‌یه‌ک هه‌یه که‌وره‌یه، که پښی ده‌وتری ژماره راستییه‌کان، له‌ناو نه‌م کؤمه‌له‌یه، خیزانیک‌ی بچوکر هه‌یه پښان ده‌وتری ژماره نارپژه‌ییه‌کان، خیزانی ژماره ریژه‌ییه‌کان و چندین خیزانی تر له خو ده‌گړیت، وهک: خیزانی ژماره جه‌برییه‌کان و ژماره ناچه‌برییه‌کان- تریسندیتته‌له‌کان¹².

¹² ژماره‌ی تریسندیتته‌ل (Transcendental number) بریتییه له‌و ژماره‌ی که جه‌بری نییه، واته نایبته شیکاری پاده‌داریک که کولکه‌کائی ژماره‌ی ریژه‌ین. ژماره‌ی جه‌بریش نه‌و

کاتیک ده‌لین ژماره‌یه‌ک سەر به فلانه خیزانه، ئەمه واته له ڕیگه‌ی شوناسی ئەو خیزانه؛ له تاییه‌تمه‌ندییه هه‌مه‌چه‌ش‌نه‌کانی ئەو ژماره‌یه ده‌گه‌ین و ئەوه‌مان بۆ ڕوون ده‌بیته‌وه که ئیمه چ ڕه‌سه‌یارگه‌لینک ده‌توانین ده‌رباره‌ی ئەم ژماره‌یه ڕه‌سه‌ین. زۆر جار، دروست بوونی ئەم خیزانانه، له نه‌خشه‌یه‌که‌وه (Function) سه‌ره‌له‌ده‌ات، که نه‌خشه‌که وه‌سفی چۆنییه‌تی دروستبوونی "یه‌که‌به‌دوای یه‌کی" ژماره‌کان ده‌کات، واته له ڕیگه‌ی نه‌خشه‌یه‌که‌وه ده‌توانیت خیزانیک له ژماره دروست بکه‌ین که هه‌ر ژماره‌یه‌کی‌دانه خیزانه‌که له‌و نه‌خشه به‌ده‌سته‌تێنراوه. یانیش، بۆ هه‌رخیزانیک، ڕه‌سه‌یه‌ک (Rule) هه‌یه که وه‌سفی دانه‌کانی ئەم خیزانه‌ی پێکات و بیاناسینه‌وه.

ئیمه به باشی ناشنای ژماره جووته‌کانین (Even numbers)، به‌لام ئەو ژمارانه چین؟ بۆیه به شیوه‌یه‌کی بیرکاریانه، ده‌توانین به‌و شیوه وه‌سفی هه‌موو ژماره جووته‌کان بکه‌ین، ئەویش: ژماره جووته‌کان، ئەو ژماره سه‌روشتیانه‌ن که له‌سه‌ر ئەو شیوه: $2 \times n$ ده‌نوسریت، که n یش خۆی ژماره‌یه‌کی سه‌روشتیه. ئەگه‌ر نرخ‌ی n یه‌ک بێت، ده‌کات: $2 \times 1 = 2$ ، ئەگه‌ر نرخ‌ی n دوو بێت، ئەوه $2 \times 2 = 4$ ، ئەگه‌ر نرخ‌ی n بکاته 3، ئەوا: $2 \times 3 = 6$ ، ...، ئەمه‌ش دیاره که هه‌موویان ژماره‌ی جووتن. بۆیه توانیمان له ڕیگه‌ی ئەم یاسایه‌وه، وه‌سفی چۆنییه‌تی دۆزینه‌وه‌ی ژماره جووته‌کان بکه‌ین، واتا سه‌ره‌جه‌م ژماره

ژماره‌یه که ده‌بیته شیکار بۆ راده‌داریک که کولکه‌کانی ژماره‌ی ڕه‌زه‌ین، وه‌ک: $\sqrt{2}$ ، به‌لام π ژماره‌یه‌کی ترینسندینته‌له، چونکه نابیته شیکار بۆ ئەو جۆره راده‌داره‌ی باسما‌ن کرد.

جووته‌کانیش پیره‌وی ئەم یاسایه ده‌کن! که هیچ ژماره‌یه‌کی جووت نادۆزیته‌وه له‌م یاسایه لاب‌دات و قسه‌ی بشکینیت.

هر هه‌رمان پرسیار بۆ ژماره‌ تاکه‌کان (Odd numbers) ئەو ژمارانه‌ چین و هیچ یاسایه‌ک هه‌یه بۆیان هاوشیوه‌ی ژماره‌ جووته‌کان؟ یاساکه‌ش بۆ ژماره‌ تاکه‌کان بریتیه‌ له: $2n + 1$ ، دیاره‌ به‌م یاسایه‌ سه‌رجه‌م ژماره‌ تاکه‌کانی لێ به‌ره‌م دیت، که هه‌موو ژماره‌ تاکه‌کانیش ده‌بیت پیره‌وی ئەم یاسایه‌ بکه‌ن به‌ رووح و به‌ گیان! ئەگه‌ر نرخ‌ی n یه‌ک بیت ئەوا: $2(1) + 1 = 3$ ، ئەگه‌ر نرخ‌ی n دوو بیت، ئەوا: $2(2) + 1 = 5$ ، به‌م شیوه‌، هه‌موو ژماره‌ تاکه‌کان به‌ره‌م دین.

له‌ بیرکاریدا خیزانیتیک هه‌یه، که که‌م که‌س هه‌یه‌ له‌ ناوی ئەم خیزانه‌ی خه‌به‌ردار نه‌بیت، ئەویش خیزانسی ژماره‌کانی فیبۆناچی¹³ (Fibonacci) که ئەمانه‌ن: $\{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$. ئەم خیزانه، له‌ خیزانسی ژماره‌ سروشتیه‌کانه‌وه‌ دروست ده‌بیت، یاساکه‌شی به‌م شیوه‌یه: هه‌ر ژماره‌ک له‌و خیزانه، له‌ سه‌رجه‌می دوو ژماره‌ی پیش‌خۆی دروست ده‌بیت. سه‌ره‌تا له‌ 1 ده‌ست پنده‌که‌ین، ئیستا: $2 = 1 + 1$ ، دواتر ئەو ئەنجامه‌ی به‌ده‌ستمان هه‌تاوه‌ له‌گه‌ل ژماره‌ ئەنجامی پیش‌خۆی کۆی بکه‌ینه‌وه، $3 = 2 + 1$ ، لێره‌ 3 ده‌ستگیر بوو، 3 له‌گه‌ل 2 کۆبکه‌ینه‌وه، ده‌کاته: 5، پاشان 5 له‌گه‌ل 3 کۆبکه‌ینه‌وه، ده‌کاته: 8، وه‌ 8

¹³ لیوناردو پیناسو بیگولۆ ناسراو به‌ لیوناردو فیبۆناچی. فیبۆناچی زانی بیرکاری بوو له‌ چه‌رخه‌کانی ناوه‌راست، له‌ سالی 1202 واته‌ له‌ سه‌ده‌ی سیزده‌هه‌م. په‌رتووکێکی به‌نیوی (Liber Abbaci) هه‌یه، که په‌رتووکێ ژمیریارییه. له‌گه‌ل ئەمه‌ش، کاری بازرگانی ده‌کرد.

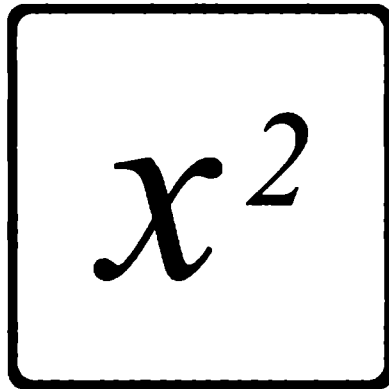
له گه 5 کوزبکه یه وه، ده کاته: 13، ئا بهم شتیوه ئه و خیزانه دروست ده بیت. ئه م ژماره یه جگه له لایه نی په تیه که ی (Abstract)، له زینده زانی گرنکی هه یه و له هه ندی دیارده ی زاو زینی ئاژه له کاند ده بیندریت، هه وه ها په یوه ندی به ریژه ی زیرین (Golden ratio) و سیگوشه ی پاسکال (Pascal triangle) هه یه.

به رچا ورونی زیاتر له مه ر ژماره کانی فیوناچی:

$$1 \quad 1+1=2 \quad 1+2=3 \quad 2+3=5 \quad 3+5=8 \quad 5+8=13$$

خیزانیکه تر که ده توانین بیهینینه بوون، ئه ویش: هه ر ژماره یه کی سروشتی لیکدانی خزی بکه ی: یه ک جارانی یه ک، دوو جارانی دوو، سی جارانی سی، ... ئه ویش ئه و شتیوه ی ده بیت: ... 14, 9, 16، که دیاره یاسه که ی ئه میش بریتیه له: n^2 ، یان دوو جای n .

$$1 \times 1 = 1, \quad 2 \times 2 = 4, \quad 3 \times 3 = 9, \quad 4 \times 4 = 16, \quad 5 \times 5 = 25 \dots$$



پنگه‌وه به‌ستانی ژماره‌کان

Combining numbers

چەندین پنگاو شتیواز هەن بۆ ئەوێ دوو ژماره یان زیاتر بە یەكەوه بیهستینه‌وه بەهۆی کرداره‌كانه‌وه، كه تیدا ده‌تواند ریت دانەدم بكرین بەهۆی بەكارهێنانی کرداره‌كانی: كۆکردنه‌وه، كه‌م كردنه‌وه، جارێ و دابه‌ش (ژێره سفر نه‌بیت)، ئەمەش بە ئاتاجی دروستکردنی ژماره‌یه‌کی تر. له‌ راستیدا، ئەگەر سه‌رنج بده‌ینه: $a - b$ ، به‌ شیوه‌ی: $a + (-b)$ ده‌نووسریت، یان $\frac{a}{b}$ ، به‌ شیوه‌ی: $a \times \frac{1}{b}$ ده‌نووسریت، كه‌واته له‌ ناو هه‌ناوی هەر یه‌كێك له‌ دابه‌ش و كۆکردنه‌وه، ئەوی تر بوونی هه‌یه. کرداره‌كانی جارێکردن و كۆکردنه‌وه، تایبه‌تمه‌ندییه‌کیان هه‌یه كه پێی ده‌وترین تایبه‌تمه‌ندی ئالوگوری (Commutative)، كه له‌م تایبه‌تمه‌ندییه، ریزبه‌ندی ژماره‌كان له‌ كاتی هه‌ژمارکردنی کرداره‌كانی كۆکردنه‌وه و جارێکردن، جیاوازییه‌ك دروست ناكات¹⁴، به‌لام بۆ کرداره‌كانی تر، یان بوونی زیاتر له‌ کرداریك له‌ ناو برێکی جه‌بری یان برێکی ناچه‌بری، جیاوازی دروست ده‌كات و ئەنجامه‌كه گۆرانكاری به‌سه‌ردا دیت! بۆیه، مه‌به‌ست له‌م تایبه‌تمه‌ندییه ئەوه‌یه: بـه‌سه‌ر كه به‌س جارێ یان به‌س كۆکردنه‌وه له‌خۆگرته‌یت، وه‌ك: $1 + 2 = 2 + 1$ ، كه هه‌چ جیاوازییه‌کی نییه. ئەمه بۆ دوو ژماره ئاسایی، كاره‌كه ساده بوو، به‌لام ئەگەر بیه‌ت و زیاتر له‌ دوو ژماره‌مان هه‌بیه‌ت یان له‌گه‌ل چەند

¹⁴ لێكانی ریزكراوه‌كان (Matrices)، سیه‌تی ئالوگوری نییه: $A \times B \neq B \times A$.

کرداریک، ئهوه پښوست دهکات که وانه () به کار بهیندريت، ئهگه سى راده مان ههبيت، ئهوه دوو لهو رادانه، پښوسته بخريته ناو که وانه يهک. وتمان ئهگه سى راده بيت، ئهوه دوو ريگات ههيه (به بى شوين گورينى رادهکان) بۆ ئهوهى دووان لهو رادانه بخيته ناو که وانه، بهم شپوهيه:

$(a + b) + c$ يان $a + (b + c)$. ئه م سـيـفـهـتـهـش پښى دهوترينت تاييه تمه ندى "يه کتر بهستن" (Associativity). سيفه تي "به شينه وه به سه ر کردارى کو کردنه وه" (Distribution)، که تيدا ئه و راده ي له پيش که وانه که ههيه، ده بيت خوى ليکدانى هه موو راده کانى ناو که وانه که بکات. به نمونه يه کى ژيانى روژانه: ماموستا که ديته پول، بۆ هه موو قوتاييه کان وانه ده ليته وه، نهک ته نيا بۆ يهک يان دووان. له م وينه ي خواره وه تاييه تمه ندى يه کان له گه ل ژماره کان و کرداره کان خراوه ته روو بۆ هه ر يه کيان.

Commutativity

$$x + y = y + x$$

Associativity

$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$$

Distributivity

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

$$(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x)$$

ژماره ریښه‌بیه‌کان

Rational numbers

ژماره ریښه‌بیه‌کان، له نه‌نجامی دابه‌شکردنې ژماره‌بیه‌کی ته‌واو (Integer) به‌سره ژماره‌بیه‌کی ته‌واو (سفر نه‌بیت) دروست ده‌بیت. واته سرجه‌م ژماره ریښه‌بیه‌کان، ده‌تواندریت به‌شپوهی که‌رت بنووسریت. نو ژماره‌ی که دابه‌شده‌کریت، پی‌نده‌وتریت: سره‌به‌شکراو (Denominator)، له‌کاتیکدا نو ژماره‌ی پی‌یی دابه‌ش ده‌کریت، پی‌ی ده‌وتریت: ژیره‌به‌شدراو (Numenator).

کاتیک ژماره‌بیه‌کی ریښه‌بیه‌کی به‌شپوهی ده‌یی دنووسریت، دوو شیوازی هه‌یه: یان کوتایی دیت و ته‌واو ده‌بیت، یاخود ته‌واو نابیت، وه‌ک: $0.3333 \dots = \frac{1}{3}$ کوتایی نایه‌ت و دیاریشه‌یه‌کسانن، نه‌مه‌ش دوو لقی لی ده‌بیته‌وه. نه‌گر سره‌رنج بده‌یته نو ژماره ریښه‌بیه‌ی سره‌وه که به‌شپوهی ده‌یی نووسراوه، دووباره ده‌بیته‌وه تا ناکوتا به‌شپوهی‌کی جیگر یان جوان، نه‌مه‌ش واته‌گر هاتوو ژماره‌بیه‌کی ده‌یی به‌شپوهی‌کی دووباره نووسراوه، نه‌وه ریښه‌بیه‌یه، به‌لام نه‌گر به‌نا-دووباره‌یی به‌رده‌وام بوو، نه‌وه ژماره‌بیه‌کی نارپیښه‌یه، چونکه له ژماره نارپیښه‌یه‌کان، هیچ شیوازیکی دووباره‌یی-پیک بوونی نیی. هه‌لبه‌ته چونکه ژماره ته‌واوه‌کان ناکوتان، که‌واته ناکوتا له ژماره ریښه‌بیه‌مان هه‌نه. به‌لام نه‌مه به‌واتای نه‌وه نایه‌ت که ژماره ریښه‌بیه‌کان ژماره‌یان زیاتره له ژماره ته‌واوه‌کان، به‌لکو

سهلمیتراره که هیندهی بهکتر دانهیان تیدایه (همان کاردیناله تیان ههیه).¹⁵

پهیدابوونی ئەو ژمارانه، بههوی سهرنجدان له هاوکیشه کانه وه بوو، ئەویش: ئایا شیکاری هاوکیشه یهکی له م شیویه: $2x - 3 = 0$ چیه؟ ئەو ژمارهیه دهبیت چند (چون) بیت بو ئەوهی پاسه دانی ئەم جوړه هاوکیشه یه بکات؟ ئەمهش دیاره که ژماره یه که، له توخمی ژماره ته واوه کان و سروشتیه کان نییه.

$$\frac{a}{b}$$

¹⁵ کاردینالیتی، واته ژماره ی دانه کانی ناو کومه له یهک یان خیزانیک.

دووجاگان، په کی دووجا و هیژمکان-توان

Squares, square roots, and powers

دووجای هر ژماره په x ، ده کاته ژماره که لیکدانی خوی، که به بیرکاری یانه بهو شیوه دنوسریت: $x^2 = x \times x$. زارشتی دووجا له راستیدا ده که پښتوه بهو ژمارکردنی پووبه ری (Area) چوارلای په کسان، که تیدا بهو ژمارکردنی پووبه ره که ی؛ دريژی لایه، جارانی خوی ده که یین و پووبه ره که مان ده ست ده که ویت. دووجای هر ژماره په کی، نه نجامه که ی همیشه نه رینییه (+) و گوره تره له سفر یان سفره، هؤکاری نه مهش نه وه په که: $(- \times -) = +$ ، باشه نه مه چون؟¹⁶ دووجای سفریش، هر ده کاته وه سفر. هر بهم هزیه، هموو ژماره په کی دووجا کراوی نه رینی (+)، ده بیت دووجای دوو ژماره بیت $+x$ و $-x$. به شیوه په کی گشتی، هر ژماره که، چند جار جارانی خوی بکریت، نه وه توانه کهش هر نه وهنده چاره ده بیت، واته:

$$x^n \times x^m = x^{n+m}, (x^n)^m = x^{nm}, x^0 = 0, x^1 = x, x^{-1} = \frac{1}{x}$$

¹⁶ ده توانین نه م راستیه به لمینین، نه ویش به هوی شیواز-میتو دیکی ساده:

$$-2(0) = 0 \rightarrow -2(1-1) = 0 \rightarrow -2(1) - 2(-1) = 0$$

دیاره که ده بیت نیشانه ی نیوان نه و دوو پاده یی کوتایی، بکاته +، چونکه په کم هنگار $-2(0) = 0$ نه مه شتیکی راسته، له هنگاوی کوتایی بهو نه وهی نه م راستیه بهاریزریت، نه وه په کی هنگر هیه، نه ویش نه وه په که ده بیت: $-2(-1) = +2$

هر له شیوهی: $x^n \times x^m = x^{n+m}$ دا، نه وه مان ده ست ده که ویت
 که په گی دوجای هر ژماره په کیش ده تواندریت به شیوهی بنچینه ک و
 توانیک بنوسریت، که په گی دوجا، ده بیته: توانی $\frac{1}{2}$ بو ژماره ی ژیر
 په که، واته: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.



ژماره خۆبهشهکان (سه‌ره‌تاییه‌کان)

Prime numbers

ژماره خۆبهشهکان (سه‌ره‌تاییه‌کان)، ئەو ژماره تەواو ئایه‌کیانەن (+) که تەنیا دوو بەشداربوو (Factor) ههیه، ئەوانیش "یه‌ک و خۆی" له 11 ژماره‌ی سه‌ره‌تای خۆبهشه‌کان، ئەممانەن: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots$ له‌گەڵ ئەو‌ش، ناکۆتـــــــا له‌م ژمارانه‌ هەن! ژماره‌ یه‌ک، به‌ خۆبه‌ش داناندریت¹⁷. ژماره‌ 2، یه‌که‌م ژماره‌ی خۆبه‌شه، له‌گەڵ ئەمه‌ش، له‌ ژماره‌ جووته‌کان، تەنیا 2 خۆبه‌شه. هەر ژماره‌یه‌ک که خۆبه‌ش نه‌بیت، پێی ده‌وترین ژماره‌ی دابه‌ش (Composite number). هه‌موو ژماره‌یه‌کی دابه‌ش، ده‌تواندریت له‌ ئەنجامی لیکدانى چەند ژماره‌یه‌کی خۆبه‌ش بنووسریت، وه‌ک:

$$12 = 2^2 \times 3 \quad 21 = 3 \times 7 \quad 270 = 2 \times 3^3 \times 5$$

له‌گەڵ ئەوه‌شدا، ژماره‌ خۆبه‌شه‌کان به‌ بناغه‌یه‌کی سه‌ره‌کی تیۆری ژماره‌کان داده‌ندریت. بۆ ئەوه‌ی بزانیین که ژماره‌یه‌ک خۆبه‌شه یان نا، ئەمه‌ وا پیناچێ کاریکێ هه‌روا ئاسان بیت، ئەوه‌ پروونه‌ که تەواوی ژماره‌ جووته‌کان جگه‌ له‌ 2 خۆبه‌ش نین، به‌لام بۆ ژماره‌ تاکه‌کان، دۆزینه‌وه‌یان تۆزیک تاقه‌ت پرۆکینه. ژماره‌ خۆبه‌شه‌کان بناغه‌یه‌کی به‌هێزی به‌ نه‌هینی

¹⁷ پرسى ژماره 1 که بۆچی ئەم ژماره‌ خۆبه‌ش نییه، ئەمه‌ دانوستانی بیرمەندان و زانیانی بیرکارییه، چونکه ئەگەر بیت و 1 به‌ خۆبه‌ش دابندریت، ئەوه‌ یه‌کێک له‌ بیردۆزه هه‌ره‌ سه‌ره‌کیه‌کانی تیۆری ژماره‌کان لیکه‌لده‌وه‌شیته‌وه‌.

کردن له بواری پاراستن و ئاسایش. گه لیک کیشی بیرکاری هه، که په یوهستن بهو ژمارانه وه، که تا ئیستاش شیکارنه کراون، په کیک له کیشی هه ره دیاره کان، گریمانه پیمان (Riemann hypothesis) که په یوهندی به بلا بوونه وهی ژماره خۆبه شه کانه، واته ئهو ژمارانه چون چونی به نیو ژماره سروشتیه کان بلا بوونه توه و دابه شی بوونه؟!

ژماره خۆبه شه کان به ئه تومی بیرکاری ناسراون¹⁸

سروشتی ئه ژمارانه هه لئه تینه ره له دۆزینه وه و درک کردن به تایبه تمه ندییه کانی، که هه ره له زوه وه، ماتماتیکزانه کانی به چاخ و په نگ بردوه¹⁹! له گه ئه مهش، تا هه نوو کهش بوونه ته کیشی له بهردهم هه ندی

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11		13	14	15	16	17	18	19	20
		23	24	25	26	27	28	29	30
31						37	38	39	40
41		43	44	45	46	47	48	49	50
		53	54	55	56	57	58	59	60
61						67	68	69	70
71		73	74	75	76	77	78	79	80
		83	84	85	86	87	88	89	90
				95	96	97	98	99	100

پرسی چاره سه ره نه کراوی
بیرکاری، سیمیای ته لیسماوی
ئهو ژمارانه، به ره له هه موو
شیک ته وه ده که؛ یاسایه ک
یا میتودیک تا ئیستا بوونی
نییه بو ئه وهی بتوانین ئه و
ژمارانه ی پین به ره مبیته ی²⁰

¹⁸ Tony Grilly, How big is infinity? (2014).

¹⁹ له خشته بردوه.

²⁰ بلوگی بیرکاری یو کورد.

به شدراوهکان و بهرماوهکان

Divisors and remainders

دابه شکردنی ژماره یهک به سهر ژماره یهکی تر، به بی نهوهی بهرماوهی لی بمینیتوه، به و هه ماهه نگیه ده لاین: دابهش ده بیت. نه مهش واته له نه جامی دابه شه که هیچ بهرماوه یهک نامینیتوه، وهک: ژماره 4 ده بیت به شدراوی (Divisor) ژماره 12، نه و 12 یه پیی ده لاین: به شکراو (Divided)، که 12 به سهر 4 دابهش ده بیت به بی نهوهی ماوهی لی بمینیتوه. به لام چ دهر باره ی 13 دابه شکی 4؟ له م باره دا، 4 به شدراوی 13 نیه، چونکه 13 به شیوه یهکی ته واد دابهش نابیت به سهر 3 بی نهوهی بهرماوهی لی نه مینیتوه، له م باره دا، نه جامه که ده کاته 3 و بهرماوه 1. به ریگایه کی تر ده توانین بلین: گوره ترین ژماره ی ته وادی له 13 بچو کتر بریتیه له 12 که دابه شکی 4 ده بیت، واته: $13 = 12 + 1$ ، که لیره وه بهرماوه که ده بینین که بریتیه له 1. که دیاریشه نه جامی نه و دابه شکاریه ده کاته $3\frac{1}{4}$ (3 ته واد + $\frac{1}{4}$).

ژماره 3 و 4 هه ردو وکیان 12 دابهش ده کانه (ههروه ها 1, 2, 6 و 12). نه گهر ژماره یهکی سرو شتی p ، دابه شکی ژماره یهکی تر q بکین، q له م باره p دابهش نه کات، نه وه ژماره یهکی تر r هه که پیی ده لاین: بهرماوه، که نه م r له q بچو کتره. نه مهش واته یاسا گشتیه که ی به م شیوه یه: $p = kq + r$ کاتیک k ژماره یهکی سرو شتی.

ئەگەر دوو ژماره‌ی p و q مان هه‌بیت، گه‌وره‌ترین کۆلکە‌ی هاوبه‌ش؛ بریتییە له گه‌وره‌ترین ژماره، که تیدا p و q هه‌ردووکیان به‌سه‌ریدا دابه‌ش ده‌بن. له‌به‌ر ئه‌وه‌ی 1 ژماره‌یه‌کی شازه و هه‌موو ژماره‌یه‌ک به‌سه‌ر 1 دابه‌ش ده‌بیت، بۆیه گه‌وره‌ترین کۆلکە‌ی هاوبه‌ش بریتییە له 1 یان گه‌وره‌تره له یه‌ک. ئەگەر له باریک گه‌وره‌ترین کۆلکە‌ی هاوبه‌ش 1 بو، ئه‌وه ئه‌و دوو ژماره‌یه پیمان ده‌وترین: هاوه‌له‌خۆبه‌ش (Coprime).

له پینگە‌ی ژماره‌ی دابه‌شکەر ده‌گه‌ین به‌خیزانکی تری ژماره‌کان، که زۆر سه‌رنج پاکیش و عه‌زیم‌ن، که پیمان ده‌وترین ژماره 'بێخه‌وشه‌کان' یان ژماره 'نمونه‌بیه‌کان' (Perfect numbers). ژماره بێخه‌وشه‌کان، ئه‌و ژمارانه‌ن که سه‌رجه‌می به‌شداربووه‌ شیاوه‌کانی (واته ژماره‌که‌ خۆی له‌گه‌ل نیه‌) پیکه‌وه، نه‌جماه‌که‌ی هه‌ر ده‌کاته‌وه ژماره‌که‌ خۆی. بۆ نمونه: ژماره 6 ژماره‌یه‌کی بێخه‌وشه²¹، چونکه به‌شداربووه‌کانی 6 بریتین له: 1، 2، 3، که کۆی ئه‌م ژمارانه: $1 + 2 + 3 = 6$ ده‌کاته‌وه ژماره‌که‌ خۆی که بریتییە له 6. ژماره‌یه‌کی تر، بریتییە له: 28 که به‌شداربووه‌ شیاوه‌کانی بریتین له: 1، 2، 4، 7، 14 که کۆی ئه‌و ژمارانه: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$ ده‌کاته‌وه ژماره‌که

²¹ له پهرتوکی (The book of numbers.Tim Glynne-Jones) له وه‌سفی ژماره 6 نووسراوه: ژماره 6 له به‌ر ئه‌و هۆیه ژماره‌یه‌کی بێخه‌وش نیه‌ که خودا دونه‌ی به 6 پوژ دروست کرد، به‌لکو خودا دونه‌ی به 6 پوژ دروست کرد چونکه 6 ژماره‌یه‌کی بێخه‌وشه.

خۆی. سێیهم ژماره‌ی بـیخه‌وش، بریتیه له 496 که کۆی به‌شداربووه‌کانی:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$$

ده‌کاته‌وه خۆی.

ژماره بـیخه‌وشه‌کان زۆر ناوازه‌ن و دۆزینه‌وه‌یان ئاسان نییه (دۆزینه‌وه‌ی ئه‌و ژمارانه پشته‌ی به ژماره خۆبه‌شه‌کان به‌ستووه، هه‌ر بۆیه ئیقلید یاسایه‌کی بۆ دۆزینه‌وه‌ی ئه‌م ژمارانه داتا‌شایوه). له‌گه‌ل ئه‌وه‌ش تا هه‌نۆکه بیرکاریزانان توێژینه‌وه ده‌کهن له سه‌ر پرسینک:

❖ ئایا ژماره بـیخه‌وشه‌کان هه‌ر هه‌موویان چووتن؟

تا زیاتر برۆین، ئه‌وه مه‌ودای نـیوان دوو ژماره‌ی بـیخه‌وش زیاتر و زیاتر ده‌بیت.

Perfect Number	Positive Factors	Sum of all factors excluding itself
6	1, 2, 3, 6	6
28	1, 2, 4, 7, 14, 28	28
496	1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248, 496	496
8,128	1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032, 4064, 8128	8,128

ئالگوریتمی ئیقلید

Euclid's algorithm

ئالگوریتم، له سادهترین پیناسه؛ بریتییه له میتوودی-شیوازی شیکارکردنی کیشیهیک به پاهند بوون به هندیگ ریسای ههنگاو به ههنگاو، که باریکه ریساکان دووباره و چهندباره بهکاردههیندریتهوه بو کیشتن به ویستیک (ئامانج). ئالگوریتمی ئیقلید، ئالگوریتمیکی دیرینی زور لهمهوپیشه، که به نزیکهیی 300 سال بهر له زاین.

ئهم ئالگوریتمه، بو دۆزینهوهی گهورهترین بهشدرای هاوبهش (GCD-Greatest common divisor) له نیوان دوو ژماره، بهکاردیت. ئالگوریتم، سههرهکترین شته له زانستی کومپیوتەر، که تیدا ئامیزه ئه لکترۆنییهکان لهسهری رۆنراون بو بهرههه هینانی دههههه نجامی بهسود. به کورتی و پوختی، ئالگوریتمهکهی ئیقلید ئه وهیه : گهورهترین بهشدرای هاوبهش له نیوان دوو ژماره، دهکاته بهشدرای هاوبهشی جیساوازی نیوان دوو ژمارهکه. بهم شیوهیه دۆخهکه چهنههین جار دووباره دهکریتهوه تا لهکوتایی دهیته 'سفر'، بویه، ئه و ژمارهه که بووه هوی بهرههه هینانی ئه و سفره، ئه وه دهیته گهورهترین بهشدرای هاوبهشی دوو ژماره پهسههههه که یهکه؛ که ویستمان گهورهترین بهشدرای هاوبهشیان بو بدۆزینهوه. گهورهترین بهشدرای هاوبهشی نیوان دوو ژمارهه وه a و b بهم شیوهش دهنووسریت:

که وره ترین به شدراو $(a.b) =$. بۆ نمونه: $(12.8) = 4$ ، واته
 که وره ترین به شدراوی هاوبه شی نیوان 8 و 12 بریتیه له 4 به هزی
 ئالگوریتمی ئیقلید، به شیوه GCD ده دوزینه وه بۆ ئه دوو ژماره ی
 سه ره وه:

$$12 - 8 = 4 \rightarrow 8 - 4 = 4 \rightarrow 4 - 4 = 0$$

ایره ده بینین که له $4 - 4$ که یشتینه سفر، بۆیه GCD ی ئه دوو
 ژماره یه (8 و 12) بریتیه له 4 .

FINDING THE GCD OF 585 AND 442

Simple version of Euclid's algorithm: 15 steps

$$585 - 442 = 143, \text{ so consider } 442 \text{ and } 143$$

$$442 - 143 = 299, \text{ consider } 299 \text{ and } 143$$

$$299 - 143 = 156, \text{ consider } 156 \text{ and } 143$$

$$156 - 143 = 13, \text{ consider } 143 \text{ and } 13$$

$$143 - 13 = 130, \text{ consider } 130 \text{ and } 13$$

(at this stage the answer is obvious,
 but subtracting 13 nine more times leads to ...)

$$13 - 13 = 0, \text{ so the GCD is } 13.$$

Standard version of Euclid's algorithm: 3 steps

$$\begin{array}{r} 585 \\ 442 \\ \hline \end{array} = 1 \text{ (remainder } 143)$$

$$\begin{array}{r} 442 \\ 143 \\ \hline \end{array} = 3 \text{ (remainder } 13)$$

$$\begin{array}{r} 143 \\ 13 \\ \hline \end{array} = 11 \text{ (no remainder)}$$

so the process stops, and 13 is the GCD.

ژماره نارېژه ییېکان

Irrational numners

ژماره نارېژه ییېکان، نه و ژمارانن که ناتوانریت به شیوه ی دابه شکر دنی ژماره یی کی ته او به سر ژماره یی کی تری ته او (سفر نه بیت) بنوسریت. به واتایه کی تر: نه و ژماره یی که رېژه یی نیی²². یاخود گه هاتو له شیوه ی ژماره یی کی ده یی نوسرا، نه و نه و به شه ی دوا ی فاریزه، واته ده یی که، په نووسه کانی تا نا کوتا هر به رده وام ده روات به شیوازیکی نارېک. فراوانبوونه ده یی که ی ژماره ی نارېژه یی، هیچ شیوه سازیه کی خولگه یی دووباره ی تیدا نیی.

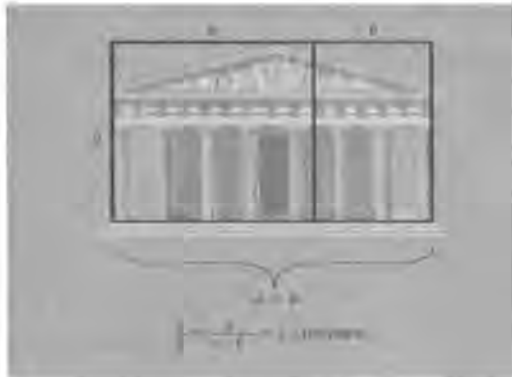
ژماره نارېژه ییېکان به هه مان شیوه ی ژماره سروشتیه کان و رېژه ییېکان، له روه ی قه باره وه نا کوتان (قه باره مه به ست له نه اندازه نیه لیره دا، به لگو مه به ست نه وه یه نا کوتا ژماره ی له م شیوه بوونی هه یه)، واته کار دینالی-ژماره ی دانه کانی ژماره نارېژه ییېکان نا کوتایه. به لام جیاوازه له ژماره ی دانه کانی ژماره سروشتیه کان و رېژه ییېکان، به مانایه کی تر، ژماره ی دانه کانی ژماره نارېژه ییېکان، گه وره تره له ژماره ی دانه کانی ژماره رېژه ییېکان و سروشتیه کان، یان باشتره بلین: راسته هه ردووکیان نا کوتا ژماره یان تیدایه، به لام نا کوتایه نارېژه ییېکان

²² نه و پیناسه هه ندیک سه یر دهرده که ویت: ژماره ی نارېژه یی، نه و ژماره یی که رېژه یی نیی. شتیک هه یه که رېگه مان پی دوات به و شیوه پیناسه ی ژماره نارېژه ییېکان بکین، نه ویش نه وه یه: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$.

که وره تره له ریژه بیه کان. ناپیت جیاوازیه کی تری نیوان ژماره نارپژه بیه کانمان له بیربجیت، ئویش ئه وهیه: که نه ژمیردراون (non-countable) له کاتیکدا ژماره ریژه بیه کان ژمیردراون (Countable).

له ناو ژماره نارپژه بیه کاندا، کومه لیک ژماره ی زور ناسراو هه، له وانه: نه گوری پای، که به π هه ما دمکرنیت، که ده کاته ریژه ی نیوان چیه ی بازنه بو تیره کی. نه گوری ئویله e . ریژه ی زیرین (Golden ratio)، یان رهگی دوو جای دوو $\sqrt{2}$ ،²³ که نه هه مانه هه موویان ژماره ی

نارپژه یین.



ئهم وینه یه، ریژه ی زیرین²⁴ ده نوینیت.

²³ ده گینرته وه: رهگی دوو جای دوو، به کینک له فیساکورسییه کان ئهم ژماره ی دوزیه وه، وتی: ئهم ژماره یه شتیکی سهیری هه یه، ئویش ئه وه یه ناتواندریت به شیوه ی کورت بنووسریت. له بهر ئه وه ی فیساکورسییه کان باوه ریان به ژماره نارپژه بیه کان نه بوو له سه ره تادا، بویه چاویان له و ئه نده میان سورکرده وه، تاکو له گه ل خویان بردییان بو گه شتیکی، به لام له گه شته که به بی ئه و گه رانه وه!

²⁴ له بیرکاری و هه وه ها له هه نره کانیشدا، دوو بهر له ته ک به کتراه، ده بنه خاوه نی ریژه ی زیرین که نه گوری که له بیرکاریدا که به نزیکه یی ده کاته: 1.618. (بلوگی بیرکاری بو کورد)

ژماره‌ی جەبری و ژماره‌ی ناچه‌بری

Algebraic and transcendental numbers

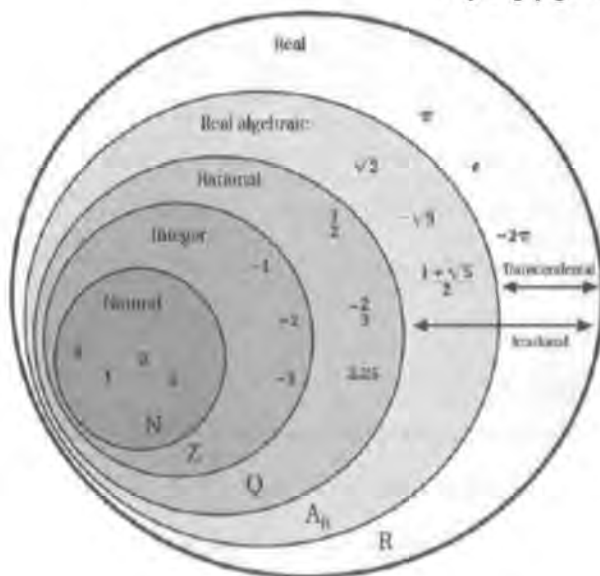
ژماره‌ی جەبری، ئەو ژمارانەن کە دەبنە شیکار (Solution) بۆ ھاوکیشه‌یه‌ک، کە کۆلکە‌ی نەزانراوه‌کانی ھاوکیشه‌کە ژماره‌ی ریژه‌یین. ژماره‌ی نا جەبری، ئەو ژمارانەن کە نابنە شیکار بۆ ئەم جوړه ھاوکیشانە. له ژماره جەبرییه‌کیان وهک: $\sqrt{2}$ کە ده‌بیته شیکار بۆ ھاوکیشه‌ی: $x^2 - 2 = 0$ ، له کاتیک کە ره‌گی دووجای دوو ژماره‌یه‌کی ناپژیه‌یه، وانا ناتواندریت به شتوه‌ی که‌رتی $\frac{a}{b}$ بنوسریت.

له گەل نه‌وه‌ش، هه‌موو ژماره ریژه‌یه‌یه‌کان ژماره‌ی جەبرین، به‌لام بۆ ناپژیه‌یه‌یه‌کان مه‌رج نییه. به‌لگه بۆ ئەوه‌ی کە هه‌موو ژماره ریژه‌یه‌یه‌کان ژماره‌ی جەبرین، ئەمه‌یه: گریمان ژماره‌یه‌کی ریژه‌یه‌مان هه‌یه: $\frac{a}{b}$ دیاریشه ئەم که‌رتە، شیکاره بۆ ھاوکیشه‌ی: $bx - a = 0$. وهک گوتمان ئەمه بۆ هه‌موو ژماره ناپژیه‌یه‌یه‌کان راست نییه. هه‌ر بۆیه کارکردن له‌گەل ھاوکیشه‌کان، بۆ بیرکازیانەکان هه‌ندئێ تاقه‌ت پرۆکینه و کاتی ئوئێ، چونکه پراوک‌کردن له‌م بابه‌ته ئاسان نییه. له ژماره ناچه‌برییه‌کانیش، وهک: π ، کە نابیتە شیکار بۆ ئەو جوړه ھاوکیشانە‌ی کە له‌سه‌روه به‌اسمان کرد.

مسهله ی رهگی دوو جای دوو $\sqrt{2}$ ، له نهجامی سینگوشه ی فیساکورسه وه سه رئاو کهوت، کاتیک، هر یه کیک له تهنیشت و بهرام بهر 1 بیت، نه وه به پنی یاسایی فیساکورس، ده گینه $\sqrt{2}$.²⁵

$$1^2 + 1^2 = c^2 \rightarrow c^2 = 2 \rightarrow c = \sqrt{2}$$

نهم هیلکارییه ی خواره وه، کومه له ی ژماره جیاوازه کان ده نینیت، وه په یوه ندی نیوانیان، واته کامه له کامه بنه یه و، کامه کومه له هه موویان گوره تره یان بچو کتره، پیشانده دات. له گه له نه دوو جنوره ژماره ی باسمانکرد، ده بینین که ده که ونه کوی له په یوه ندی کومه له ی هه موو ژماره کان به یه که وه.



²⁵ وەرگین.

پای

 π

نهگۆری پای π ، بهر له 4 ههزار سال دۆزراوته و مرقۆفایهتی له م ژماره‌ی پروانیوه و بهکاری هیناوه. بهلام بهکارهینانی ئه ژمارهیه، بههاکه‌ی ئه شتویه بههای ئیستا نهبووه که ههیه، بهلکو ئه نرخه، به نزیکه‌یی جیاواز بوو له وهی ئیستا زانراوه. پای، ژماره‌یه‌کی ناجه‌بریه وهک له بابته‌ی پیشوو باسکرا. بیرکاریزانه‌کانی بابلی کۆن، ههژماری ئه نهگۆرهبان کرد، بهلام به شتویه‌یه‌کی ورد نه‌بوو. بابلیه‌کان چتویه بازنه‌یان به قه‌د سی ئه‌وه‌نده‌ی تیره‌ی بازنه‌یان مه‌زنده‌کرد، واته له سه‌رده‌مه، نرخه‌ی پای بریتیه‌ی بوو له 3. بهلام به کیک له ئاسه‌واره‌کان؛ تابلو قورینه‌کان له نیوان (1680-1900) له پیش زاین، ئه پاستیه ده‌رده‌خات، که به کیک له بابلیه‌کان، گه‌یشه‌ی نرخه‌ی جیاواز تر له نرخه‌ی پیشتر بۆ دانرابوو، ئه‌ویش (3.125) بوو، ئه‌مه‌ش دیسانه‌وه نزیک بوونه‌یه‌وه‌که له نرخه‌ی ئیستای نهگۆری پای. له دوا‌ی شارستانییه‌تی بابلیه‌کان، شارستانییه‌تی تر په‌یان به ژماره‌یه بردوو، ئه‌وانیش میصریه‌کان بوون. میصریه‌کان له تووژنه‌وه و وردبوونه‌یان له مه‌سه‌له‌یه، پایان به 3.1605 مه‌زنده‌کرد. به‌که‌مین خه‌ملاندنی ته‌واو، بۆ چند ره‌نوو‌سیک بۆ ئه نهگۆره، له‌سه‌ر ده‌ستی ئه‌رخه‌میدز بوو. ئه‌رخه‌میدز به‌کیکه له بیرکاریزانه هه‌ره مه‌زنه‌کانی مرقۆفایه‌تی، که له نیوان سه‌له‌کانی 282-212 بهر له زاین له سیراکیوز ژیاوه. ئه‌رخه‌میدز

هه‌ژماری نزیکه‌یی پووبه‌ری بازنه‌ی کرد به به‌کاره‌یتانی بیردۆزی فیساکورس، ئه‌ویش له دۆزینه‌وه‌ی پووبه‌ری دوو 5 لای رینگ (پۆلیگون- Polygon). چۆنیه‌تی کاره‌که‌ش به‌و شتیوه‌ بوو: دانانی چه‌ندین پۆلیگون-چه‌ندلاک له ناو بازنه‌که. ئه‌رخه‌میدز له‌م رینگه‌یه‌ پیشانی دا که نرخ‌ی پای به وردی ده‌که‌ویته‌ نێوان دوو ژماره، ئه‌وانیش: $3 + \frac{1}{7}$ و $3 + \frac{10}{71}$. به‌م شتیوه، پای به نێو شه‌مه‌نده‌فه‌ری مینژوو رویشتووه. سه‌باره‌ت به هیمای پای، ئەم هیمایه، هیمایه‌کی گریکیه‌ که له‌ سالی 1700 به‌کاره‌یترا بو ئه‌و نه‌گۆره‌ مه‌زنه! له‌ لایه‌ن ویلیام جۆنیس (William Jones) دواتر ئەم دورشم و هیمایه‌ گه‌یشته‌ قیمه‌ له‌ لایه‌ن بیرکاریزانی به‌ ناوبانگ "لیۆنارد ئۆیله‌ر". هه‌ر سه‌باره‌ت به‌م باسه، بیرکاریزانیکی فه‌ره‌نسی خه‌ملاندنیکی بو ئەم ژماره‌یه‌ کرد له‌ رینگه‌ی

ئه‌گه‌رییه‌وه. هه‌روه‌ها ئه‌فسانه‌ی هیندیش "رامانووجان" له‌و مه‌سه‌له‌یه‌ میتۆد و قسه‌ی خۆی هه‌بوو.²⁶ له‌ سالی 2019 به‌ یارمه‌تی کۆمپیوتەر، توادرا زیاتر له 31 ترلیۆن په‌نووسی که‌رتی (Decimal) پای بدۆزیته‌وه.

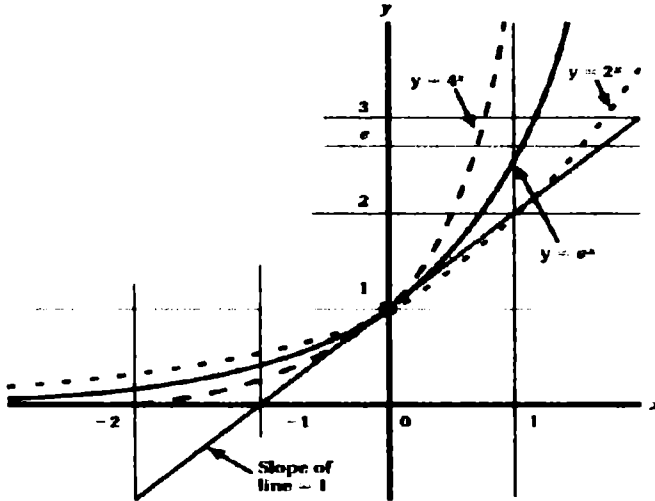
3.14159265358979323846264338327950288419716
9399375105820974944592307816406286208998628
034825342117087982148086513282306647093844
6095505822317253594081284811174502841027019
385211055596446229489549303819644288109756
6583344612847564823378678316527120190914564
856692348034861045432864821339360728024914
1273724587006606315588174881520920962829254
091715364367892590360011330530548820466521
3841469519415116094330672703657595918530921
8811738193281179310511854807446237996274956
7351885752724891227938183011949129833673362
4406566430660213949463952247371907021798609
4370277053921717629317675238467481846766940
513200056812714526356082779571342757789609
1796371787214884409012249534301465495833710
5079227968925892354201995611212902196086403
4418159813629774771309960518707211349999998
3729780489510597313281609631859502445955...

²⁶ ئەم به‌بته‌م پهنشتر له‌ بلۆکی بیرکاری به‌و کورد
(www.math4kurd.wordpress.com) به‌لاره‌ کردۆته‌وه‌ له‌ په‌رتوکه‌که‌ به‌ کورتی باسی
لیکراوه، بۆیه‌ منیش به‌ شتیکی زیاتر یاسم کردووه‌ بۆ ئه‌وه‌ی سه‌رنجراکیشتر بیت.

$$e \approx 2.718$$

e ژماره یه کی نارېژه یی و له هه مانکاتدا ژماره یه کی ناجه بریبه. ئەم ژماره یه گرنگیه کی ئیجگار زوری هه یه و یه کیکه له سه ره کیتیرین ژماره کان، که له زوریک له بابه ته بیرکاریه کان و تهنه ت له فیزییا و زانسته کانی تریش، به کار به ریی هه یه. نرخه که ی به نزیکه ده کاته $2.718281828459045235360287$. ئەم ژماره یه سه قفی سروشتی شیکردنه وه بیرکاریه یه، تهنه ت بو فیزیکزانه کان و ئەندازیا ریه کانیش، مایه ی خوشحالییه که ئیش له گه ل ئەم ژماره یه بکه ن، له کاتیک ئیشکردن له گه ل بنچینه یه ک به توانی 10 یان بنچینه ی 10 جا به هه ر توانیک، یان e به توانی ژماره یه ک، گرانییه ک دروست ناکات. هه ر له م پرسه، لۆگاریتم به بنچینه ی e ، ناسیندراوه به لۆگاریتمی سروشتی (Natural logarithm). به هه مان شیوه π و e ، گه لیک ده برین و په یوه ندییان پیکه وه هه یه. نه گۆری e تاکه ژماره یه که داتاشراوه که ی له توانی x (e^x) کاتیک x گۆراویکه، هه ر ده کاته وه خۆی! ئەم ژماره یه گرنگیه کی ئیجگار زوری هه یه له بابه تی ئەگه ر (Probability) که نواندنی هه یه له شیوه ی زنجیره یی ناکۆتا. له گه ل ئەوه ش، e په یوه ندییه کی له گه ل π دا هه یه، له به ر ئەوه ی له نه خشه سیگۆشه یه کان که ده کریت به هۆی ئەم ژمارانه وه بنوسریت و گوزارشتیان لی بکریت، یاخود له بابه تی ژماره ناویته کان (Complex numbers). پای π و e پیکه وه له هاوکیشه یه ک کۆده بنه وه، هه ر به و هۆیه ش، نه خشه سیگۆشه یه کان زور جار به هۆی ئەمانه وه ده کریت بنوسریت. هاوکیشه یه کی زور جوان له

هه‌مبهر ئه‌و ژمارانه هه‌نه، ئه‌ویش 'هاوئهنجای ئۆیله‌ری' پێ ده‌وتریت:
 $e^{i\pi} + 1 = 0$ ، که به جوانترین هاوکێشه‌ی بیرکاری ناسیندراوه.



ئهم وێنه‌یه، ڕونکردنه‌وه‌ی سێ نه‌خشه‌ ده‌نوینیت، ئه‌وانیش

نه‌خشه‌کانی:

$$y = 4^x \quad , \quad y = 2^x \quad , \quad y = e^x$$

ئیره پرسیاریک دروست ده‌بیت، e بریتیه له ژماره‌یه‌ک وه‌ک

ژماره‌کانی تر، بۆچی نه‌خشه‌کانی تر به بنچینه‌ی ژماره و توانی x

داتا‌شراوه‌که‌یان ناکاته‌وه نه‌خشه‌که خۆی، له‌کاتێک ئه‌مه بۆ نه‌خشه‌ی

$$y = e^x \text{ پاسته؟}^{27}$$

²⁷ له قۆناغی دووی زانکۆ ئه‌و پرسیاره‌م لا دروست بوو، به‌ گه‌ران و سوران، وه‌لامه‌که‌م ده‌ست که‌وت، پێم باش بوو هه‌مان پرسیاره ئاراسته‌ی خوینته‌ری هیژا بکه‌م.

لۆگاریتم

Logarithms

لۆگاریتم، یه کیک له گرنکترین یاساکانی بواری زانست، به جۆریک، ده که ویته ناو گرنکترین 17 هاوکیشه کان. لۆگاریتم وهک دهسته واژه یه کی بیرکایانه، به پیچه وانه ی توان هیز کارده کات. بۆ نمونه: لۆگاریتمی 1000 به بنچینه ی 10 ده کاته 3، واته $10^3 = 1000$. ئیمه له ریگی لۆگاریتمه وه ده توانین هیزی زه مین له رزه بومه له رزه بزانی، جگه له چهن دین سو دی زۆر گرنگی تر. بۆ نمونه: ئه گه ژماره یه کمان هه بیت به توانی ژماره یه ک، واته $a^n = x$ وه $a^m = y$ له مه وش $a^n a^m = a^{n+m}$ ده سته که ویت، هه ر ئه م ده سته واژه یه ده تواند ریت له سه ر شیوه ی لۆگاریتم، واته فۆرمی لۆگاریتم بنووسریت:

$$(a^n)^w = a^{nw} \text{ و یان } \log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

ئه مپش له فۆرمی شینوازی لۆگاریتم بریتیه له و هاوکیشه یه: $\log(x^w) = w \log(x)$. ئه و یاسایانه که پیشتر به کارده هیندران بۆ ساده کردنه وه ی هه ژماره گه وه کان پیش ئه وه ی ئامیر و ئه ژمیره ئه لکترۆنییه کان په یدا بیت، ئه وه به هۆی دوو راسته وه (Ruler) که به پارسه نگی لۆگاریتمی ناسراوه، ئه جامده درا.

$$i = \sqrt{-1}$$

i ژماره‌ی ئاویتە-خه‌یالی یان ئالۆزیشی پنده‌لین. i ²⁸ که بۆ فواندنی ره‌گی دووجای (-1) به‌کار دیت. ئەم ژماره‌یه له ژبانی پوژانه به‌که‌لکی ژماردن نایه‌ت، واته ناتوانین بۆ کرپن و فروشن به‌کاری بینین، هه‌ر بۆیه ناسراوه به ژماره‌ خه‌یالییه‌کان یان ئاویتەکان. چه‌مکی ژماره‌ ئاویتەکان، گرنه‌گه و کۆمه‌کیمان ده‌کات له شیکارکردنی هه‌ندیک جووری هاوکیشه‌ی وه‌ک: $x^2 + 1 = 0$ ، دیاریشه‌ ته‌نیا ره‌گی دووجای (-1) واته $\sqrt{-1}$ شیکاره بۆ ئەم هاوکیشه‌یه. که ده‌شتوانین به‌و شیوه‌ی لێی بنۆرین: $x^2 = -1$. پینشتر وتمان که دووجای هه‌ر ژماره‌یه‌کی ئه‌رینی (+) یان نه‌رینی (-) هه‌میشه ئه‌رینییه (+)، به‌لام لێره که‌شه‌که جیاوازه، نه‌وه‌ش واتا ناگریت هه‌یج به‌کێک له ژماره‌ راستیه‌کان بینه شیکار بۆ ئەم هاوکیشه‌یه، له‌گه‌ل نه‌وه‌ش، دوو نه‌رخ شیکاری هاوکیشه‌که ده‌کات، له‌کاتیک دووجای ئه‌رینی و نه‌رینی نه‌رخه‌که ده‌کاته‌وه نه‌رینی یه‌ک! واته: $(\pm\sqrt{-1})^2 = -1$ ، به‌لام ژماره‌ خه‌یالییه‌کان به‌و شیوه‌یه ئالۆز و خه‌یالای نین که به‌ رووکه‌ش دياره! ²⁹

²⁸ بیرکاریزانی سوپسری "لیونارد ئۆیلەر"، یه‌که‌م که‌س بوو هه‌م‌ای i به‌کاره‌ینا بۆ

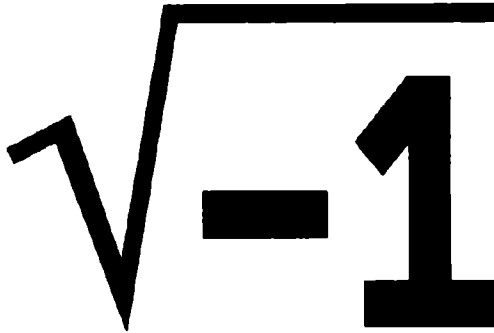
$\sqrt{-1}$.

²⁹ له په‌رتوکه‌که‌ی (جوورج گاموڤ) به‌ ناوی "یه‌ک، دوو، سێ ... ناکوتا" که (حوسین حوسینی) کردویه‌تی به‌ کوردی، باس له کیشه‌یه‌ک ده‌کات له ژبانی پوژانه که چاره‌سه‌ره‌که‌ی (دۆزینه‌وه‌که‌ی) په‌یوه‌ندی به‌ ژماره‌ ئاویتەکانه‌وه هه‌یه.

بۆ ئەوەی به شیوهی ئەندازهیی ژماره‌یه‌کی ئاوێته نیشان بدهین،
 ئەو راسته‌هێلێک به‌س نییه‌-یه‌ک ره‌هه‌ند، به‌لکو پێوستمان به‌ پروته‌خته،
 له‌کاتێکدا، بۆ نواندنی ژماره‌ راستیه‌کان، ته‌نیا هێلێکی راستمان به‌س بوو،
 هۆکاری ئەمه‌ش ئەوه‌یه، که ژماره‌ ئاوێته‌کان له دوو به‌ش
 (Component) پینک دیت، به‌شی راستی (Real part)، و به‌شی خه‌یالی
 (Imaginary part)³⁰. که به‌و شیوه‌ دهنوسریت:

$$x + iy$$

ده‌کریت هه‌موو ژماره‌یه‌کی راستی وه‌ک ژماره‌یه‌کی ئاوێته سه‌یر
 بکه‌ین، ئەویش کاتێک به‌شه‌ خه‌یالییه‌که‌ی سفره‌، واته‌: $x + i0$ کاتێک x
 ژماره‌یه‌کی راستیه‌.

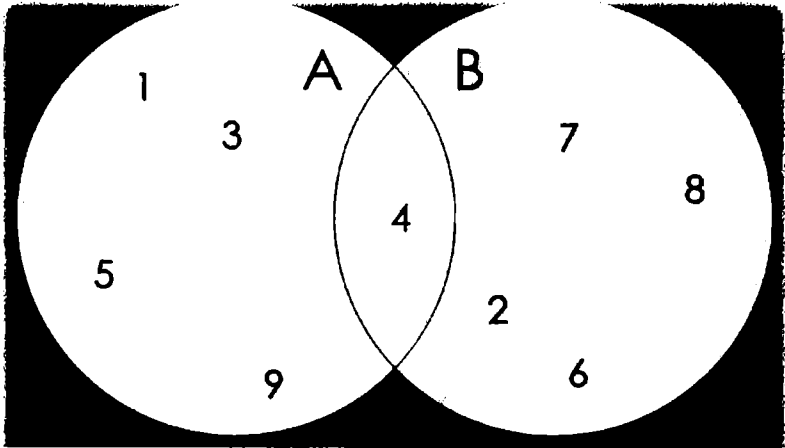


³⁰ چه‌مکی "ژماره‌ی ئاوێته" کاتێک به‌کارده‌نین که ژماره‌که به‌شی "راستی و خه‌یالی" هه‌بیت، وه‌ک: $2 + 3i$. به‌لام چه‌مکی ژماره‌ی "ئالوز یان خه‌یالی" کاتێک به‌کارده‌نین که به‌شی راستی ژماره‌که سفره‌ بێت، وه‌ک: $3i$.

بهشی دووهم

کومه له کان

Sets



$$A \cap B = \{4\}$$

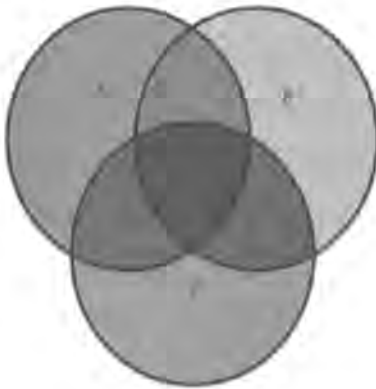
کۆمه‌له‌کان

Sets

کۆمه‌له³¹، به سانا‌یی بریتییه له کۆبوونه‌وه‌ی شتانیک به‌یه‌که‌وه. ئه‌و شتانه که له ناو کۆمه‌له‌که‌دان، دانه‌یان (Element) پی ده‌وتریت. بیرۆکه‌ی کۆمه‌له، به‌یه‌کینک له‌بابه‌ته‌هه‌ره‌به‌پینز و گرنگه‌کانی سیمبولی-بیرکاری داده‌ندریت، به‌جۆریک، زۆریک له‌بنچینه و تیۆریه بیرکاریه‌کان، له‌سه‌ر ئه‌م بابته‌پایه‌کانی خویان بونیادناوه، ته‌نانه‌ت سه‌ره‌کیترن له‌ژماره‌کان! کۆمه‌له له‌ناویدا ده‌کریت ناکوتا (Infinite) یان کۆتادار (Finite) دانه‌ی تیندا بیت، که‌هه‌میشه به‌شیوه‌ی داخراو ناماژه‌ی بۆ ده‌کریت و دانه‌کانی ناو کۆمه‌له‌که‌ئه‌گه‌ر بینوسین ده‌خریته‌نیوان ئه‌و { } که‌وانانه. ریزبه‌ندی نوسینی دانه‌کان له‌ناو ئه‌م که‌وانانه، بایه‌خینکی وای نییه و خسه‌له‌تی کۆمه‌له‌که و دانه‌کانی ناوی ناگۆریت و به‌شیک نییه له‌تایبه‌تمه‌ندی کۆمه‌له، یان دووباره‌ی بوونه‌وه‌ی دانه‌یه‌کیش کیشه‌نییه له‌هه‌ندی دۆخدا. کۆمه‌له‌کان مومکینه دروستبکیرن له‌کۆمه‌له‌کانی تره‌وه. به‌کینک له‌و هۆکارانه‌ی که کۆمه‌له‌کان به‌بابه‌تینکی به‌نرخ‌ی ده‌زانین، له‌به‌ر ئه‌وه‌یه‌گشتیتی ده‌پا‌ر‌یزیت و تیۆری له‌سه‌ر بینا ده‌کریت، واته‌خه‌ت و خالی زۆریک تیۆری داده‌ریژیت.

³¹ له‌بابه‌تینکی پینشوو باسی خیزانی ژماره‌کانمان کرد. جیاوازی خیزان و کۆمه‌له‌ئه‌وه‌یه که خیزانه‌کان ریسایه‌کیان هه‌یه بۆ دانه‌کانی ناوی، وه‌ک که خیزانی ژماره‌ جووته‌کان و خیزانی ژماره‌ تاکه‌کان هه‌ردووکیان له‌ناو کۆمه‌له‌ی ژماره‌ ته‌واوه‌کان بوونیان هه‌یه.

سه بارهت به شته کانی-دانه ناو کومه له، ده کریت هر شتیک بیت، ژماره، هه ساره کان، دره خته کان، ناژه له کان... به لام به گشتی پیکهاته کانی ناو کومه له، په یوه نندیدارن به یه که وه. ده کریت دانه کانی ناو کومه له که یاسایه کیان هه بیت. سه ره پای نه مهش، هه ندیک جار، ناو له کومه له کان ده ندریت و ناوزه ره ده کرین، وه: کومه له کانی کانتور (Cantor set). تیوری کومه له کان، پتر ده چیته خانه ی فلسفه فوه و خزمت و قازانجی توژی نه وه ی فلسفه ده کات، به تاییه تی له پرۆسه ی لیکۆلینه وه و نه جامگیری و گیشته مه به ستدا، جگه له وه ی په یوه نندیه کی توند و تولی به بابته چی مک و بریار (حکم) دانه وه هه به.³²



کومه له کان به پیتی
 که وره-که پیتلی ئینگیزی هیا
 ده کرین. دانه کانی ناویشی به
 پیتی بچوک-سمۆلی ئینگیزی
 هیا ده کریت. زور جار
 ره مزیک-هیا یه کی تاییه تی بو
 داده ندریت.

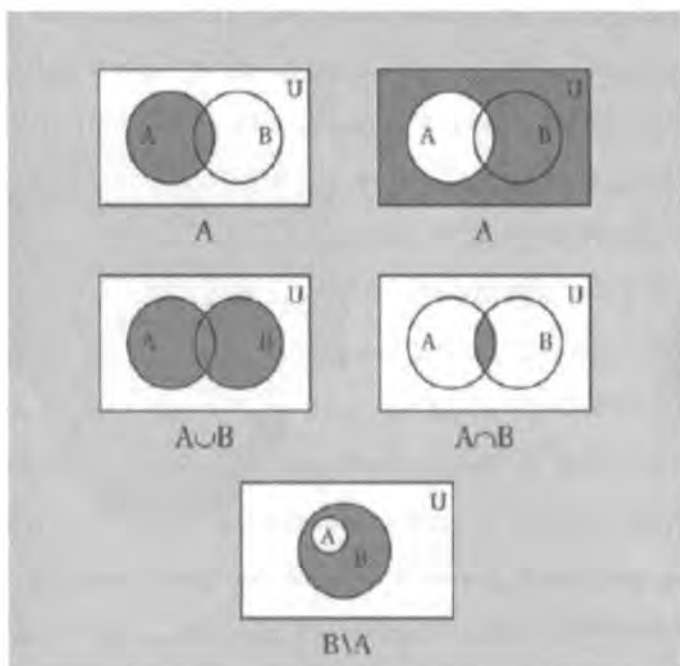
³² لوجیکی دوینی و نه مرۆ. پ. د. حمید عزیز. ناومندی ناویز 2016

پیکه ستنه وهی کۆمه له کان

Combining sets

وادانی دوو کۆمه له مان ههیه، به هۆی ئه و دوو کۆمه له یه وه، ده توانین چه نندین کۆمه له ی تری هه مه چه شن دروست بکه ین؛ به به کاره ی تانی کرداره کانی تایبه ت به کۆمه له کان له سه ر ئه و دوو کۆمه له یه. یه که م کردار هه مانه، 'یه کتر بپینی دوو کۆمه له' (Intersection). ئه گه ر X و Y دوو کۆمه له بن، ئه وه یه کتر بپینی ئه و دوو کۆمه له یه به زمانی بیرکاری به و شیوه ده نو سه ریت: $X \cap Y$ که ده کاته هه موو ئه و دانانه ی که له هه دوو کۆمه له که دا هه یه، واته دانه هاو به شه کان. کرداریکی تر، ئه ویش 'یه کگرتنه' (Union)، له یه کگرتن، هه ردوو کۆمه له که تیکه ل به یه ک ده بن و ده بن به یه ک کۆمه له ی گه وره، که به زمانی بیرکاری به م شیوه ده نو سه ریت: $X \cup Y$. باریکی ترمان هه یه له تیوری کۆمه له کان، ئه ویش پینی ده و ترئ: کۆمه له ی به تال (Empty set)، که ئه م کۆمه له یه ϕ یان $\{ \}$ هه ما ده کریت، واته هه یچ شتی که له ناو کۆمه له که بوونی نیه. چه میکی تر هه یه پینی ده و ترئ: به شه - بنه کۆمه له (Subset)، بنه کۆمه له، ئه و کۆمه له یه که دانه کانی له کۆمه له یه ک وه رگی راوه، ده شیت به شتی که له دانه کانی ئه و کۆمه له ی تیدا بیت، یا خود گشت دانه کانی ئه و کۆمه له ی تیدا بیت. کۆمه له ی به تال، بنه کۆمه له یه له هه موو کۆمه له یه ک. چه میکی ترمان هه یه پینی ده و ترئ کۆمه له ی 'ته واو که ر' (Complementary)، کۆمه له ی ته واو که ر واته ئه و دانانه ی که له و کۆمه له نین، وه ک: ئه گه ر Y

مان هه بیته، ئهوه كۆمهله ی تهواوكر به \bar{Y} یان Y^c هیتا دهكریت. ئهكر Y بته كۆمهله بیته له X ، ئهوه په یوه ندى تهواوكری Y بهو شیوه دهئوسریت: X/Y كه دهكاته كۆمهله ی هه موو ئه و دانانه ی له X هه بهلام له ناو Y نییه. له وینه ی خواره وه U ده بیئین، U بریتیه له : تیکرای جیهان (Universal set)، كه هه موو شتهكان-دانهكان دهكریته خۆی. له وینه ی خواره وه A و B به یه كوه تیکرای جیهان پیکه هیتن.

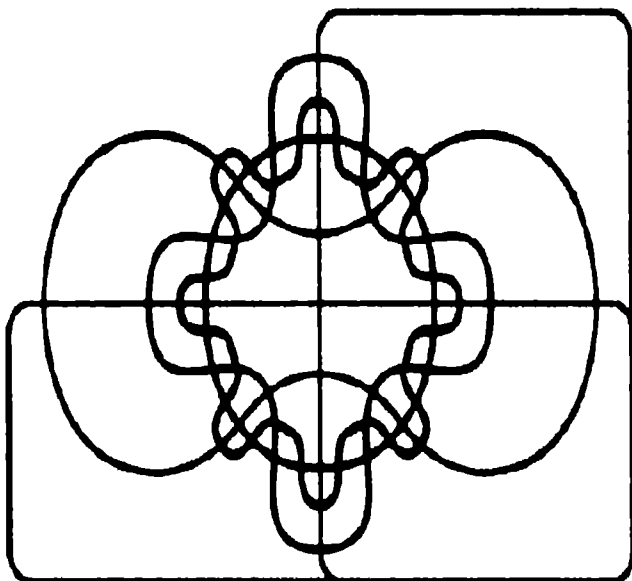


هیلکارییه کانی فن

Venn diagrams

هیلکارییه کانی فن، به گشتی بریتین له هیلکارییه ک هر وهک هیلکارییه کانی تر، که به زوری به کاردیت بۆ وهسفکردنی په یوه نندییه کانی نیوان کومه له کان. له ساده ترین شیوه دا، بازنه پوپکه (Disk) به کاردیت بۆ نواندنی هر کومه له یهک، که یه کتر برینسی پوپکه کان، یه کتر برینسی کومه له کان ده نوینیت، وهک له بابته تی پیشوو بینیمان. به کارهینانی هیلکاری له و شیوه بۆ دهر برینسی په یوه نندییه جیاوازه کانی نیوان پیشنیازه فلسه فییه کان یان کومه له جیاوازه کان به کارهاتوو و به کاردیت. ثم بابته له لایه ن لوجیکزان و فهیله سوف "جون فن" (John Venn) له سالی 1880 به فورموله کرا.

(فن) خوی ناماژه ی پنیانداوه، ههروهک بازنه ئویله رییه کان (Eulerian circles)..... به کارهینانی هیلکاری فن بۆ سئ کومه له، ریگایه کی کلاسیکی هه یه بۆ نیشاندانی هه موو په یوه نندییه پیتچوووه کان. به لام بۆ زیاتر له سئ کومه له، نه وه ریکخستنی یه کتر برینه کانی کومه له کان ئالوز و سهخت ده بیت. نه وه هیلکارییه ی خواره وه، په یوه نندی نیوان شهش کومه له ی جیاوازه نیشانداده.



تاکه ریټیچوو بۆ نیشاندانى شەش کۆمەله بەهۆى هیلکاری فن.

پارادوکسی سهرتاشه‌که

The barber paradox

پارادوکس، له ساده‌ترین پیناسه‌دا؛ بریتیه له وه‌قه‌ی که خوی دژی خوی ده‌ه‌س‌تیت‌ه‌وه و، نه‌ج‌امه‌که‌ی له رووی ل‌وجیکیه‌وه دانیت‌دانراو و جیگای قبول نییه. له سالی (1901) بیرکاریزان و ل‌وجیکزان و فه‌یله‌سوف 'بیتراند راسل'³³ نه‌و پارادوکسه‌ی به‌کاره‌ینا ب‌و نه‌وه‌ی هه‌ندی که م و کورپی له تیوری کومه‌له سهره‌تاییه‌کان ده‌ربخات.

پارادوکسه‌که ده‌ل‌یت: له گوندیگ، هه‌موو پیاوه‌کان ده‌بیت خویان سه‌ری خویان بتاشن، یانیش ده‌بیت سهرتاشی (ه‌لاق-ه‌لاک) گونده‌که سه‌ریان بتاشیت. سهرتاشی گونده‌که بانگیشه‌ی نه‌وه ده‌کات که؛ ته‌نیا سه‌ری نه‌و پیاوانه ده‌تاشیت که خویان سه‌ری خویان ناتاشن. باشه‌کن سه‌ری سهرتاشه‌که ده‌تاشیت؟

پارادوکسه‌که دوو‌چاری پرس‌یاریکی جدیمان ده‌کاته‌وه، نه‌ویش نه‌گه‌ر سه‌رنجی بده‌ین؛ کومه‌له‌یه‌ک هه‌موو نه‌و ب‌نه کومه‌لانه‌ی تیدایه‌که خویان وه‌ک دانه‌یه‌ک نین. نه‌و کومه‌له‌یه ده‌بیته دانه‌یه‌ک له خوی (مه‌به‌ست له سهرتاشه‌که‌یه)؟ چاره‌سه‌ری خیرا نه‌وه بوو که ب‌و ناکوکی

³³ بیتراند راسل (1872-1970) فه‌یله‌سوف، ل‌وجیکزان و بیرکاریزانی به‌ریتانی. یه‌کیکه له دره‌وشاوه‌ترین فه‌یله‌سوفه‌کانی فه‌لسه‌فه‌ی خورثاوا، که له ماوه‌ی ژبانی پتر له 45 په‌رتوک و چه‌ندین وتاری نویسی. زیاتر به‌ شاکاری 'ب‌نه‌ماکانی بیرکاری' ناسراوه. له هه‌مان کاتدا، براوه‌ی خه‌لاتی 'توبله' له بواری نه‌ده‌بیات.

له م شیوهیه، پیوسته تیۆری کۆمه له سنوردار بکه ن به زنجیره یه ک یاسا و به لگه نه ویست، پاشان دروستکردنی پله به ندیی کۆمه له کان، که نه مه ش ریگه ده دات دانه کان به که ونه کۆمه له ی سه رووخویان که له پله به ندییه که دان، له گه ل نه وه ش، رژی می به لگه نه ویسی تیۆری کۆمه له کان چوه ژیر بارییه وه.

ئه گه ر سه رتاشه که سه ری خۆی بتاشیت، نه وه نه و بانگیشه یه ی خۆی کردبووی، درۆ دهرده چیت. ئه گه ریش سه رتاشه که سه ری خۆی چاک نه کات، نه وه به پنی بانگیشه که ده بیت سه ری خۆی چاکات، به لام دیسان ئه گه ر چاکی بکات، نه وه بانگیشه که ی درۆ دهرده چیت... واته پرۆسه که له نیوان چاکردن و چاکنه کردن ده مینیته وه و ئاکامی نییه.



Cardinality and countability

ژماره‌ی دانه‌کان و شیاوی ژماردن

ژماره‌ی دانه‌کانی (Cardinality) ناو کۆمه‌له‌یه‌کی کوتا‌دار (Finite) A به شیاوه‌ی $|A|$ دهنوسریت، که بریتیه له ژماره‌ی دانه‌کانی ناو کۆمه‌له‌که (دانه‌ی دووباره هه‌ژمار نییه)، واته کۆمه‌له‌یه‌کی وه‌ک A چهند دانه‌ی تیندایه. دوو کۆمه‌له‌ نه‌گه‌ر هاتوو یه‌ک به‌رام‌به‌ر یه‌ک بوون (one-to-one)، شه‌وه پینان ده‌وترین 'هه‌مان ژماره‌ی دانه‌یان هه‌یه' کاتیک بتواندریت هه‌ر دانه‌یه‌کی دوو کۆمه‌له‌که به‌جۆریک جووتبکرین، به شیاوه‌یه‌ک که: بۆ هه‌ر دانه‌یه‌ک له کۆمه‌له‌ی یه‌که‌م، دانه‌یه‌ک هه‌بیت له کۆمه‌له‌ی دووه‌م، که پیکه‌وه ده‌ست له‌میلان‌بن. کۆمه‌له‌ی ژمیردارو-شیاوه ژماردن (Countable)³⁴ شه‌وه کۆمه‌لانن که دانه‌کانی ناوی ده‌توانین به‌هۆی ژماره سروشتیه‌کان ناوزه‌ر بکه‌ین. واته دانه‌کانی ناو کۆمه‌له‌که به شیاوه‌ی خسته‌یه‌ک (list) بنوسین و به ژماره سروشتیه‌کان ناویان لی بنین، له‌گه‌ل شه‌وه‌ش، خسته‌که ده‌کریت ناکوتا بیت. به بیرکاریانه، کۆمه‌له‌یه‌ک؛ ژمیرداروه نه‌گه‌ر هاتوو توانییمان دانه‌کانی ناوی 'یه‌ک به‌رام‌به‌ر یه‌ک' له‌گه‌ل به‌شیک له کۆمه‌له‌ی ژماره سروشتیه‌کان بنوسین. شه‌وه‌ش هه‌ندی شه‌نجامی سه‌مه‌ره‌مان ده‌داتن، بۆ نمونه: ده‌کریت بته

³⁴ شه‌وه‌یه‌که له تیوری پخوان (Measure theory) گرنگی هه‌یه، له‌گه‌ل شه‌وه‌ش هه‌ر کۆمه‌له‌یه‌ک ژمیردارو بیت، شه‌وه پخوانی شه‌وه کۆمه‌له‌یه ده‌کاته سفر، بۆ نمونه: پخوانی کۆمه‌له‌ی ژماره ریژه‌یه‌کان ده‌کات سفر.

کۆمهلهیهک له گهڵ کۆمهلهکه خۆی، هه‌مان ژماره‌ی دانه‌یان هه‌بیت، یان کۆمهله‌ی هه‌موو ژماره‌ جووته‌کان هه‌مان ژماره‌ی دانه‌یان-قه‌باره هه‌یه له‌گه‌ڵ کۆمهله‌ی ژماره‌ تاکه‌کان. ئه‌ویش هه‌مان ژماره‌ی دانه-قه‌باره‌ی هه‌یه له‌گه‌ڵ کۆمهله‌ی ژماره‌ سروشتیه‌کان. هه‌موو ئه‌مانه‌ پێان ده‌وتریت کۆمهله‌ی ناکۆتای ژمێردراو (Infinite countable set)³⁵. به‌ نمونه‌یه‌ک ئه‌مه‌ زیاتر رۆشن ده‌که‌ینه‌وه: وادانی ناکۆتا پارهی تاک هه‌زاریمان هه‌یه، له‌بهر ئه‌وه‌ی هه‌ر تاک هه‌زارییه‌ک ژماره‌یه‌کی تایبته‌ به‌ خۆی هه‌یه و هه‌یج دوو تاک هه‌زاری هه‌مان ژماره‌یان نییه، ئه‌وه‌ ده‌توانین ئه‌و تاک هه‌زاریانه‌ بژمیرین یان سه‌فت-پرز بکه‌ینه‌وه به‌ هۆی ئه‌و ژماره‌ی که‌ له‌سه‌ر تاک هه‌زارییه‌کان هه‌یه، له‌ کاتی‌ک ئه‌گه‌ر بچوکتترین ژماره‌ی سه‌ر تاک هه‌زارییه‌ک 5567 بێت، ئه‌وه‌ ئیمه‌ له‌گه‌ڵ 1 ده‌به‌ستینه‌وه، پاشان ئه‌گه‌ر دوا‌ی ئه‌م ژماره‌یه، بچوکتترین ژماره‌ 5569 بێت ئه‌وه‌ به‌ 2 ده‌بیه‌ستینه‌وه... ئه‌و نووسینه‌ لێره‌ به‌ مانای به‌های

|A|

رۆوت (Absolute value) نایه‌ت، ئه‌گه‌ر له‌ نیوان ئه‌م هه‌یمایه | | پیتی که‌ پیتهل یان کۆمهله‌ نووسرا، ئه‌وه‌ مه‌به‌ست لێی زانینی ژماره‌ی دانه‌کانی ناو کۆمهله‌که‌یه.

³⁵ کاتی‌ک دوو کۆمهله‌ی ناکۆتا له‌گه‌ڵ یه‌کتر به‌راورد ده‌که‌ین، شتی سه‌یر دینه‌ ئاراوه، وه‌ک: کام ناکۆتا گه‌وره‌تره؛ ناکۆتای کۆمهله‌ی ژماره‌ سروشتیه‌کان یان ژماره‌ جووته‌کان؟ بۆیه‌ له‌ پرسپاریکی له‌م شنیوه، ئه‌و وته‌ فله‌سه‌فیه‌ باوه‌ی که‌ ده‌یگوت: 'هه‌مه‌کی له‌ هه‌نده‌کی گه‌وره‌تره' به‌ هه‌له‌خرایه‌وه!

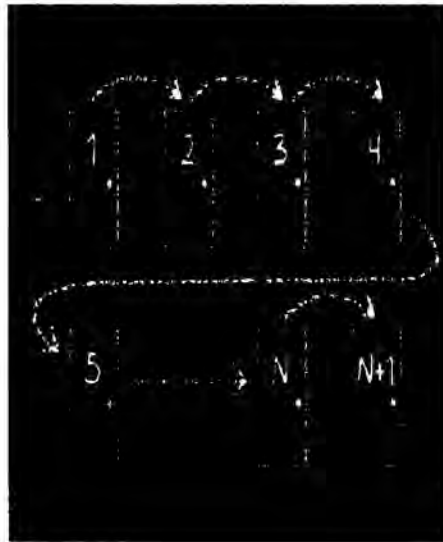
هوټیله‌کە ی هیلبرت

Hilbert's hotel

هوټیله‌کە ی هیلبرت³⁶، بیروکه‌یه‌کی جوان و ناوازه‌یه، که له لایه‌ن هیلبرت خۆی داهیندرا سه‌بارهت به 'کۆمه‌له ژمیردراوه ناکوتاگان'. بیروکه‌که وا پیشان ده‌کات که نه‌گەر هوټیلیکان هه‌بیت، ئه‌و هوټیله ناکوتا ژووری تیندا بیت (هوټیلکه کۆمه‌له‌که ده‌نوینیت، وه ژووره‌کانی ناوی؛ دانه‌کانی نار کۆمه‌له‌که ده‌نوینیت). ژووره‌کانی ناو کۆمه‌له‌که ناکوتان. هەر ژووره‌ک له ژماره‌یه‌که‌وه ژماره (Lable) کراوه 1,2,3,... به‌م شیوه، که گشت ژووره‌کان میوانی تیندایه، پاشان میوانیکی نوێ دیت بۆ هوټیله‌که و داوای ژووریک ده‌کات، خاوه‌ن هوټیله‌که‌ش داوا له‌که‌سی ژووری ژماره 1 ده‌کات بچیته ژووری ژماره 2، وه‌که‌سی ژووری ژماره 2 بچیته ژووری ژماره 3، به‌م شیوه بۆ ئه‌وانی تریش.

³⁶ ده‌بیغه هیلبرت (1862 – 1943) ماتماتیکناسی گه‌ره‌ی ئه‌لمانی و که‌سه‌ایه‌یه‌کی سه‌یر. رابه‌ری ریازی فه‌لسه‌فی فۆرمالیزم له ماتماتیکدا که ده‌لیت: ماتماتیک ته‌نها زاده‌ی نه‌قلی مروغه و هه‌چی تر، به‌په‌چه‌وانه‌ی قوتابخانه‌ی ئه‌فلاتونی (یان ریالیزم) که ده‌لیت ماتماتیک بونی سه‌ره‌بخۆی خۆی له‌ده‌ره‌وه‌ی مروغه‌یه. یه‌کیکه له‌په‌ش‌ره‌وانی نوێکردنه‌وه‌ی جیۆمه‌تری. چه‌نده‌ها به‌دیه‌ی دەرشت بۆ ئه‌وه‌ی بیسه‌لمینیت که سیسته‌میکی فۆرمالیستیکی له ماتماتیکدا هه‌یه، که به‌کورتی ده‌لیت له سیسته‌می به‌دیه‌ی سه‌ره‌تایی ماتماتیکدا ده‌شیت راستی ئه‌م به‌دیه‌ییانه‌ به‌لمینین. به‌لام له‌سالی 1931 ماتماتیکناسی ته‌مه‌ن بیست و پهنج سال، کورت گۆدیل توانی سیسته‌مه‌کی هه‌لوه‌شینه‌یت و سه‌لماندی که هه‌ندیک به‌دیه‌ی له ماتماتیکدا هه‌ن که هه‌رگیز ناتوانریت به‌لمینین که هه‌له‌ن یان ناتوانریت به‌لمینین که راست نین. هیلبرت به‌یه‌کیکه له ماتماتیکناسه‌ چالاکه‌کانی چه‌مکی ناکوتا هه‌ژمارده‌کریت و زور به‌په‌روه‌شه‌وه‌ بانگه‌وازی بۆ کردووه و به‌رگری له کانتور کردووه. (شیزکر ره‌شید قادر)

ئیترا له ئەنجام ژووری ژماره 1 بو میوانه تازه که چۆل ده بێت و تیدا نیشته جی ده بێت. ئەو پرۆسە ی گواستنه وه به بیرکاری یان به شیوه دهرده بریت: که سی ژووری N ده چیته ژووری $N + 1$. ئەم بیروکه ی هیلیبیرت ئەوه دهرده خات که به زیاد کردنی دانیه ک بو کومه له یه کی ژمیر دراو، هەر به ژمیر دراوی ده مینیتته وه، به لام ده ش بێت ئەم کومه له یه جیاواز بیت له گه ل کومه له ی پیش میوانه نوییه که. ئەم بیروکه یه ی هیلیبیرت³⁷ تا ئیستاش مشت و مری زور له سه ره، که دهرگای چهن دین پرسیا ری له رووی هزرمه ندان و بیرکاری زانان کرده وه.



³⁷ ئەم بیروکه یه ی ده یقید هیلیبیرت نیشانی دا که دوو کومه له ی ناکوتا، له گه ل ئەوه ی به رووکار واده ده که ویت که جیاوازن، به لام هاوتای به کترن. ئەمه ش بیروکه یه ک بوو که پیشانی دا ده کريت: ههنده کی به کسان بیت به هه مه کی!

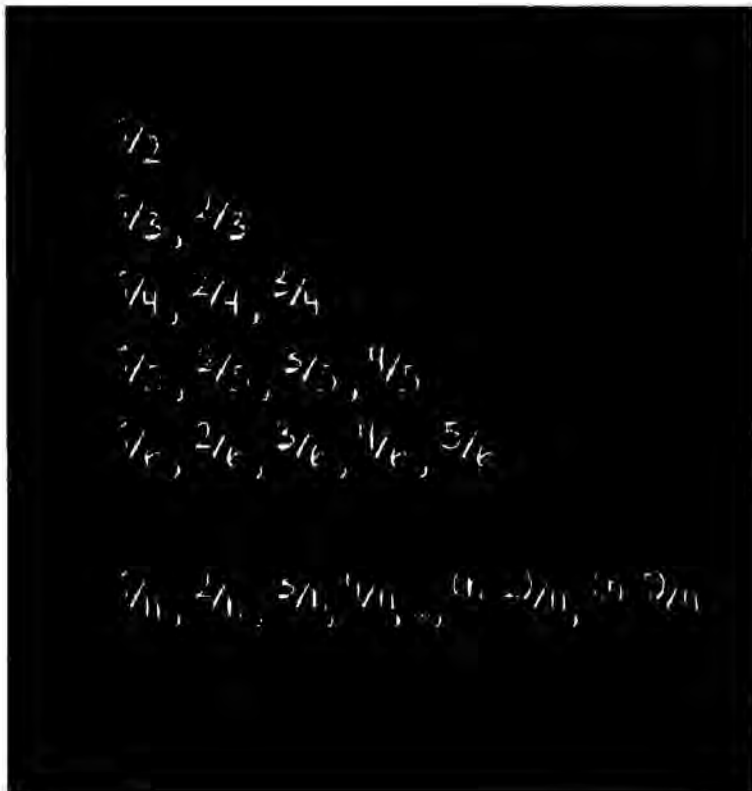
ژماردنی ژماره ریژهییهکان

Counting rational numbers

له کاتیکدا که هه موو کۆمه له زۆر گه وره کان ژمیردراو نین، به لام کۆمه له ی زۆر گه وره ش هه ن که ژمیردراون. مه به سستی ئیمه ش له و کۆمه له یه؛ بریتیه له کۆمه له ی ژماره ریژهییهکان (Rational numbers). ژماره ریژهییهکان نه و ژمارانه که له ریژهی نیوان دوو ژماره دروست ده بن $\frac{a}{b}$ کاتیک ($b \neq 0$).

ده توانین نه م راستیه به سه لمینین ته نیا به وردبوونه وه مان له ژماره ریژهییهکانی نیوان سفر و یه ک. نه گه ر ژماره ریژهییهکانی نیوان سفر و یه ک ژمیردراو بیت، نه وه ده بیت توانای نه وه مان هه بیت که له بچوکه وه بۆ گه وره ریژیان بکه ین. نابیت نه و راستیه له بیر بکه ین، که له نیوان هه ردوو ژماره یه کی ریژهییه، ژماره یه کی تری ریژهییه هه یه (وه ک چۆن له نیوان هه ر دوو نه ستیره یه ک، نه ستیره یه کی تر هه یه)، بۆیه ئیمه ناتوانین ته نانه ن یه که م و دووه م ژماره ی نه و خشته یه بنووسین! به لام پرسیاره که نه وه یه، به چ ریگایه ک نه توانین نه مه بکه ین؟ له کاتیک که ده لین نه و کۆمه له یه ژمیردراوه؟ یه کیک له ریگا چاره کان نه وه یه نه و ژمارانه ریژ بکه ین به پتی ژیره که یان (Divisor)، پاشان به پتی سه ره ی (Divided) که رته کان. له گه ل نه وه ش، هه ندی باری دووباره دروست ده بیت له م نزیکوونه وه یه، به لام هه ر ژماره یه کی ریژهییه له نیوان سفر و

یهک، مومکینه یهک جار دهرکه ویت له م خشته یه. وهک له م خواره وه
چونیه تی ریزکردنی ژماره کان خراوته روو.



له کومه له ژمیردراوه کان، شتیکی سه رنج راکیش هه یه، نه ویش
نه وه یه که هه ر کومه له یهک ژمیردراو بیست (Countable)، نه وه
په یه که یه ده کات سفر (Measure of zero).

کۆمەلە چەرەکان

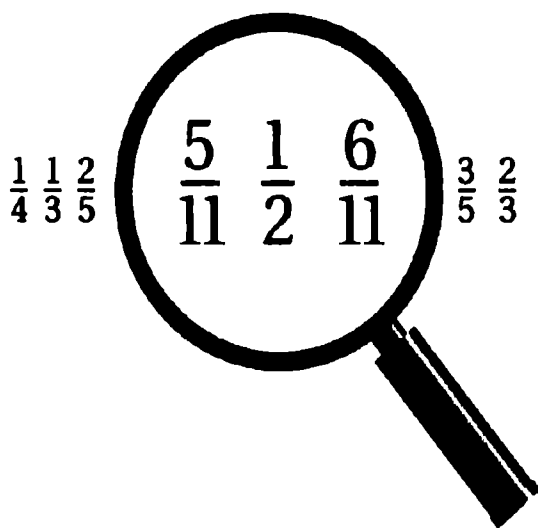
Dense sets

چرپتی-خەستی، یەکتیک لەو تاییبەتمەندییانەى که تیدا وەسفی پەيوەندى نىوان کۆمەلەيەک و بىنە کۆمەلەکانى دەکات، یانیش وەسفی چرپى دانەکانى ناو کۆمەلەيەک دەکات، ئەمەش کاتیک تىگەيشتتیک هەيە لە دوورى دانەکانى کۆمەلەکە. لە بابەتەکانى پيشوو، باسیکمان لەوە کرد که هەندى کۆمەلە دانەکانى؛ توانای ژماردنى هەيە و هەندیک نيبەتى، لەگەل ئەوەش، لە هەردوو باردا کۆمەلەکان ناکۆتان. ليرە مەبەستمان لە چرپى-خەستى کۆمەلەکان ئەوەيە: کۆمەلەيەكى ناکۆتای وەک کۆمەلەى ژمارە رێژەيیەکان (Rational numbers) که کۆمەلەيەكى زۆر گەورەيە و لە هەمان کات کۆمەلەيەكى زۆر چرپ و پرە! لە کاتیک که ئەم کۆمەلەيە بەشیکە لە کۆمەلەى ژمارە راستیەکان (Real numbers).

کۆمەلەيەک A پىسى دەوترىن چرپ لە کۆمەلەيەكى تر B ، ئەگەر کۆمەلەى A لە کۆمەلەى B بىنە بىت و، هەر دانەيەک لە کۆمەلەکە A لە کۆمەلەکە گەورەکەش B دانە بىت وەيان زۆر نزیک بىت لە يەکىيان، بۆ هەر دانەيەكى لە کۆمەلە گەورەکە B ، دەتوانىن دووربىەكى (مەودايەكى زۆر بچوک) دەست نيشان بگەين که لە سفر گەورەتر بىت، پاشان دۆزىنەوہى دانەيەک لە کۆمەلەکەى يەکەم A بە پىسى ئەو دووربىەيە لە دانەکە.

بۆ سهلماندنی ئهوهی که کۆمهلهی ژماره پێژهبهکان چڕ و پڕه له ناو کۆمهلهی ژماره راستیهکان. ئیستا دوورییهکی $d > 0$ دهست نیشان دهکەین لهگهڵ ژمارهیهکی راستی وهک y . بۆیه ئیستا دهتوانین بیسهلمینن که ههردهم ژمارهیهکی پێژهیی x ههیه له نێوان y و d دا.

جیا لهمهش، ههڕ بهو بیرۆکهیه دهتوانین بیسهلمینن که له نێوان ههڕ دووژمارهیهکی پێژهیی، ههڕ چند زۆر لیک نزیکیش بن، ئهوه ناکوتایه ژمارهیی تر له نێوانیاندا ههیه³⁸.



³⁸ قوتابیانی بهشهکانی بیرکاری نهم بابهته له وانهی (Mathematical Analysis - شیکردنهوهی بیرکاریانه) دهخوینن.

کۆمهله نه ژميردارووه کان

Uncountable sets

کۆمهله دانەى نه ژميردارووه نه ژميردارووه کان نه و کۆمهله ناکووتانان که له توانادا نيه دانەکانى ناوى ريکبخريين به شيوهكى ريک. ئەم بابەتەش ئەوه دهگهيه نيت که دوو جوور له کۆمهلهى ناکووتامان ههيه، ئەوانيش کۆمهله يەک که ژميرداروون و کۆمهله يەک که نه ژميرداروون. له ههردوو جوور، ديسانوه چهندين جوورى جياوازمان هههه. چۆن دهتوانين ئەو بسهلمينين که کۆمهله يەک نه ژميردارووه (Uncountable)؟ له سالى 1891 بيرکاريزانى ئەلمانى 'چۆن کانتور'³⁹ به هوى شيوازميتۆدى دژه يەک، سهلماندى که ژماره راسستيهکانى نيوان سفر و يەک نه ژميردارووه. ئەگەر ژميردارو بيت، ئەوه وا دادهنن که ناکووتايه، بهلام له خسته يەكى (List)ى ژميردارو.

³⁹ جورج کانتور (1845 - 1918) ماتماتيکناسى گهروهى ئەلمانى که تيۆرى سيني دۆزيهوه و توانى مانايەک به پرسى ناکووتا له ماتماتيکدا و به تايهت چهکى ژماره په يژه يه کان (transfinite numbers) ببهخشيت که زۆرهى ماتماتيکناسانى دوى خوى کوک بوون له سهرى. ههروهها توانى ناکووتا بکاته چهنه پوليک، ئەوانهى که ده ژميردريين و ئەوانهى که نا ژميردريين. ئەو ناکووتايه نهى له ناکووتايهكى تر گهروه ترن. سهههتا چوهه زانکۆى بهرلين و لهوى له ژير سهههه رشتى ليونارد کونيکەر کهوته خويندنى تيۆرى ژماره يى و دوايى زۆر به سهختى رکابهرى کرد. لای کانتور " له ماتماتيکدا هونهرى پرسيارکردن به هادارتره له شيکارکردنى پرسياره کان. " ئەم پهراوه مهنه، به داخوهه هيچ ماتماتيکناسيک نه ناماده بو يارمهتى بدات و نه باوهرى پى بکات، ههه بۆيهش پرسى ناکووتا و تيۆرى سستهکانى برده لای تيولوژيستەکان و ههستهيگره که ئەوان زياتر لى تيدهگن. (شيزکو رهشيد قادر).

بۆیه ئەگەر کۆمهلهیهک، ناکۆتا بیت و ژمیردراو بیت، ئەوه بهو شیوهی خوارهوه دهتواندریت دانهکانی بنوسریت:

$$0.a_1.a_2.a_3.a_4\dots$$

کاتیک هەر یەک له a_k ژمارهیهکی سروشتیه له نیوان سفر بو 9. کانتور بهرپرچی ئەوهی دهستهواژهیهی سه رهوهی دایهوه، کاتیک پیشانی دا که ههمیشه دهتوانین ژمارهیهکی راستی له نیوان سفر و یەک بدۆزینهوه که ئەو ژمارهیه ناکه و یته ناو خشتهکه (list).

N	\leftrightarrow	<i>reals in (0,1)</i>
1	\leftrightarrow	.835987...
2	\leftrightarrow	.250000...
3	\leftrightarrow	.559423...
4	\leftrightarrow	.500000...
5	\leftrightarrow	.728532...
6	\leftrightarrow	.845312...
:		:
n	\leftrightarrow	.$r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 \dots r_n \dots$
:		:

باشه ئه مه چۆن؟! ئه گهر بیت و ژماره یه کی دهیی بنووسین به شیوه یه ک که ژماره یه یه که می جیاواز بیت له گه ل ژماره یه یه که می خشته، وه ژماره یه دووه می که رته که جیاواز بیت له ژماره یه دووه می که رته خشته که،... به م شیوه ده گه یه نه ژماره یه ک که له و خشته یه نیبه که کریمانمان کردوه.

بیرۆکه که یه هیلبیرت ئه وه یه: له گه ل ناوزه پکردنی ژماره ریژه یه کان به ژماره سروشتیه کان، ئه وه ژماره سروشتیه که چند بیت، ئه وه ده چیت کار له و خانه یه (ده یه که) ده کات به چۆر یک که جیاواز بیت له پیگه ی ئه و که رته له خشته که، که له ئه نجام ژماره یه ک دروست ده بیت ناکه ویته ئه و خشته یه ی که کریمانی کردوه. ئه مه ش واتا ژماره راستیه کان نیوان سفر و یه ک نه ژمیردراوه.

کۆمه‌له‌کانی کانتۆر

Cantor sets

کۆمه‌له‌کانی کانتۆر، بریتین له سیما دیاره‌کانی شتانیکی که ناسراوه به له‌یه‌کیبوه‌کان (Fractals)⁴⁰. ئەم بیروۆکه‌یه له لایەن جۆرج کانتۆر که‌شە‌ی پیندر، بیروۆکه‌که پیشانی دەدات که ماوه‌یه‌کی (Interval) سنوردار له هیلێ ژماره‌کان، کۆمه‌له‌یه‌کن که نازمیردین (Uncountable). به‌لام پرس‌یاره‌که ئەوه‌یه: بۆ‌ه‌موو کۆمه‌له‌ نەژمیردراوه‌کان، ئەم شتە راسته؟ واته له ه‌موو کۆمه‌له‌ نەژمیردراوه‌کان ئەم ماوه‌ هیلێ (Line interval) هه‌یه؟ بۆ‌یه کانتۆر پیشانی دا مومکینه که کۆمه‌له‌یه‌کی نەژمیردراو دروستبکه‌ین که هیچ ماوه‌ هیلێکی تیندا نه‌بیت. کۆمه‌له‌کانی کانتۆر، کۆمه‌له‌یه‌کن تا راده‌یه‌ک ئالۆزن، به‌جۆریک پینکاته‌که‌یان له‌سه‌ر پینوه‌ری بچوک بۆ بچووکتر ده‌پوکینه‌وه. به‌کێک له نمونه‌کانی کۆمه‌له‌کانی کانتۆر، پینی ده‌وتریت سینیکی ناوه‌راستی کۆمه‌له‌ی کانتۆر (Middle third Cantor set). ماوه‌ کۆمه‌له‌یه‌که، که له سین به‌ش، به‌شی ناوه‌راسته‌که‌ی لاده‌بریت، وه‌ک له وێنه‌که‌دا دیاره. ئەم

⁴⁰ له‌یه‌کیبوه‌کان (فراکتال) پینکاته‌یه‌کی ئەندازه‌یه‌یه، که له گه‌وره‌کردنه‌وه و دووباره‌کردنه‌وه‌ی شیوه‌ ئەندازه‌یه‌کانی لیکه‌جوری شیوه‌ بنه‌ره‌تیه‌که په‌یدا ده‌بیت. به‌ ده‌سته‌واژه‌یه‌کی تر، فراکتال به‌ پینکاته‌یه‌ک ده‌وتریت که هه‌ر به‌شێکی هاوشیوه‌ی شیوه‌ گشتیه‌که‌یه. فراکتال له‌ دوور و له‌ نزیکه‌وه‌ یه‌کسان ده‌بینریت، به‌م تابه‌ته‌ندیه‌ی پینی ده‌وتریت: له‌خۆجۆویی (self-similar). فراکتاله‌کان یه‌کێک له‌ ئامرازه‌ گرینگه‌کانی گرافیکی کۆمپیوتەر. وشه‌ی فراکتال له‌ سالی 1976 له‌لایەن ماتماتیکزان 'بینۆیت ماندیلبۆرت' هاته‌ ناو دونه‌ی بیرکاریه‌وه.

کارهش له ههنگای یه کم، دوو ماوهی ترمان دهست دهکه ویت. بویه له قوناغی n دا، $2n$ ماوه مان ده بیت، که هر یه که یان به دریزی $(\frac{1}{3})^n$ ، وه سه رجه می دریزیه کانی $(\frac{2}{3})^n$. کاتیک n له نا کوتا نزیک ده که یه نوه، دیاره نه مهش به نزیکه یی ده بیته وه به سفر! نه مهش ههول و ته قه لای ده ویت بو نه وه ی پیشان بد ریت که به راستی شتیک هه یه که به جی ماوه له سنوره نا کوتا کان له م بیه دابه شکردندا! بو سه لماندن ی نه وه ی که کومه له ک نه ژمیر دراوه.



له م وینه ی سه ره وه، هیله که ی یه کم کومه له که ده نوینیت، نه گهر نهو کومه له یه بکه یه سی بهش، بهشی ناوه راست لابه رین، دوو بهش ده مینیت وه. دوو باره نهو دوو بهشه هر یه که یان ده که یه سی بهش، بهشی ناوه راست لابه رین... بهم شیوه.

کیشه‌کانی هیلبرت

Hilbert's problems

کیشه‌کانی هیلبرت، بریتیه له 23 پرسیار که له لاین ده‌یفد هیلبرته‌وه⁴¹ ئاراسته کراو له سالی 1900 له کۆنگره‌ی بیرکاری له پاریس. هیلبرت پنی وابوو، که ئەم کیشانه کلیلی پیشکوتنی بیرکارین له سه‌ده‌ی بیسته‌م. له‌کۆندا، 300 سال له‌مه‌و به‌ر، سیسته‌می به‌لگه‌نه‌ویستی له لاین ئیقلیده‌وه جیبه‌جی کرا له زور بواریا. بیرکاریزانه‌کانیش هه‌ستان به پیشخستن و جیگیرکردنی به‌لگه‌نه‌ویسته‌کان (Axioms) به پنی ئه‌و بواری کاری تیدا ده‌کن. له ئەندازه‌دا، هیل، خال و چه‌ماوه و تاییه‌تمه‌ندییه‌کانیان، پاشان گه‌شه‌پیدانی ئه‌و باب‌تانه به‌هۆی ئه‌و به‌لگه‌نه‌ویسته‌وه به پشت به‌ستن به لۆجیک، دواتر بونیاتنانی بیردۆزه‌کان و سه‌لمانان. هه‌ندیک له کیشانه‌ی هیلبرت، په‌یوه‌ندی به میتۆدی به‌لگه‌نه‌ویستی و درێژکردنه‌وه‌ی (زیادکردن) به‌لگه‌نه‌ویسته‌کان هه‌یه، وانا هیلبرت و شوینکه‌وتوانی بیان وابوو له ریگه‌ی فۆرموله‌کردنی به‌لگه‌نه‌ویسته‌کان، ده‌توانین بگه‌ن به چاره‌سه‌ری کیشه‌کان، وه هه‌موو کیشه‌یه‌کی ماتماتیکی، به‌لام ئه‌و کاره درێژه‌ی نه‌برد و به‌هۆی کاره‌که‌ی کۆرت گۆدیل⁴¹ به شیوه‌یه‌کی چاره‌پوان نه‌کراو، به‌ر به‌سستی خسته

⁴¹ لۆجیکزان و بیرکاریزانی ئەمەریکی بوو، هه‌ندیک له ده‌رئه‌نجامه سه‌ره‌کییه‌کانی بیرکاری سه‌لماندن و هه‌ر به ناوی خۆیه‌وه کرا. سه‌ره‌پای ئەمانه‌ش، پشانی دا که ئه‌و هه‌ول و ته‌قه‌لایه‌ی به‌رنامه‌که‌ی ده‌یفید و هه‌ندیک له لۆجیکباوه‌ره‌کان خه‌ریکینه، هه‌ج ده‌سته‌که‌وتیکی نییه و هه‌ولیکی نه‌زۆکانه‌یه.

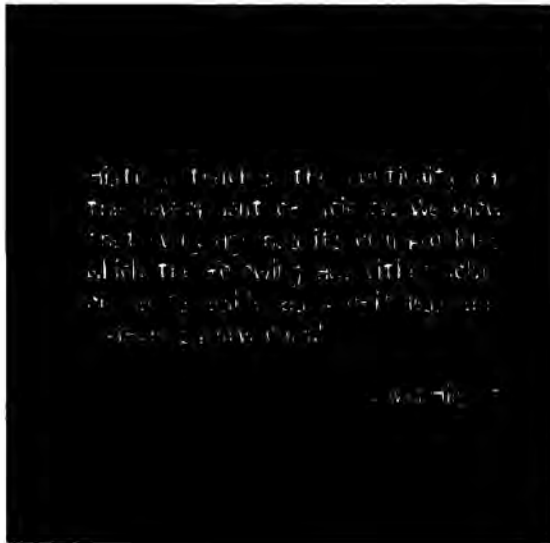
بهردم هیلبیرت و دهسته‌که‌ی، چونکه کاره‌که‌ی گودیل، جیهان بینینی نیمه‌ی سه‌بارت به تیوری به‌لگه‌نه‌ویستی ته‌واو گۆری. هر بۆیه تا هه‌نووک‌ه‌ش چهندین کیشی بیرکاری هه‌ن که هر به چاره‌سه‌رنه‌کراوی ماوه‌ته‌وه.

کۆرت گودیل؛ له گۆرنه‌ری پیشینییه‌کانی 'ده‌فید هیلبیرت و بیتراند راسل' (ئوسامه‌ تحسین)

'رام وایه مادام کاره‌که‌ی 'گودیل' چاره‌سه‌ری چهندین پرسى به‌کلانه‌کراوه‌ی ماتماتیکى تا هه‌نوکه درێژ‌کرده‌وه، وه بگره‌ هیواى چاره‌سه‌ریشى له هه‌ندیکیان هه‌ر برى، ئه‌وه ده‌بیت دووباره به دلنیا‌یه‌کانمان دا بچینه‌وه له‌وانه‌ی به‌ر له 'گودیل' پێسى گه‌یشتووین... چونکه به‌گه‌شتى تیوری له 'بیرکاری په‌تى' وایه؛ گه‌ر شتیک سه‌لمیندار، ئیتر ده‌رگای مشت و مری له‌سه‌ر داده‌خریت. چى ده‌بیت دووباره له هه‌موو یان له به‌شیکى ئه‌و ده‌رگایانه بده‌ینه‌وه؟ بۆچى 'هیلبیرت' پێسى وابوو جیهان بینینی نیمه بۆ ماتماتیک له سه‌ده‌ی 20م ده‌گۆریت ئه‌گه‌ر هاتوو هه‌ندیک له کیشه‌کانی یه‌کلا‌بکریته‌وه؟ پیشینی 'هیلبیرت' ده‌بیت چى بووبیت؟ ده‌شیت پیشینی 'هیلبیرت' هه‌مووی له پێگه‌ی گه‌شه‌سهندنی سیسته‌میکى به‌لگه‌نه‌ویستی بیت بۆ چاره‌سه‌ری کیشه‌کان، وای پیشینی کرد بوو: که سیسته‌میکى وا پیکه‌وه بنیت (Combine) له به‌لگه‌نه‌ویست، که وه‌ک عه‌سای سحرى، چى ویست پێسى وه‌لام بداته‌وه! مانای قسه‌که‌ی 'هیلبیرت' له گرنگی یه‌کلا‌کردنه‌وه‌ی

پرسهکان نه بووه، به لکو مه بهستی نه و سیستمه بووه که پنی دهگه یین و نه و پرسانه ی پی وه لام دهده یینه وه. له گه ل نه وه ش، بومان هه یه گومان له کاره که ی گودیلش بکه یین⁴² نه و 23 کیشه ی هیلبیرت هه ندیکیان شیکارکراون و هه ندیکی تا نیستا به شیکارنه کراوی ماونه ته وه.

میزوو، پیچکه ی پیشکه وتی (دابیران) زانستمان بو رووشنده کاته وه. وهک ده زانین، که له هه ر قوناخ و چه رخیک، چه ندین کیشه هه ن، نه و کیشانه ش له چه رخی دوا ی خویان یان چاره سه ر ده کریت، یان وهک شتیکی بی به ها به لاهه دهنرین و کیشه ی تازه شویتیان ده گرنه وه (ده یقید هیلبیرت)



بیردۆزی ناسه قامگیری گۆدیل

Gödel's incompleteness theorems

کاره که ی گۆدیل له سالی 1930 سنوریکی پۆلایینی خسته بهردهم بیرکاریزانه کان، که ئه ویش ئه وه بوو: ئیخه ده توانین چیی بزانی و چیی نه زانی. هر ئه وهش بوو خه ونه که ی هیلبیرتی له گۆرنا که به هه مان شیوه ی 'ستیف هۆکینگ' ده یوست رژیمنیک سیسته میک بۆ ماتماتیک بدۆزیته وه و بتوانیت وه لامی هه موو ئه و کیشانه بداته وه که به چاره سه رنه کراوی له به رده مان ماوه ته وه، یاخود ئه و کیشانه ی پرومان تیده که ن، سیسته میک که له کۆمه لیک به لگه نه ویست پیکه اتبیت و وه لامی ورد و درشتی کیشه ماتماتیکیه کان بداته وه. سیسته میک که دژه یه ک له به رامبه ر هیچ مۆدلیک به رامبه ر به هیچ مۆدلیک بۆ هه مان سیسته مه که دروست نه کات، ئه وه بوو گۆدیل هات وتی توانای ئیخه سنوردراوه که زۆر شت هه یه ناتوانین بزانی راسته یان هه له یه، به واتایه کی تر، توانای سه لماندنی هه ندی ده قی ماتماتیکیمان نیه.

دوای کاره که ی گۆدیل، بیرکاریزانان سه رگه رمی ئه وه بوون که ئه و ده قانه ی ناتواندیرت بسه لمیندریت، وه ک به لگه نه ویستیک بۆ سیسته مه که ی زیاد بکه یین، به لام دواتر هه مان کیشه پروبه پرووی سیسته مه که ده بیته وه، دووباره به پنی کاره که ی گۆدیل، توشی چند ده قیک ده بین که دیسانه وه توانای ئه ومان نییه بیانسه لمینین. بۆیه هه زمکردنی ئه وه ی که ده قیک بۆنی راستی لئینیت، به لام سه لماندنیک

نابیت بوی، نسته. بویه کاره که ی گویل تیگه یشتنی زیاتری به نیمه به خشی له نیوان سهلمیندراو و راستی. دواتر هر له م سونگه یه وه، نهی خودی به لگه نه ویسته کان چین؟ که نه مان ده قیکن هر سه ره تاوه ده لین نه مانه خورسک راستن و پیوستیان به سه لماندن نییه. بوچی له سه کومه لیک به لگه نه ویست، سیسته میک یاخود پیناسه یه ک داده مزیت و بگره رهنکه له رینگی چند چه مک و ده قیکی کورت سیسته میکی نیجگار گوره پینکدینن، وهک نمونه ی به لگه نه ویسته کانی توپولوجی.

بو وه لامی نه م جزره پرسیارانه، شتیک له دوره وه چاودیری ههنگاو به ههنگاوی هه موو شتیک دهکات له هر زانستیک، نه ویش "نپستمولولژییه" واتا تیوری زانین. چونکه گه ر له چه مکی هر ده قیکی نیو ماتماتیک وردیینه وه، ده بینین معریفیه ک هیه هه موو چه مکه کان به یه که وه ده به سستیته وه و سه ر و کلکی هه موو پروداوه کانی ناو سیسته مه که له خو ده گریته و دژه یه کی هیچ چه مکی تر نابیت له ناو هه مان سیسته م. "کانت" له هه مبه ر نه م پرسه به رده وام جه خشی له سه ر نه وه ده کرده وه که: "نیمه پیوستمان به ره خنه گرتن له نه قل نییه له بابه تیکی وهک ماتماتیکیش! له به رنه وه ی پرنسپه کان راسته وخو به چاو له نیو حدس وینا ده کرین". بویه خودی سیسته میک یان هیزی سیسته میک، له پرونی و یه کگرتنه وه ی چه مه کانه وه سه رچاوه ده گریته دواتر هه موو چه مکه کان به یه که وه ده بنه بونیادیکی (نه بستراکت) که دواتر کومه لیک تیور پینکدینن.

گهر باس له نمونه یه ک بکه یښ، وهک نه اندازه ی ثقلید، که په کیک له به لگه نه ویسته کانی ثقلید که ده لیت: گهر راسته هیلیکمان هه بییت، له دهره وهی نه م راسته هیله خالیکمان هه یه. لیره چند چه مکیک هه ن وهک راسته هیل، دهره وه، خال. نه سلن راسته هیل چیه؟ دهره وه چیه؟ خال چیه؟ وهک کرداره سه ره تاییه کان له جه بری پوخت، وه یاخود راده تیرم پیناسنه کراوه کان له سیستمی ثقلیدی. دروست بوونی سیستم له خورا و هه رهمه کی نییه. لیره نمونه یه کی ساده ده هیینه وه بق نه وهی له به لگه و سیستم حالی بین: گرممان تو ده ته ویت خانووهک دروست بکه ی، بق نه وهی بتوانی تیدا ئیسه ره هت بکه ییت و خو و خوراکت تیدا نه انجام بدهی. که واته سیستم له هاتنه پیشی گرفتیک دروست ده بییت و ناچارمان دهکات بق چاره سه ری پرسیک بیر له سیستمی نوی بکه ینه وه، وهک چون زور جار له لایه ن زانسته کانی تر به تاییه ت فیزیا، کومه لیک گرفت ناراسته ی ماتماتیک ده کریت. بق دروست کردنی نه و خانووه، له نیو زهینی خو مان وینه ی ده کیشین، پیوستیه کان چین، به واته یه کی تر که ره سه ته کان چین؟ که ره سه ته کانی دروست کردنی نه م خانووه که مه لیک شتن، وهک: بلوک، چیمه نتو، شیش... هتد، به هه مان شیوه ی به لگه نه ویسته کانش که ره سه ته یه کن. بلوک و شیش و چیمه نتو نه م چه مکانه په یوه ندیه ک به یه که وه یان کزده کاته وه نه ویش نامانج له دروست کردنی خانووهک، نا کریت بلین نه م سنی که ره سه ته یه - چه مک بق دروست کردنی ئو تومبلیک به کار بیین! که واته لیره سیستمه که سنوردار ده بییت، به هه مان شیوه ش له سیستمی ماتماتیک ناتواند ریت بق هه موو

پرسیک بیر له سیسته میکی تاقانه بکهینهوه. که واته به کورتی: پرونی و په یوهندی چه مکه کان له نیو سیسته میک، گرنگیه کی زوری هیه. نه مانه هه مووی ده کزیت بلین مه عریفه یه که له به ستنه وه و تیکه لکیشی چه مکه کان و یه کگرتنه وه یان له شروق هه کردنی دۆخیک یان دیارده یه که، چونکه گرنگترین تایبه تمه ندی هزری زانستی، بریتیه له وردی دارشتنی چه مکه کان و به گشتی کردنیان و کارپیکردنیان به شیوه یه کی بابه تییانه. که واته له هه مبه ر نه و باسه، کاره که ی گۆدیل چیی بوو که پروژه و کاره هه ره گه وره که ی راسل و واتیه د و هلیبرت ی له گۆرنا؟ به هه مان شیوه نه ویش به نمونه یه که: گه ر بۆ سیسته میک سنی مؤدل مان (نمونه) هه بیت و هه رسن مؤدل پاسه دانی هه موو به لگه نه ویسته کانی سیسته مه که بکات به بی هیچ گرفتیک، نه وه نه و سیسته مه نا ته واوییه کی هه ر تیدایه و بی که م و کوپی نییه، به واتایه کی تر، ناسه قامگیره. نه م که م و کورتیانه توانای خو لی لادانیان تیندا نییه! بۆ نمونه له چه بردا بابه تیک هه یه به ناوی مه میدان (Field)، که چند به لگه نه ویستیک ده گریته خو، نه و کۆمه لانه ی ده بته فیلد وه که: کۆمه له ی ژماره راستیه کان، ریژه بییه کان و ناویته کان، نه مانه سنی مؤدلن بۆ نه و سیسته مه که پاسه دانی هه موو به لگه نه ویسته کانی سیسته مه که ده کن، به لام له ناو خودی مؤدله که، شتانیک هه ن راستن، به لام له مؤدله کانی تر راست نین، له کاتیک هه رسی مؤدل ده چنه ژیر ناوی سیسته مه که، وه که: $a \times a = 2$ ، دیاره نه مه له کۆمه له ی ژماره راستیه کان راسته، به لام له کۆمه له ی ژماره نا ریژه بییه کان راست نییه! که واته سیسته مه که لیسه گرفتیک ی تیکه وت،

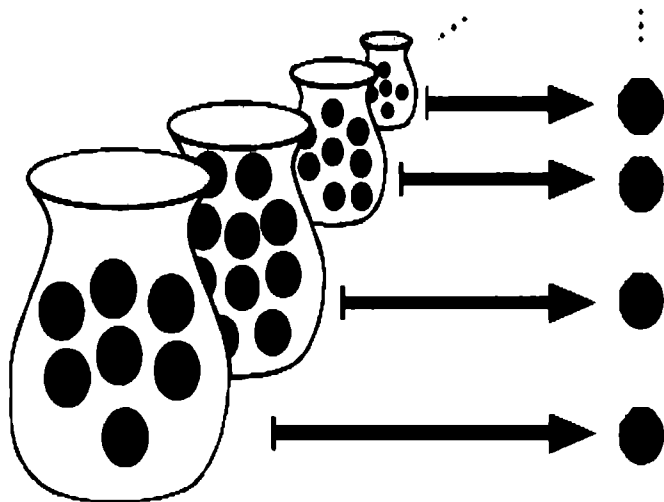
بهمهش به دهرده که ویت هم سیستمه ناتواوه. هر نهمهش بوو دوی نزیکی 20 سالیک شو بیروباوه په بیوه قسه یه کی باو له نیو په رتوکه کان که گوايه 'بق هموو راستیه ک ده تواندری سیستمیک دروست بگریت' به هه له خرایه وه. بویه راستی و دلنیایی له ماتماتیک له چوارچنویه کدایه، له دهره وهی شو چوارچنویه، چندین هرهس هن بق سیستمه که.⁴³

⁴³ هم کوتاره له نویسی خومه و له بلوگی بیرکاری بق کورد بلاوگراوه ته وه.

به لگنه ویستی بژارده

The axiom of choice

به لگنه ویستی بژارده، ریسیایه کی سه ره کییه له تیوری کومه له کان، که تیدا وهک به لگنه ویستی سهرده کریت بسوقه راهه مهینان و دروستکردنی په یوه نندییه که له نیوان کومه له کان. به لگنه ویسته که به م شیوه: وادانی ناکوتا له کومه له مان هه یه، وه هر کومه له یه که به لایه نی که م زیاتر له دانه یه کی تیدایه، نه وه مومکینه که ناکوتا له یه که به دوا ی یه که دستنیشان بکه یین و دروست بکه یین به وه رگرتنی هر دانه یه که له هر کومه له یه که. نه مهش رهنگه توزینک نالوزیکانه دهر بکه ویت، به لام نه مه ریسیایه که و پینگه به شتیکی له و شیوه ی ددات. له مه وهش چندین بیردوز سه رئاو که وت.



تیوری نه‌گەر

Probability theory

تیوری نه‌گەر، یه‌کینکه له لقه‌کانی بیرکاری، که تیدا مامه‌له له‌گه‌ل پیش‌بینی ده‌کات و به‌دوای ده‌رئه‌نجامه‌کان ده‌گه‌ریت و نه‌گه‌ری روودانی رووداوینک ده‌رده‌خات به‌په‌ژه‌یه‌ک. بابته‌ی نه‌گەر یه‌کینکه له‌و بابته‌نهی که تیدا پشتی به‌تیوری کۆمه‌له‌کان به‌ستووه، واته‌ تیوری کۆمه‌له‌کان خه‌ت و خالی تیوری نه‌گه‌ری داپه‌شتووه. له‌هه‌مان کاتدا له‌ ناو‌خویدا بریتییه‌ له‌ تیوریک‌ی نوێ و سه‌ربه‌خۆ. له‌سه‌ده‌ی حه‌فده‌هه‌می زاینی، زاناکان توانیان زانستی ئامار گه‌شه‌په‌یدهن و زانیاری نوێ بده‌ن به‌ده‌سته‌وه، که له‌م پیش‌که‌وتنه‌ش، زانستی نه‌گەر سه‌رئاو‌که‌وت.⁴⁴ بابته‌ی نه‌گەر مامه‌له له‌گه‌ل هه‌موو نه‌نجامه‌ مومکینه‌کانی دیارده‌یه‌ک ده‌کات. نمونه: هه‌لدانی دیناریکی ئاسن (شیر و خه‌ت) سی‌جار به‌دوای یه‌ک. پیش‌هه‌موو شتیک ئیمه‌ ده‌توانین کۆمه‌له‌ی هه‌موو ئه‌و نه‌نجامه‌نی چاره‌روان ده‌کریته‌ رووبدات له‌ هه‌لدانی ئه‌و دیناره‌ بۆ سی‌جار، هه‌یما- په‌رمز بۆ دابنن و، بیانگۆرین بۆ هه‌یما. بۆ شیر ده‌توانین پیتی H دابنن و بۆ خه‌ت T دابنن. که ئیمه‌ سی‌جار ئه‌و دیناره‌ هه‌لده‌ده‌ین، ئه‌وه 8 نه‌گه‌رمان هه‌یه 2^3 ، لیره 2 بنچینه‌یه، چونکه دینار 2 رووی هه‌یه، به‌ توانی 3، چونکه 3 جار هه‌لدان-فریسی ده‌ده‌ین، که نه‌گه‌ره‌کان ئه‌مانه‌ن:

⁴⁴ په‌رتوکی: ئامارزانی. د. دلشاد شاکر ئیسماعیل بو‌تانی. به‌شی ئامار-کۆلیژی به‌ریوه‌بردن و ئابووری-زانکۆی سه‌لاح‌دین. چاپخانه‌ی روکسانا-هه‌ولێر، 2015.

{TTT.TTH.THH.THT.HTT.HTH.HHT.HHH}

بئ گومان ده بیئت یه کیک له م نه گرانه رووبدات، که نه گری هر هه موویان به یه که وه ده بیئت بکاته 1، وه نه گری روودانی هر یه که یان ده کاته $\frac{1}{8}$ ، به لام نه گری روونه دانی هیچ یه که له مانه، سفره! لیسه ده توانین پرسایاری زیاتر دروست بکین، وه که نه گری نه وه چنده که له و 3 هه لدانه 2 خه تی T تیدا بیئت؟ نه گری سه یری کومه له ی ده رنه نامه کان بکین، ده بیئین که له 3 باردا، له هه لدانه کان ده کریت دوو T تیدا بیئت، نه وانیش: TTT.TTH.THH. واته نه گری نه وه ی له و سی هه لدانه دوو جار خهت ده رکه و بیئت، ده کاته: $\frac{3}{8}$. چن دین پرسایاری تر ده توانین دروست بکین.



کۆمهله توانستیهکان

Power sets

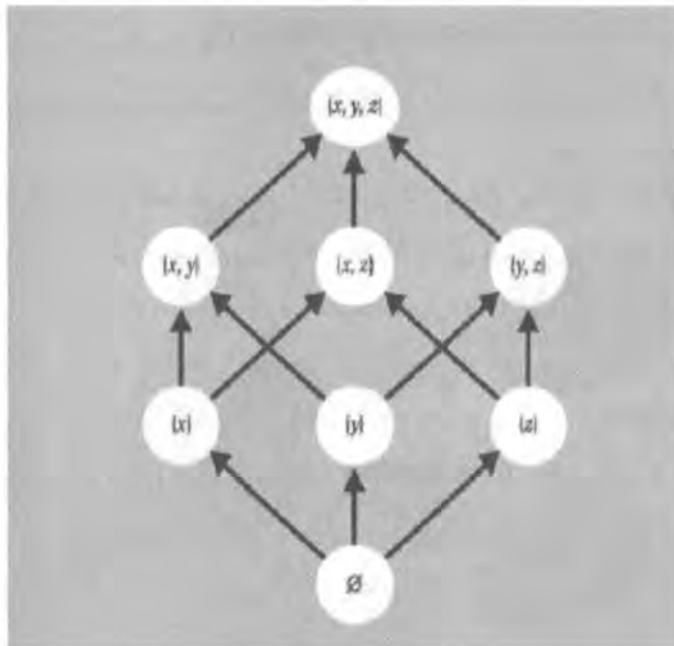
کۆمهلهی توانستی، بۆ کۆمهلهیهکی وهک S ، بریتییه له هه موو بنه کۆمهلهکانی S و تهناتهت کۆمهلهکه S خوشیی لهگهه کۆمهلهی بهتال- ϕ هه مووی بهیهکهوه. بۆنمونه: ئەگەر کۆمهلهی S مان هه بیته: $S = \{0,1\}$ تهنیا دوو دانهی تیدا بیته، ئەوه ئەگەر بیته و کۆمهله توانستی ئەو کۆمهلهیه بدۆزینهوه، ئەوه دهکاته:

$$P(S) = \{ \phi, S, \{0\}, \{1\} \}$$

بیرکاریزانی ئەلمانی 'جۆن کانتۆر' له پرێگهی بهکارهینانی توانستی کۆمهلهکان، توانی پیشانی بدات که ناکوتا پۆلی جیاوازی ناکوتامان ههیه، ئەمهش مشت و مریک بوو هاوشیوهی پارادوکسی سهرتاشهکه. ئەو مشت و مریهی کانتۆر، ئەوهی دهرخست که دوو جۆر له کۆمهلهی ناکوتامان ههیه، ئەوانیش: کۆمهلهی ناکوتای ژمیردراو (Countable) و کۆمهلهی ناکوتای نهژمیردراو (Uncountable)، کۆمهلهی ناکوتای نهژمیردراو واته هیچ پچرانیکیی تیدانیه، وهک کۆمهلهی ژماره راستیهکان. جۆن کانتۆریش له پرێگهی ئەم بیردۆزهوه، پیشانی دا که

توانستی کۆمهلهیهکی ناکوتا، زۆر گهوره تره له خودی کۆمهلهکه! وهک لهو نمونه سهروهه دهبینین، که توانستی کۆمهلهی S دانهکانی زیاتره له دانهکانی ناو کۆمهلهی S .

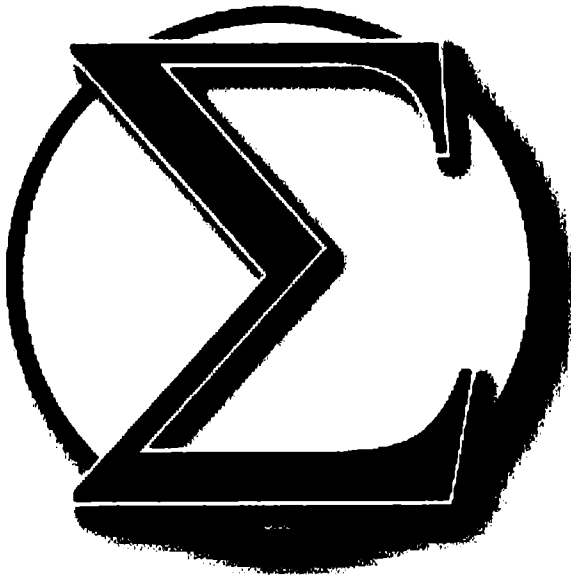
هر بۆیه ژماره ی دانهکانی $P(S)$ هه میسه گهوره تره له ژماره ی دانهکانی کۆمهلهی S خۆی. توانستی کۆمهلهکان، له "تۆپۆلوجی" که لقیکی بیرکارییه، گرنگیهکی زۆری ههیه، به جۆری، کۆمهله ی توانستی له سه ر ئاهووته (Space) تۆپۆلوجیهکان به میزترین تۆپۆلوجیه، که له بابتهکانی دواتر باسی لیه ده کړیت.



به شی سنیه م

زنجیره و یه کبه دوای یه ک

Seqenes and series



ناساندنی په کبه دواى په که کان

Introducing squenes

په کبه دواى په کی (sequence) بیرکاری⁴⁵ بریتیه له خسته په ک (List) ژماره، که تیدا ژماره کان ریزکراون به شیوه په کی ریک، وه ک کومه له کان. به لام جیاوازی نیوان کومه له کان و په کبه دواى په که کان له دوو خال دایه، نه وانیش: هموو په کبه دواى په که کان کومه له ن، به لام پنجه وانه که ی راست نیه. هموو په کبه دواى په که کان ریزکراون و ریکن، به لام کومه له مرج نیه وایت، چونکه له په کبه دواى په که کان، یاسایه ک هیه که تاییه ته و دانه کانی ناو خسته که به شیوه په کی جوان ریزده کات و بهرهم دینیت.

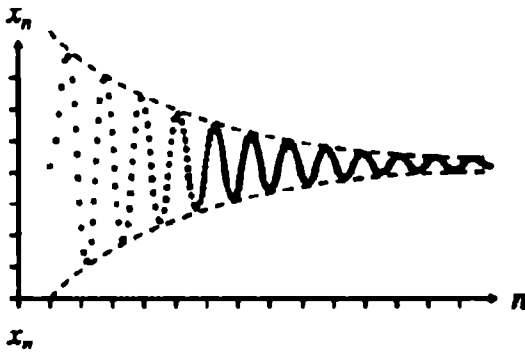
په کبه دواى په که کان کومه له په کی ناکوتان، نه م وه سفش ب هه موو په کبه دواى په که کان راسته، به لام ب کومه له کان مرج نیه راست بیت. ساده ترین نمونه له په کبه دواى په که کان، بریتیه له کومه له ی ژماره سروشتیه کان، وه ک: $1, 2, 3, \dots$ که راده کان ب ناکوتا دریزده بنه وه (Infinite sequence) به بی کوتایی هاتن، وه ک: په کبه دواى په کی فیبوناچی، که له به شی په که م باسمان کرد.

⁴⁵ خوی به وردی پیناسه که به م شیوه په: په کبه دواى په ک، بریتیه له نه خسه په ک، که بواره کی: کومه له ی ژماره سروشتیه کان، مه واکه ی ژماره راستیه کان.

ئو دوو نمونهی باسماں کرد، به زیادبوونی رادهکان، ژمارهکان گهوره و گهورهتر دهبن، بۆیه بهم جوړه یه کبه دواى یه کانه دهلین: یه کبه دواى یه کى لیک-دوورکه توو (Diverge)، ئه گه وانه بوو، ئوه پى دهوتریت: یه کبه دواى یه کى لیکنزیکبوو (Converge) کاتى نرخی رادهکان له ناکو تا نیک دهکینه وه. له یه کبه دواى یه کدا، له نیتوان رادهکان هیچ کرداریکمان نییه، وهک: کو، کهم و جارن، تهنیا به فاریزه رادهکان لیک جیاده کینه وه. نمونه یه ک بۆ یه کبه دواى یه ک و چۆنییه تی نووسینی:

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$



نمونهی یه کبه دواى یه کى لیکنزیکبوو، وهک ئو وینه پوونکردنه وه یه سهره وه.

ناساندنی زنجیره

Introducing series

زنجیره‌ی (Series) بیرکاریانە، بریتییە له دەستەواژەبەک که مەبەست له کۆکردنەوه‌ی پاده‌کانە به پشت بەستن به یەکبەدوای یەکی ژمارەکان. له یەکبەدوای یەک، له نێوان پاده‌کان هیچ کرداریکی که م و کۆمان نەبوو، بەلام له زنجیره، له نێوان پاده‌کان، کرداری کۆکردنەوه یان که‌مکردنەوه، وه‌یانی‌ش هەردووکیان هەیه، به‌گشتی زنجیره بریتییە له کۆکردنەوه‌ی هەموو پاده‌کان به‌یه‌که‌وه. له‌بەر ئه‌وه‌ی وت‌مان کۆکردنەوه‌ی پاده‌کانە، بۆ ئەمەش هینمای 'سیگما' \sum هینمایه‌که بۆ زنجیره، ئەم هینمای‌ش هینمایه‌کی 'گریکییه' که تیندا خالی دەستپینکی زنجیره‌که و خالی کۆتایی پيشان دەدات، له هەمان کاتدا، شێوه‌ی گشتی دانه‌کانی یەکبەدوای یەکه‌که‌ش (Index) ده‌گریتە خۆی و، سنوره‌کانی زنجیره‌که‌ش، به‌م شێوه:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$$

له زۆر باردا کۆکردنەوه‌که بۆ ناکۆتا پاده (Term) ده‌روات، یانی‌ش له هەندێ باردا، بۆ کۆتادار کۆکردنەوه‌که ده‌روات. وه‌ک: کۆی 100 ژماره‌ی سه‌ره‌تای کۆمه‌له‌ی ژماره سروشتیه‌کان. لی‌ره سنورمان بۆ دانا وت‌مان 100 ژماره‌ی سه‌ره‌تا، ده‌شکریت هیچ سنورینکی نه‌بیت و بۆ

ناکوټا بیت. بهم جوړه زنجیره یهش ده لاین: کۆکردنه وه یه کی به شی-
ههنده کی (Partial sum)، واته له زنجیره گوره که به شیکه وهرده گرین
و نهجامی کۆکردنه وه که ی ده دۆزینه وه، وهک نه و نمونه ی خواره وه:

$$\sum_{i=0}^{100} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = 5050$$

سوودی زنجیره کان زور جار به کار دیت بۆ هه ژمار کردنی تیچووی
شیتیک، وهک: تیچووی دروست کردنی باله خانه یه، که چون تیچووی
دروست کردنی نهومی یه که م و نهومی دووهم جیاوازه، نه وه به هوی
زنجیره وه ده کریت تیچووه که ی بخریته روو.

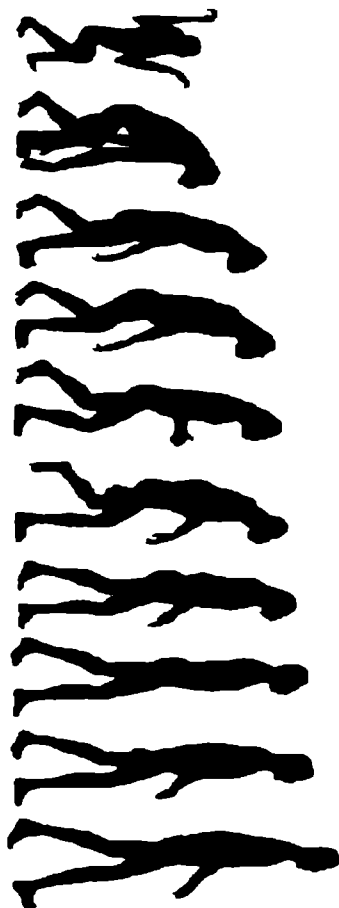
$$\begin{aligned}
 S_n &= 1 + 2 + 3 + \dots + n \\
 S_n &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\
 \hline
 S_n &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \\
 S_n &= \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

ئامانجهکان

Limits

ئامانجی یه کبه دواى یه که ناکوتاگان یان زنجیره ناکوتاگان، بریتیه له ژماره یه ک-نه گور نه گور هاتوو ئامانجه که بوونی هه بیست. بو دوزینه وهی ئامانجیش، ده بیست ژماره ی راده کان یان کوزکردنه وه کان له ناکوتا نزیك بکه یینه وه. دیاریشه ئامانجی یه کبه دواى یه که که یارمه تیمان ده دات له دوزینه وهی نه جامی زنجیره یه ک به نزیکی، یان له هه ندی باردا، پیمان ده لیت که نه جامی زنجیره یه ک ده کاته چهند. وه رگرتی ئامانج و به کاره یئانی یه کیکه له بابه ته هره سه ره کییه کانی بیرکاری، هه به ئامانج شارستانیه تی گزیک توانیان له نرخى نه گوری پای نزیك بکه ونه وه. له لایه ن "ئیسحاق نیوتن" به هه مان شیوه.

بابه تی ئامانج، به و شیوه ی ئیستا پیشکه وتوو و فراوان نه بوو هه تاکو کۆتاییه کانی سه ده ی نۆزده هه م، له م چه رخه ی کۆتایی، پیشکه وتنی زوری به خوییه وه بینى. بابه تی ئامانج له پشت زۆریک بابه تی بیرکارییه وه یه، یه کیکه له وانه: پرنسپه کانی شیکردنه وه ی بیرکاریانه. ئامانج له زور تیوری گرنگ رۆلی سه ره کی ده بینیت، وه ک: له ته واکاری ریمان، له گه ل نه وه ش ده رگای گه شه سهندنی جیاکاری و ته واکاری بوو (Calculus)، چونکه به هزی ئامانجه وه، داتا شراوه ی نه خشه کان و دوزینه وه ی پووبه ری ژیر چه ماوه یه ک گه شه ی سهند، یانیش تیگه یشتن له هه ندی چه مکی بیرکاری هه ره له ریگه ی ئامانجه وه یه و به کاربه ری زوره.



پارادوکسی زینق

Zeno's paradox

پارادوکسه کانی زینق، چند پارادوکسینک که له لاین زینق خویه وه داهینرا. زینق قوتایی پارمیدس⁴⁶ بو، که خه لکی نیلیا بو، له دوروبه ری 489 پیش زاین ژیاوه. له راستیدا زینق نهو پارادوکسه کانی بز بهرگری له ماموستا که ی هینایه کایه وه، بهو چند پارادوکسه، دژی نیارانی ماموستا که ی وه ستایه وه. پارادوکسه کانی زینق به روخسار؛ شیتانه دهرده که ویت، به لام له ناوه روکدا بهو شیوه ساده و ساکار نییه، بگره تا نه مرزوش نهو پارادوکسه کانی جیگای مشت و مری زوریک له زانایان و فیه سووفانه، چونکه پارادوکس به بیرکردنه وه لیتی، دهرگای چندین پرسیار تر ده کاته وه. پارادوکسه کانی زینق بهرگری کردن بو له بیروبو چونیک، نهویش دهرباره ی جووله. پارامیدس؛ نه بوونی جووله ی ره تده کرده وه، که پیسی وا بوو جووله شتیکی وه همییه. ژماره ی پارادوکسه کانی زینق زورن، به کیک له وانه بریتییه له: راکردنی نیوان

⁴⁶ مهسه له ی ماهییه تی ژماره یی گه ردون، وه ک بنه مایه کی مهزه بی فیساکورسی، روبه روی گرفتیکی جدی بووه، نهویش ته ه دای نیلیا به کان بوو. قوتابخانه ی نیلیایی زیاتر مه یلی توژیینه وه ی فله سه فیان هه بو وه ک له ماتماتیکی. پنده چیت دامه زرینه رانی شه قوتابخانه یه له بناواندا فیساکورسی بووین. ئوستادی هه ره مه زنیان پارمندیسی نیلیایی بو، که له سالی 450 ی پز له دایکوه. مهزه بی بنچینه یی نیلیا به کان بریتی بوو له به کیتی و نه به دییه تی بوون. نه مهش له گه ل چه مکی فیساکورسیدا نه ده گونجا و دژ به به کتر ده وهستن، چونکه فیساکورسه کان نیمانیان به فره گه رای و گزبان هه بوو. (شیرکو رهشید قادر)

کیسه لیک و کهرویشکیک له مهودایه کی دوو میلی. کهرویشکه که پیسی وایه خیرایه، بویه ریگه به کیسه له که ده دات زووتر ده ست به رویشتن بکات، واته تهرسی ده داتی، کیسه له که ش وهک بوونه وه ریکی فهلسه فی و زیره که، دواى برینی ئه و مهودایه ی که کیسه له که هین دا، بۆخوی لیس داده نیشته و له رویشتن ده وه ستیت، ده لیت: کهرویشکه که هرگیز ناتوانیت به پشتم بداته وه.

بیرۆکه که لیره ئه مهیه: بۆ ئه وه ی ئه و دوو میله بیری، پیوسته نیوه ی $\frac{1}{2}$ بیری، بۆ ئه وه ی نیوه ی بیری، پیوسته $\frac{1}{4}$ بیری، بۆ ئه وه ی $\frac{1}{4}$ بیری، پیوسته $\frac{1}{8}$ بیری... ئیتر به م شیوه کیسه له که ده لیت: کهرویشکه که هرگیز ناگاته وه به من، ته ناته ههرگیز ناگات به هیللی کوتایی مهیدانی راگردنه که.



یه کبه دواى یه کی فیوناچی

The Fibonacci sequence

یه کبه دواى یه کی فیوناچی، بریتیه له کلیشه یه کی ساده و سه رنج پراکیش. نو یه کبه دواى یه که له نه جامی دوو ژماره ی ههنگاوی پیشتر، ژماره ی سیییم بهرهم دینیت. فیوناچی ناوی بیرکاریزانکی ئیتالیه که نم یه کبه دواى یه کی دوزیه تهوه له سالهکانی (1201)، نم یه کبه دواى یه کهش له زور بابته بیرکاری خوی ده بینتهوه، تنانهت له فیزیا و سروشتیش نم شته بوونی. له پروی بیرکارییهوه، یه کبه دواى یه که که بهم شیوه ی پیناس ده کریت:

$$Fn_{+1} = Fn + Fn_{-1} \quad (F_0 = 0 \text{ له کهل و } F_1 = 1)$$

ئوه ی له یه کبه دواى یه که دهستان ده که ویت:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

له زینده وه زانی نم ژمارانه ی فیوناچی له چند پروه کینک ده بینردین، له وانه: گولی گوله بهرۆژه، یان له زاویسی هه ندیک ئاژه ل.

یه کبه دواى یه کی فیبوناچی کرنکی هه یه له بابه تگه لیکى بیرکاری یانه، وهک
ئالگوریتمی ثقلید، سیکوشه ی پاسکال و تنانهت په یوه ندی به ریژه ی
زیرین (Golden ratio) هه یه.



یه کبه دواى یه که لیکنزیکبووه کان

Convergent sequences

به راده کانی یه کبه دواى یه کیک ده لاین: نزیکبووه (Convergent) ته گهر هاتوو به زیاتر وه رگرتسی راده یه کبه دواى یه که که، نه وه له نرخیک-ژمارهک نزیکبیتته وه، یان له سنوریک. نه و نزیکبوونه وه یه ش ته کنیکی پیوسته، واته به چ میتودیک نیمه ده گه یین به و نرخه، که راده کانی یه کبه دواى یه که که لیتی نزیک ده که ویتته وه؟ بو نمونه: گه یشتن به نرخى نه گزپی پای له ریگه ی یه کبه دواى یه که وه ده کریست. کاتیک یه کبه دواى یه که که نزیک و نزیکتر ده بیتته وه له نرخیک، نه وه ده توانین بلین نه مه نرخى نه گزپی پایه. بو نه مه به سته ش، تا بزاین یه کبه دواى یه کیک لیکنزیکبووه یان نا، نه وه له ریگای پیناسه ی لیکنزیکبووه به چنه د هنگاو یک ده توانین ده ریبخه یین که لیکنزیک بووه یان لیکدور که وتوو. جوزیک له یه کبه دواى یه کمان هه یه پنی ده لاین: یه کبه دواى یه کی کوشی⁴⁷ (Cauchy)، له یه کبه دواى یه که، جیساوازی نیوان هر دو راده کی یه کبه دواى یه که که زور زور بچوکه. بو نمونه نه مه یه کبه دواى یه که یه خواره وه لیکنزیکبووه:

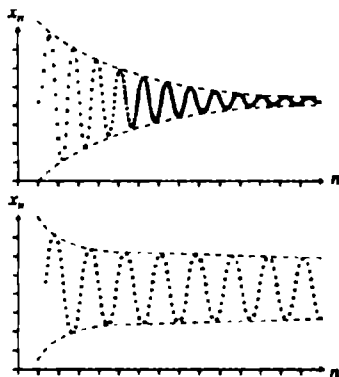
⁴⁷ "توگوستین-لوی کوشی" خه لکی فهره نسا بوو. یه کیک بوو له و بیرکاریزانانه ی که بردی بناغی شیکردنه وه ی بیرکاریبانه ی دانا و له چنه دین لقی بیرکاری پیشه نگ بووه. له بیرکاری چنه د شتیک به ناوی نه وه وه نراوه، وه که: یه کبه دواى یه کی کوشی، نه خشه ی کوشی، ریسای ته واکاری کوشی، ریزکراوه ی کوشی، ژماره ی کوشی... کوشی زیاتر له هر بیرکاریزانیکى تر، ده سته که وته بیرکاریبانه کانی به ناوه وه نراوه.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots, 0$$

لیتره به شیوه یه کی نزیکاره یی دهگین به سفر، نهک به شیوه یه کی تهواو. نهگه سهر بکهین هتا راده ی زیاتر وهگرین، نهوه ژیره ی کهرتهکان گورهتر ده بیت و سه ره ی کهرتهکش همیشه بریتیه له 1.

یه کتیک له رینگه هره سه ره تاییهکان بز زانینی نهوه ی یه کبه دوا ی یه کتیک لیکنزیکبووه یان نا، نهوه نامانجی بز وهرده گرین به م شیوه:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \approx 0$$



نهم ویننه یه دوو یه کبه دوا ی یه ک نیشان دهات، نهوه ی سه ره وه لیکنزیکبووه، نهوه ی ژیر نهو، یه کبه دوا ی یه کتیک لیکدوره که وتووه.

زنجیره ی لیکنزیبووه

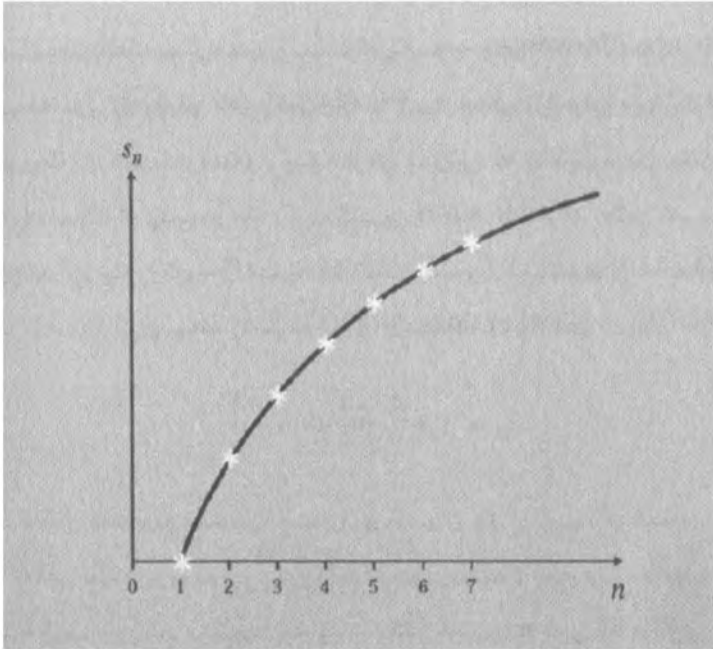
Convergent series

زنجیره یه ک پئی دهوتریت: لیکنزیکبووه (Converge) نهگه هاتوو کوی هه موو راده کانی نهو زنجیره یه له ژماره یه کی (ژانراو) دیاریکراو یان سنوریک نزیک بکه ویته وه. بۆ نهوه ی بزانی که زنجیره یه ک لیکنزیبووه، نهوه به شیک له زنجیره که وهرده گرین (Partial sum)، نهگه نهو به شه لیکنزیکبووه بوو، نهوه زنجیره کهش لیکنزیکبووه. مه به ستیش له به شیک له زنجیره که واته کوی چند راده یه ک (Sum of finite terms):

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

نهگه سه رنج بدهین جیاوازی نیوان s_n و s_{n+1} دهکاته: $\frac{1}{n+1}$. واته نهگه سهیری دوو راده یه یه کبه دوای یه که که بکه یین، ده بینین که تنیا ژیره زیاد دهکات به 'یه ک' یه که. کاتییک n نر خه که ی زور گه و ره ده بییت، نهوه نهو راده یه $\frac{1}{n+1}$ زور بچوک ده بیسته وه، نه مهش به سه بۆ نهوه ی بلین نهو زنجیره یه لیکنزیکبووه⁴⁸. نهو زنجیره ی سه ره وه به زنجیره ی هارمونی ناسراوه.

⁴⁸ مه به ست له لیکنزیکبووه نهوه یه که نه جانی کوی هه موو راده کان نهکاته ناکوتا، به لکو بکاته ژماره یه ک، ژماره کهش ژماره یه کی راستی بیت (Real numbers).



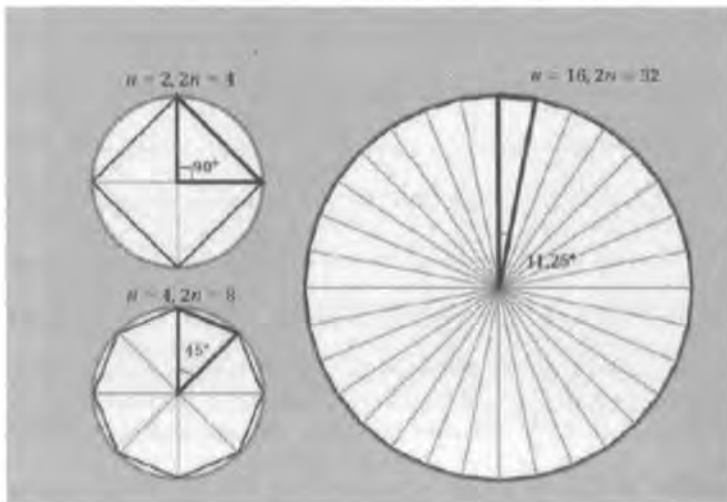
وینہی زنجیرہی ہارمونی.

خه ملاندنی نه گوری پای

Estimating π

چهندين ريگاو شيواز هه ن بؤ خه ملاندنی نه گوری پای، يه کيک له م ريگانه، به هؤی يه کبه دواي يه که وه ده کريت، واته له وه نه گوره نزيک ده بينه وه. نه گهر سه ريک له رابردوو بدهينه وه بهر له سه دهی ستيه می پيش زاین، نه وه ده بينين که بيرکاري زانه گريکه کان وهک نه رخه ميدز له سيرا کوز يه کبه دواي يه کی به کارهينا وه بؤ دوزينه وهی نرخی نه گوری پای. نه گهر سه رنجی بازنه يه ک بدهين و نيوه تيره ی نه و بازنه يه 1 بيت (Unit circle)، نه وه به دلنيایي چيوه ی بازنه که ده کاته 2π . پاشان به کيشانی ژماره يه ک چهن دلا له ناو بازنه که، سه ره تا به کيشانی چوارلايه ک ده ست پی بکه ين وهک له م شيوه ی تهنيشت پيشان دراوه، نه وه هر پارچه يه ک ده توانين وهک سيگوشه يه ک سه ير بکه ين. ئيمه ده زانين که ده وريکی بازنه ده کات 360 پله، نه گهر N لامان کيشايت له ناو بازنه که، نه وه گوشه ی هر يه که يان ده کاته: $\theta = \frac{360}{n}$. وتمان نيوه تيره ی بازنه که ده کاته 1، واته دريژی دوولای هره يه ک له سيگوشه کان هر ده کاته 1، له م باره گوشه ی هر يه که يان ده کاته $\frac{\theta}{2}$ ، به به کارهينانی نه خشه سيگوشه يه کان (Trigonometric functions)، ده توانين لاکانی تري سيگوشه کان هه ژمار بکن، پاشان ده گه ين به چيوه ی چهن دلايه کان.

بسی گومان نه‌خه میدز نه‌گه‌بشت به نرخیکی وه‌ها زور نزیک له و
نرخه‌ی ئیستا، بویه‌ئو وه‌ستا n لای زیاد کرد. دواتر ئیسحاق نیوتن له
موده‌تینکی زور توانی هه‌ژماری ئه‌و نرخه بکاته بۆ 15 ره‌نووس دوا‌ی
فاریزه.



بیرۆکه‌که ئه‌وه‌یه: چینه‌وی چهن‌دلایه‌که ده‌کاته چینه‌وی بازنه‌که کاتینک
ژماره‌ لایه‌کان بۆ ناکوتا نزیک ده‌که‌ینه‌وه.

خهملاندنی e Estimating e

نهگۆپی e به ژماره‌ی ئۆیله‌ریش ناسراوه، که ژماره‌یه‌کی نارێژه‌یه، په‌یدا بوونیشی له‌ ڕێگه‌ی گه‌شه‌سهندنیکه‌ی یه‌کبه‌دوای یه‌کی بووه، که هه‌ر له‌ ڕێگه‌ی یه‌کبه‌دوای یه‌که‌وه‌ خه‌ملاندنی بۆ ده‌کریت. هۆکاری په‌یدا بوونی ئەم ژماره‌یه‌ش ده‌گه‌رێته‌وه‌ بۆ گه‌شه‌ و قازانج و زیان-زه‌ره‌ر. ئەم نه‌گۆره‌ له‌ لایه‌ن جاکۆب بېرنۆلی (Jacob Bernoulli) له‌ کۆتاییه‌کانی سه‌ده‌ی حه‌فده‌هه‌م تیشکی خرایه‌ سه‌ر. به‌ بیرکاریانه‌ به‌و شیوه‌ ده‌نووسریت:

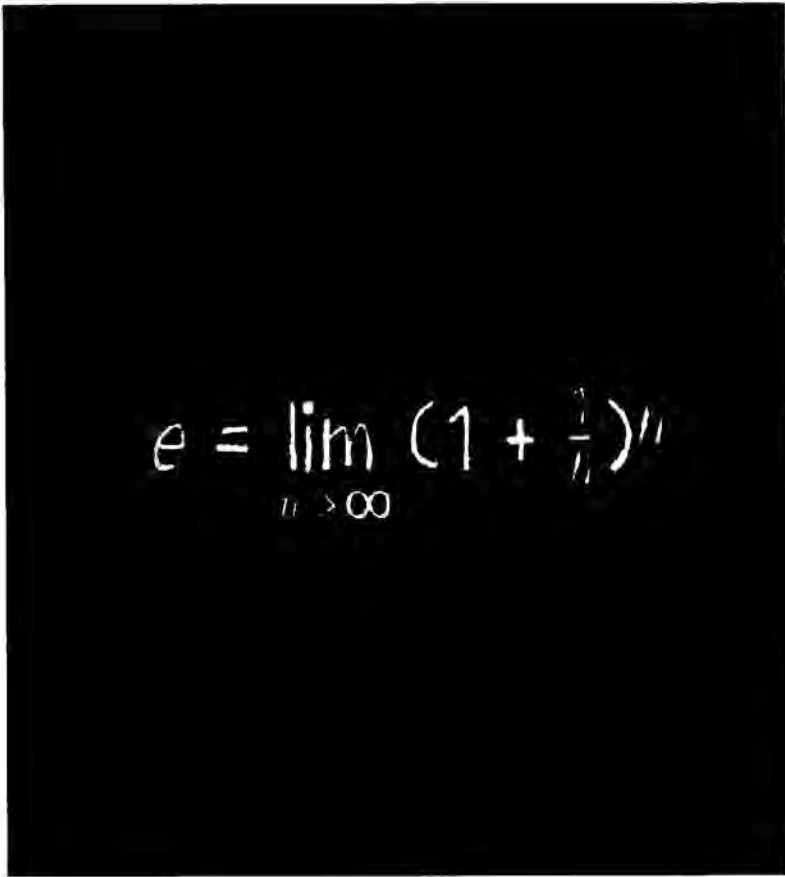
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

مه‌به‌ست له‌م ژماره‌ چیه‌؟ وادانی دیناریکت هه‌یه، ئەو دیناره‌ له‌ یه‌ک پوژ دیناریک قازانج ده‌کات. که‌واته‌ خۆت دیناریکت هه‌بوو، له‌ یه‌ک پوژ دیناریکی قازانج ده‌که‌ی، که‌واته‌ له‌ ئیواره‌ دوو دینارت پسی ده‌بیت. ئەوجاره‌، وا دانی ئەو دیناره‌ تا نیوه‌پوژ نیوه‌ی خۆی قازانج ده‌کات، ئیستا، تا نیوه‌پوژ 'نیو دینار' قازانج ده‌که‌ین، وه‌ دیناره‌که‌ی خۆشمان وه‌ک خۆی ده‌میتێته‌وه‌، که‌واته‌ له‌ نیوه‌پوژ 'دینار و نیوکت' پێیه، ئەو دینار و نیوه‌ له‌دوای نیوه‌پوژ، تا ئیواره‌، دیسانه‌وه‌ قازانج ده‌کات؛ دیناره‌که‌، نیوه‌ قازانج ده‌کات، نیوه‌که‌ش، نیوه‌ی خۆی قازانج ده‌کات، له‌ ئەنجام دا:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{25} = 2.04$$

ئهمه ئه گهر هاتوو دیناره که له بهیانی و له ئینواره قازانج بکات، واته دوو ههنگاو، ئه گهر بیست ژماره ی ئه وه ههنگاوانه زیاد بکهین بۆ ناکوتیا، ئه وه دهگهینه به های نهگوری e

$$e \approx 2.718$$


$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

دووباره کردنه وه

Iteration

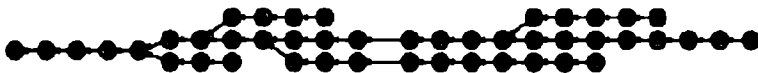
دووباره کردنه وه-تکرار له بیرکاری بریتیه له پرؤسه یه کی چنجاړ دووباره بووه وه. دووبار کردنه وه ههنگاو یک چندين جاړ، به لام له هه ههنگاو یکی نو، نرخیک یان نهجامیکی جیاواز ترمان له ههنگاو ی پیشوو دهست دهک ویت. هه موو شو نهجامانه ی به دهستان دهگات، یه کبه دوا ی یه کیگمان بو دروست دهکن، نامانجیش لیبی به دهست هینانی نرخیکی دیار یکراوه، هه که گه یشتینه شو نرخه، نیتر پرؤسه که دهه ستینین. شو بابه ته له نومریکال (Numerical analysis) پو لیکى بالای هه یه، که تیدا له م ریگایه، دهگه یین به شیکاری زوریک له هاوکیشه کان و کیشه کان، شووانه ی که به وردی شیکاره که یان نازانین، واته له م ریگه یه وه شیکاریکی نزدیک له شیکاری راسته قینه بو هاوکیشه کان و شته کان ده دوزینه وه. دووباره کردنه وه، زمانیکه که کومپیوتری هاوچرخ لیبی تیده گات. شو هی زور گرنکه له و بابه ته، سه ره تا له نرخیکی سه ره تایی (Initial value) دهست به پرؤسه که دهک یین، هه له م نرخه وه په یتا په یتا له نرخى راسته قینه که نزدیک دهک وینه وه، به لام نهسته مه بگه یین به نرخى راسته قینه (بوچی؟)⁴⁹. له راستیدا نه مه ش کاریکی هه را و ناسان نییه، چونکه پیش

⁴⁹ بابه تی شیکردنه وه ی ژماره بیانه که له قوناغی سخی زانکو خویندوومه، یه کیک بو له بابه ته زور به چیژه کان له لام، که (د. په خشان) شو وانیه پییم دا، له هه مانکاتدا مامؤستایه کی هاندهر بوو.

ئهمه ده بیئت بۆ باهتی لیکولنه وه که مان، که رسته مان-رئسا و یاسامان هه بیئت. نمونه یه کی ئاسان له هه مبه ر دووباره کردنه وه: وا دانئیی ژماره یه کی سروشتیمان هه یه x . ئه گه ر ئه و ژماره یه ک تاک بوو، جارانی 3 بکه و 1 بۆ زیاد بکه. ئه گه ر جووت بوو، جارانی 2 بکه. ئه گه ر ئیستا هه مان یاساکه دووباره بکه ینه وه، دیار شه له و پرۆسه یه له کوتایی ده گه ینه وه به 1 گه ر به هه ر نرخیکیی سه ره تایی ده ست پینبکه ین. له سالی 1937 بیرکاریزانی ئه لمانی 'لۆسه ر کلاتز' (Lothar Collatz) کریمانئیی ئه وه ی کرد (conjectured⁵⁰) ئیمه له هه ر ژماره یه ک ده ست پینبکه ین، ئه وه له کوتایی ده گه ینه وه به 1.

نونه: ئه گه ر ژماره 5 وه رگرین. ئیستا 5 تاکه، به پنی ریساکه $16 = 1 + (3 \times 5)$ ، ئیستا 16 جووته، بۆیه به پنی ریساکه دابه شی 2 ده کین ده بیته 8، دیسانه وه 8 جووته، بۆیه دابه شی 2 ده کین ده بیته 4 دیاره 4 یش جووته، بۆیه دووباره دابه شی 2 ده کین ده بیته 2، له به ر ئه وه ی 2 جووته، دیسانه وه دابه شی 2 ده کین ده بیته به 1. ئیستا لیره ده وستین.

پرسیاره که ئه وه یه: بیسه لمینه که ئهمه بۆ هه موو ژماره یه کی سروشتی راسته ؟!



⁵⁰ کونجیکته ر (Conjector) ده قیکه نه سه لمیندراوه نه پوچه لکراوه توه.

یهکبه‌دوای یه‌کی ژمیره‌یی

Arithmetic progressions

یه‌کبه‌دوای یه‌کی ژمیره‌یی، بریتیه له خشته ژماره‌یه‌ک، که به شیوه‌یه‌کی جوان ریزکراون و کلیشه‌یه‌ی تیدایه (Pattern). جیاوازی نیدوان هر دوو ژماره‌یه‌کی یه‌کبه‌دوای یه‌کی خشته‌که، نه‌گۆره (واته ژماره‌یه‌کی دیارکراوه)، وه‌ک چۆن له کۆمه‌له‌ی ژماره سروشتیه‌کان ژماره‌کان یه‌ک یه‌ک زیاد ده‌کات و جیاوازی نیدوان هر دوو ژماره‌یه‌کی یه‌کبه‌دوای یه‌که‌که، ته‌نیا بریتیه له یه‌ک، یان وه‌ک: $0, 13, 26, 39, 52, \dots$ که تیدا جیاوازی راده‌کان نه‌گۆره و ده‌کاته 13. یه‌کبه‌دوای یه‌کی له‌م شیوه تا ناکوتا به‌رده‌وام ده‌بیت. کۆکردنه‌وه‌ی هه‌نده‌کی (Partial sum) له راده‌کانی ئه‌م جۆره یه‌کبه‌دوای یه‌کانه ئاسانه له رینگه‌ی ته‌کنیکه‌وه، له هه‌مان کاتدا سه‌رنج‌راکیشیشه. ئه‌گه‌ر به‌رسین کۆی ئه‌م زنجیره‌یه‌ی خواره‌وه ده‌کاته چهند⁵¹؟

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100 = ?$$

⁵¹ گاوس که بیرکاریزانیک دیار و به‌ناوبانگه له‌هه‌موو کاتیک، له ته‌مه‌نی مندالی مامۆستاکی بۆ ئه‌وه‌ی منداله‌کان به‌شتیکه‌وه سه‌رقال بکات، ده‌لیت: 1 تا 100 بۆ کۆ بکه‌نه‌وه، گاوسی فزول و زیره‌کیش ده‌وای چهند چرکه‌یه‌ک ده‌لیت: ده‌کاته 5050، دیاریشه بۆ مامۆستاکی شتیکی باوه‌رپینه‌کراو بووه که چۆن مندالیک به‌و خیرایه‌ توانی ئه‌مه بکات، ئه‌ویش زله‌یه‌ک له‌بته‌گۆنی گاوس ده‌دات.

ریگایه کی ناسان بو هه ژمارکردنی نهو زنجیرهیه، بریتیه له پیکه وه بهستانی ژمارهکان دوان دوان پیکه وه، نهو دوو ژماره ی که پیکه وه ده یانبه ستینه وه، نه جسامی کوکردنه وه یان یه کسانه، بو نمونه: یه که م ژماره ی زنجیره که که بریتیه له 1 و کورتا ژماره ی زنجیره که که بریتیه له 100 که پیکه وه ده کاته 101، وه دووهم ژماره ی زنجیره که که بریتیه له 2 و دووهم ژماره ی زنجیره که له کوتایی بریتیه له 99، نهو دوو ژماره به یه که وه ده کاته 101، ئیتر به م شیوه، پرسیار: چند جووت لهو ژمارانه مان ده ست ده که ویت؟ وه لامه که ناسانه، له بهر نه وه ی 100 براده مان هیه، دابه شی دوو ده کاته 50 جووت له م ژمارانه، ئه مهش واته: $50 \times 101 = 5050$

وه له مه وهش ده که یه یاسا گشتیه که ی که بریتیه له:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



یه کبه دواى یه کی ئەندازهیی

Geometric progressions

یه کبه دواى یه کی ئەندازهیی، بریتیی له یه کبه دواى یه کییک له خشته یه ک ژماره، که راده کانی ئه و یه کبه دواى یه که، دروست ده بیت به لیک دانی راده کانی به ژماره یه ک، واته ژماره یه ک هه یه (Common ratio) که به شار بووی (Factor) هه موو راده کانه، وه ک:

$$1, 4, 16, 64, 256, \dots$$

کاتیک که ئه و ژماره نه گۆره ی که جارانی هه ر راده یه ک کراوه بو دروست کردنی راده ی پاش خۆی، بریتیی له 4، که ئیمه به 2 هیمای بو ده که یه ن. کۆکردنه وه ی هه نه که ی-به شیک یه کبه دواى یه کی ئەندازه یی به م شیوه یه ده رده بر دیت:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

ئه گه ر ئه م ژماره 2 له یه ک گه و ره تر بوو، ئه وه ئه م زنجیره یه زنجیره یه کی لیک دور که و توه بو ناکۆتای ئه رینی یان ناکۆتای ئه رینی. ئه گه ر ئه م ژماره 2 له یه ک بچو کتر بوو، ئه وه زنجیره که لیک زبیه وه، که به م یاسایه سه رجه می زنجیره که ده دۆزیته وه:

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

یه کبه دواى یه کسى ئەندازه یی گرنگیه کی زوری هه یه له کیشه بیرکاریه کان. په یوه ندى به گه سه سه نده وه هه یه و له زور بووار له ریگه یی ئەم یه کبه دواى یه که وه له گه سه سه نده کان تیده گه یی زوری که له مشیت و مری بیرکاری زانه کان له روانگی ئەم یه کبه دواى یه که ئەندازه بیانه وه به کیشه کان و پارادوکسه کانى زینۆ داده چنه وه.



هه موو یه کبه دواى یه که کان ناتواندریت به هزى ئەندازه وه پیشاندریت، هه شتیکیش کاتیک به هزى ئەندازه وه نیشان دهریت، ئەوه تیگه یشتن لى خوشتر و ئاسانتره. بۆیه له بیرکاری شتیک هه یه پى ده لىن: سه لماندن به بى به کاره یئانى وشه (Proof without words). خزى له راستیدا وینه ته نیا پیگه ی داتاشینی سه لمانده کان پووشنده کاته وه نه ک زیاتر.

زنجیره‌ی هارمونی

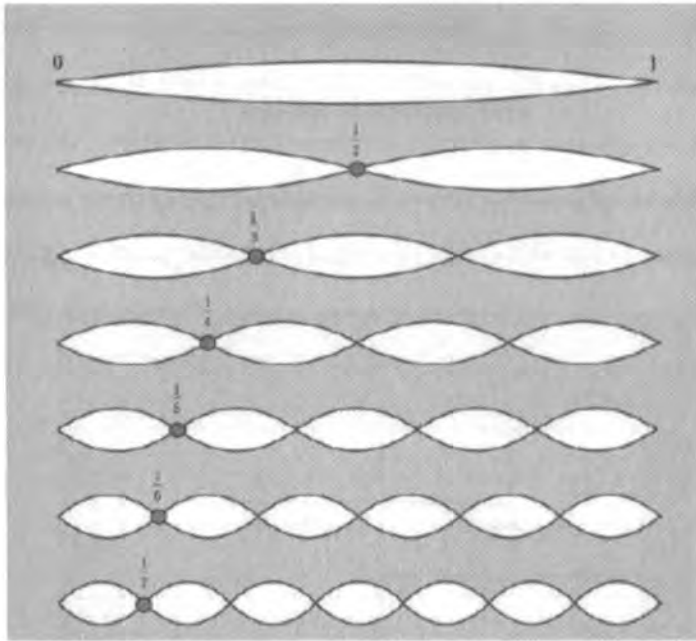
The harmonic series

زنجیره‌ی هارمونی، بریتییە لەو زنجیره‌ی- یەكبه‌دوای یەكانه‌ی كه بێ سنور له كه‌می ده‌دهن (كه‌رتن). ئەم زنجیره‌یه له تیۆری مۆسیقا⁵² كرنگیه‌كى زۆری هه‌یه، ئەم شیۆه‌ی خواره‌وه، نمونه‌یه‌كه:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

ئوه‌ی جیگای سه‌رنجه له‌م زنجیره‌یه یان له‌م یه‌كبه‌دوای یه‌كه، ئوه‌یه هه‌رچه‌ندی راده‌كان بۆ ناكۆتا بپۆن، ئوه‌ زیاتر گرژ و بچوكتر ده‌بنه‌وه به‌ره‌و سفر. له‌م زنجیره‌یه هه‌ر راده‌یه‌ك، به‌ته‌نیا گه‌وره‌تره له‌ كۆی چه‌ند راده‌یه‌كی دوای خۆی، نمونه: $(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})$ گه‌وره‌تره له: $(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8})$.

⁵² زنجیره‌ی هارمونی له شامیری ده‌ف و ژهنینی ده‌ف به‌نا‌راسته‌وخۆ بوونی هه‌یه، كه‌سی ده‌ف ژهن به‌كاری دینیت بۆ دروستکردنی ته‌كنیک له‌كاتی ژهنینی ده‌فه و سۆلۆ.



زنجیره هارمونییه کان له فیزیا گرنگیه کی زور هیه له بابه تی
 شه پۆله کان و بهیه کدا چوونی شه پۆله کان، به م هویه وه تفسیر بۆ چندین
 دیارده دهکریت.

زنجیره و نزیکیی

Series and approximation

هەندیک له ژماره بنچینه ییەکانی-گرنه گەکانی بیرکاری، له پێگەیی زنجیره ناکۆتاکانهوه له دایک دەبن، هەر بۆیه زنجیره کان پێگایه کەن بۆ دۆزینەوهی هەندیک ژماره به نزیکەیی، وهک: پای π یان e و هەندی له لۆگاریتمه سروشتییه کان. له مه و پێش زنجیره ی هارمۆنیمان باس کرد، که به م شیوه بوو: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

ئەگەر بیت و نیشانهی رادهی یه کهم له و زنجیره هارمۆنییهی سه ره وه بکهینه (-)، نیشانهی رادهی دووهم (+)، نیشانهی رادهی سێهه م (-) ، ... ، به م شیوه تا ناکۆتا، ئەوه ئەنجامیکی سه یرمان دهست ده که ویت، ئەویش لۆگاریتمی سروشتی 2 هەر هه مان زنجیره، ئەگەر بیت و ژیره ی که رته کان هه مووی دوو جا بکه ین، ئەوه نرخیکی سه رنجراکیشمان دهست ده که ویت، ئەویش: $\frac{\pi^2}{6}$. له راستیدا توانی ژماره ی که رته کان چەند بیت، ئەوه له ئەنجام پای به و هیزه-توانه مان دهسته ده که ویت. له کۆتایدا، ئەگەر ژیره ی هەر که رتیک، ژماره که بگۆرین بۆ لیک دراوی" ئەو ژماره یه، ئەوه e مان دهسته ده که ویت! لیک دراوی ژماره (Factorial) بۆ نمونه:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots = \ln(2)$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots = e$$

$$1 + \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3} + \dots = 2$$

زنجیره ی توانی

Power series

زنجیره ی توانی، ئه و زنجیره یه که راده گانی هیز-توانیان هیه، توانه کانیس له بهرزبونه وه دان به زیادبوونی هر راده یه ک. زنجیره ی ئه اندازه یی باریکی شازه له زنجیره ی توانی. زنجیره که به و شیوه ده نووسریت کاتیک x گزراوه که مان بیت:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

کاتیک کۆلکه ی هه موو راده کان بریتیه له (یه ک).

زنجیره ی توانی بابه تیکی زور گشتی و گرنگه، که زوریک له نه خشه کان ده تواندریت به شیوه ی ئه م زنجیره یه بنووسریت، ئه مهش پۆلی سه ره کی هیه له چاره سه ری هه ندیک له کیشه گانی بیرکاری، بۆ نمونه ئه و نه خشانه ی ناتوانین راسته وخۆ ته واوکاری یا داتاشراوه یان بۆ بدوزینه وه، ئه وه له پیگه ی زنجیره ی نه خشه که ته واوکارییه که ی یان داتاشراوه که ی هه ژمار ده که یین به شیوه یه کی نزیکه یی. ئه گه ر هاتوو کۆلکه ی هه موو راده کان سفر بوو، ئه وه ده چیته وه بابه تی راده داره کان.

لیره پرسیاریک دروست ده بیت، ئایا زنجیره توانیه کان زنجیره یه کی لیکنزیکبووه؟ به به کارهینانی تیوری یه که به دوای یه کی ئه اندازه ییه کان، ده توانین بلین، ئه گه ر هاتوو نرخه ی x له نیوان (-1) و (1)

بوو ($-1 < x < 1$)، ئەو بەشە کۆکردنەوهی ئەم زنجیرهیه، لیکنزیووه
 بۆ $\frac{1}{1-x}$. بێ گومان هه‌موو زنجیره‌ تۆانه‌کان ناچنه‌ ژیر باری ئەم
 یاسایه‌وه.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c)^1 + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$$

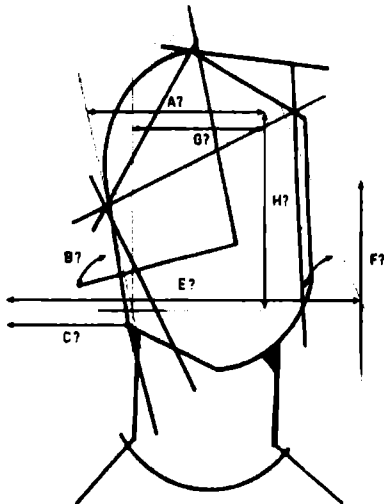
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

بهشی چوارهم

ئەندازە

Geometry



ناساندنی ئەندازه

Introducing geometry

ئەندازه، بریتییە لە لیکۆلینەوه لە شێوهکان (shapes)، قەبارە، شوین-پێگە و بۆشایی-ئاهروته. لەگەڵ ئەوەش، وەسفی خال و راستەهێل و چەماوهکان دەکات لە پووتەخەتدا. یەکەم جۆری ئەندازه، بریتییە لە 'ئەندازەی ئیقلیدی'، ئەو ئەندازەیە هەر لە قونای ناوەندی پێی ئەشنا دەبین. کە میژووی ئەم ئەندازەیە دەگەرێتەوه بۆ 300 سال پیش زاین کە لە لایەن 'ئیقلید' لە کریک گەشی سەند⁵³. ئەندازەی ئیقلیدی لە چەند بەلگە نوێستیک⁵⁴ پیکاهاتووه، کە تەواوی بیردۆزەکان لە مەر ئەندازەی ئیقلیدی بە هۆی ئەم بەلگە نوێستانەوه سەلمینە بۆ کراوه. ئیقلید لە پەرتوکهکی بە ناوی دانەکان (Elements) سەرچەم بـیـرۆـکه ئەندازەییەکانی لە دوو تـوی 13 پەرتوک خستۆتە پوو. ئەندازەکی ئیقلید 5 بەلگەنوێست (Axioms) لە خۆ دەگریت، کە ئەمانە:

- i. بەهۆی هەر دوو خالیک، دەتوانین راستەهێلێک بکێشین.
- ii. بەشیکێ راستەهێل دەکریت بۆ ناکۆتایی درێژبیتەوه.
- iii. بازنە دەتواندیت لە هەر نیووتیرەیهک و هەر چەقیک بکێشیت.
- iv. هەر دوو گوشەیهکی راست یەکسانن.

⁵³ ئەندازه بەر لە یونانییەکان بوونی هەبوو، وەک لە شارستانیەتی میسر.

⁵⁴ بەلگە نوێست، وتەیکە-دەستەواژهیکە بە راست دادەنددیت بە بن سەلماندن.

۷. بز هر راسته هیلنکی دراو که خالیک هه بیست نه که ویتته سه ر
 راسته هیلنه که، نه وه راسته هیلنک هه یه بهو خاله دا ده پروات و
 راسته هیلنه که ی تر نابریت (راسته هیلنکی ته ریب).

له گه ل نه وهش، له به لگه نه ویسته کانی ئیقلید چه ند شتیک به بی
 ته فسیر مانه وه، وه ک راسته هیل، خال، گوشه ی راست و نیوه تیره. دوی
 نه وه ی له سالانی (1800) چه ند به لگه نه ویستیک تر ناسیندرا، که نه وهش
 بوه هزی گه شه سهدنی نه ندازه و رژی می سیسته می به لگه نه ویسته کان.



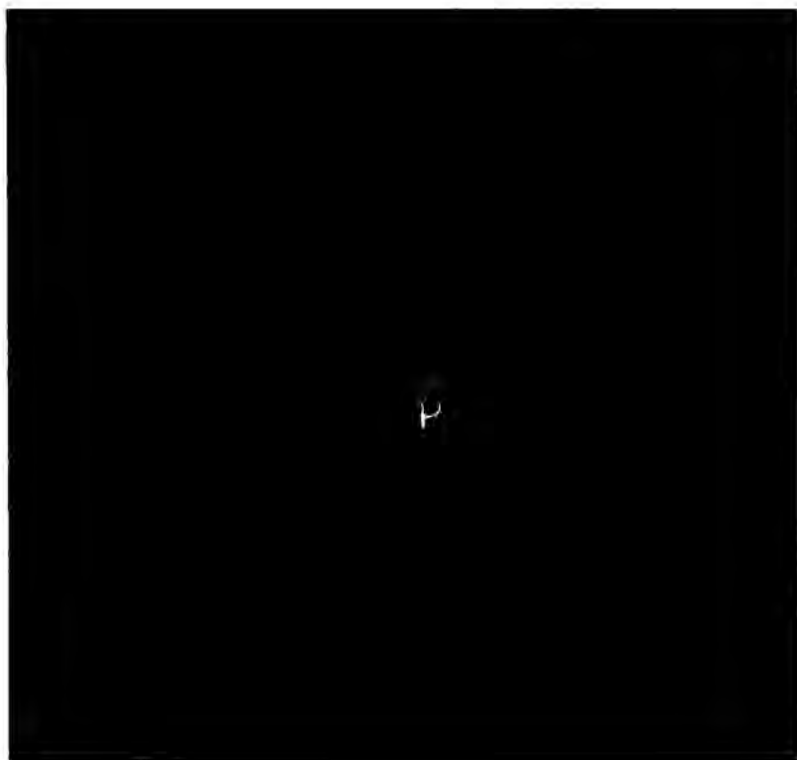
راسته هیله کان و گوشه کان

Lines and angles

راسته هیل و گوشه، دوو بابه تی زور سه ره کین له نه اندازه زانیدا. نه م دووانه کرۆکی نه اندازه ن. به لگه نه ویستی پینجه می ئیقلید ده لیت: نه گه ر راسته هیل کیمان هه بیئت و خالیک هه بیئت نه که ویته سه ر نه و راسته هیله، نه وه راسته هیل یک هه یه به و خاله دا ده پروات و راسته هیله که ی تر نابریت. به لام خو ده کریت نه و راسته هیله به خاله که دا ده پروات و راسته هیله که ی تر بیریته!

چه مکی گوشه، بریته یه له و چه مکی یان نه و پیداوستییه ی که تیدا وه سفی نه وه مان بق ده کات چون راسته هیله کان یه کتری ده برن، ئایا کراوه ی نه و یه کتر برینه چه ندیکه. وادانی دوو راسته هیلمان هه یه یه کتری ده برن له خالی p ، وه که له وینه که نیشان دراوه. له م باره دا، بازنه یه که چه که ی بریته یه له p ، دابه شده بیئت بق چوار به ش؛ چوار به شه راسته هیل (Segment) ده که ونه ناو بازنه که، نه گه ر نه و چوار به شه روو به یی یه کسان داگیر بکه ن له ناو بازنه که، نه وکات نه و به شه راسته هیلانه پیمان دهوترین نه ستوون (perpendicular) وه گوشه کان گوشه وه ستاو ده بن (Right angle)، واته گوشه ی پله 90. نه مه ش په یوه ندی به به لگه نه ویستی چواره می ئیقلیده وه هه یه. له باری جیاوازدا دا، گوشه کان به پله پیوان ده کریت.

هر چنده نه اندازه زور له پیش گریکه کان بوونی هه بووه، له شارستانیته کانی تری وهک: بابلییه کان و میصرییه کان، به لام به و شیوه نه بووه که ئیقلید باسی کردووه.



پښوانه کړدنی گوشه کان

Measuring angles

پښوانی گوشه به یه که ی 'پله' ده بیت. له کوندا، پښوانه کړدنی گوشه کان له نیوان دوو راسته هیلدا که یه کترین بریووه، پښوانه کراوه به هوی کیشانی بازنه یک به دوری شو خالی که دوو راسته هیله که یه کترین تندا بریووه، پاشان دابه شکردنیان بق چند یه که یه کی یه کسان. شارسستانییه تی نیوان دوو پرووبار⁵⁵ و نه ستیره ناسه کانی شو شارسستانییه ته، بیروکه یه کی نویان به جیهان ناساند، نه ویش نه وه بوو دوریکی بازنه یان به 360 مه زنده کرد، وهک نه وهی نه مرق نیمه کاری پیده که یین و له قوتابخانه و ناوهنده نه کادیمییه کان ده یان خوینین.

هر وه ها هر نه وان بوون کاتزمیزیان دابه شکرد بق 60 خوله ک، هر خوله کینک بق 60 سانیه-چرکه. ده شیت 60 مه زنده کرد بیت له بهر نه وهی 60 به سر 1,2,3,4,5,6 و چندین ژماره ی تر دابه ش ده بیت. سه ره پای نه مانه ش، شو شارسستانییه ته له بری به کار هینانی پژی می ده یی، پژی می کی تاییه ت به خویان داهینا، نه ویش 'پژی می شهستی' بوو، هر له و سونگه یه وه، شو دابه شکردنانه ی له سه ره وه باسما ن کرد، گشتی له ریگه ی شو پژی می وه سه ر ناو که وتوو.

⁵⁵ نیوان دیجه و فورات.



بۆچی 360 why

بۆچی دەوریکی بازنه 360 پلهیه؟ ئایا هەرگیز بیرت لیکردۆتهوه که بۆچی 360؟ ئایا ئەم ژمارهیه به ههڕهههکی (Randomly) ههلبژێردراوه؟ بۆچی ژمارهیهکی تر نهبوو، وهک: 400 یان 500 یانیش... هتد؟ نهینى پشت ئەم ژمارهیه چیه؟ لێره ههول دهدهین وهلامى ئەم چەند پرسیارهى سهروه بدهینهوه.⁵⁶

لێره پێوسته شتیك بخهینه روو؛ که ئەم ژمارهیه بۆ بازنهى بچوک یان گوره هه هه مان ژمارهیه. ههلبژاردنى ئەم ژمارهیه بۆ دەوریکی بازنه 360، بۆ یهکیك له م هۆکارانه دهگهڕێتهوه، ئەمەش واتای ئەمەیه وهلامیکى تهواو دلتیا بوونی نییه له م بارهیهوه، بهلام وهک ئاماژهمان پێدا دهشیت بۆ چەند هۆکارێک بگهڕێتهوه، هۆکارگهلیک که زۆر جوان و رازیگهه بۆ ئەم مههسته. ئەم هۆکارانهش دهگهڕێتهوه بۆ چەند ههزار سالیك بهر له ئیستا له لایه ن بابلیهکان و گریکهکان...

هۆکاری یهکه م (درێژی سال):- ئەگه ههتاكو ئیستا بیرت له م ژمارهیه (360) نهکردۆتهوه، ئەوه گهه دهکەین که تۆ له ماوهی بیرکردنهوه ت بۆ چەند خولهکێک له م ساتهى ئیستادا له مهه ئەم ژمارهیه، دلتیاين کومهلیک ئەگههت بۆ دیته پێش، ئەگه ههتاكو ئەم چەند خولهکەش که ئەم بابته نهخوینیتهوه و دلتیا نیت و بیرت بۆ هیچ شتیك

⁵⁶ ئەم بابته له پرتوکهکه باس نهکراوه، بهلام به پێوستم زانی که زیادى بکه.

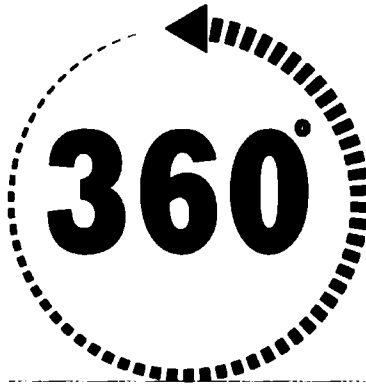
ناچیت، ئه وه با بۆت ئاسان بکهین، ئایه ئه م ژماره یه ت (360) له کوی تر بهرچاوت که وتوووه یان بهر گویت که وتوووه؟ بۆیه بیر له سال و پوژ بکه ره وه؟ زه وی سالیکی ده ویت تا کو خولیک به ده وری خور ته او بکات، سالیکی زیاتر یان که متر (به ریژه یه کی که م) هه ر له نیوانی 365 پوژ دایه، به لام له سالنامه ی بابلیه کان و فارسه کان؛ سالنامه کانیا ن له سه ر 360 دامه زرانده بوو، به لام له هه ندی شارستانی تر که متر بوو، به م جو ره ده شیت وه ک هاوسه تگیه ک له نیوان ئه م شارسه تانیانه 360 هه لیزیرداییت.

هۆکاری دووه م (بابلیه کان و سیسته می ژماره شهستی):-
 بابلیه کان سیسته میکی ژماره یی گه لیک نایاب و دانسه قیان دارپشتوو، که له میژوودا به 'سیسته می شهستی' ناسراوه و هه تا نه مرۆش له پنیوانی زه مه ندا به کاردیت، یه ک کاژیر شهست خوله که و یه ک خوله ک شهست چرکه یه. که پیشی ئه لێن سیسته می سه کساگه سیمال. بابلیه کان به سه رنجدانیا ن له ناو بازنه یه ک ئه گه ر هاتوو نیوه تیره که ی بزانی، ئه وه ده توانین 6 سیگۆشه ی لایه کسان (که دریزی لایه کانی ئه کاته نیوه تیره ی بازنه که) بکشین. له بهر ئه وه ی لای بابلیه کان ژماره 60 وه ک بنچینه یه ک بۆ کاره کانیا ن به کارده هینا، بۆ هه ر یه ک له سیگۆشه کان ژماره 60 پیدا (ده شیت وه ک هیماسیمبول زۆر جار 60 به کارهیتاییت بۆ نواندنی شتیک) دواتر به لیکدانی (له بهر ئه وه ی 6 سیگۆشه ی لایه کسان هیه) 6 به 60، ژماره 360 چنگ خستوو..

هۆکاری سینیهم (360 وهک ژماره یه کی دابهش- Composite number):-- ده شیت هۆکاریک بو خوشویستی ژماره 360 نه وه بوو بیت که نه ژماره یه ک کومه لیک کۆلکه (factor) هه یه که 24 کۆلکه یه، که نه مانه ن:

1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,18,20,24,30,36,40,45,60,72,90,120,180,360

بۆیه هه ر به ئاسانی ده تواند ریت بازنه به سه ر 12 به ش دابهش بکریت (سه عات-کازی ر) که گوشه ی نیوان هه ر کازی ریک ده کاته 30 پله. (بیربکه ره وه، نه گه ر گوشه ی ناو بازنه 100 بوایه، له کاتژمیر چی پوویده دا؟). بۆیه هۆکاری سینیهم نه وه بوو که 360 ژماره یه کی دابه شی گه وره یه که کۆلکه یه کی زۆری هه یه. واته ژماره یه کی ته واوی گه وره تری نزیک له 360، ژماره ی کۆلکه کانی که متره له کۆلکه کانی ژماره 360.

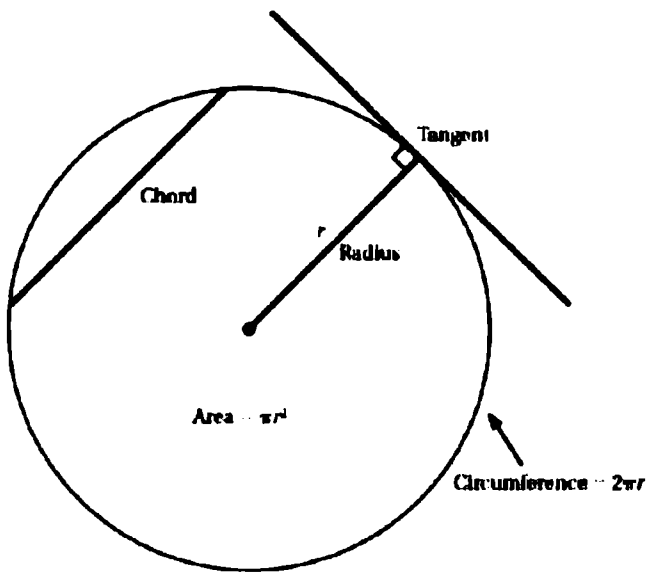


بازنه

Circle

بازنه، بریتیه له کومه له A هموو نه و خالانه، که دووریه کی په کسانیان هیه له خالیک که پیسی دهوتریت: چهق. دووری نیوان چهق (Center) و خاله کانی دهوری چهق، پیسی دهوتریت: نیوه تیره (Radius). بازنه په کیکه له و شته سره تایبانه له به لگه نه و سته کانی ثقلید بونیان هیه. چه ماوهی داخراوی نه و خالانه که دهوری چه قیان داوهی، پیسی دهوتریت: چیوه (Circumference). چونییه تی دوزینه وهی نه و چیوه یه بز بازنه یک که نیوه تیره کی بریتیه له r ، ده کاته: $C = 2\pi r$. به همان شیوه، بز هه ژمارکردنی رووبه ری بازنه یک به زانینی نیوه تیره کی، رووبه ده کاته: $A = \pi r^2$.

هر له بابتهی بازنه وه چند شتیکی تر پیناسه ده کریت، راسته هیل و رووبه ر. شتیکی ترمان هیه پیسی دهوتریت: که وانه (arc) که بریتیه له به شتیکی چیوه ی بازنه. بابته کی تر هه مانه پیسی دهوتریت: ژئ (chord) که بریتیه له و هیله ی که به دوو خالی سر چیوه تیبه رده بیت، نه و ناوچه ی ده که ویته نیوان راسته هیل ی ژئ و چیوه ی بازنه که، پیسی دهوتریت: به شه رووبه ر. راسته هیل ی لاریمان هیه (Tangent Line) که بهرکه و تنی له گل یه ک خالی چیوه ی بازنه هیه.

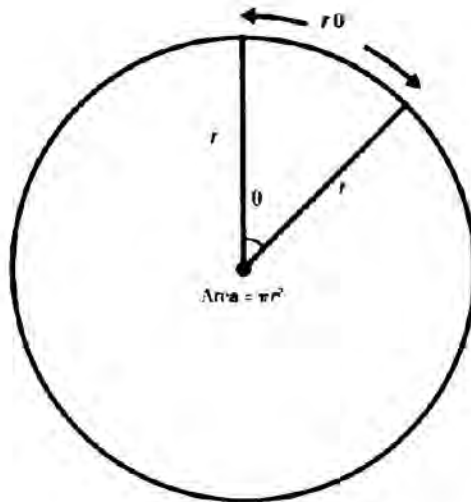


گوشه‌ی نیوه‌تیره‌یی

Radian angle

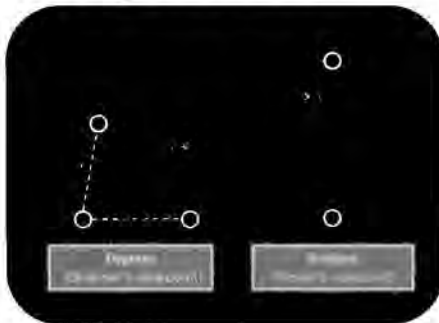
یه کیک له شوینگره‌وه‌کانی پله (Degree)، بریتیه له گوشه‌ی نیوه‌تیره‌یی. گوشه‌ی نیوه‌تیره‌یش هر له‌سه‌ر بنچی بازنه‌وه خهت و خالی داریژراوه هر وهک پله. له‌که‌ل نه‌وه‌ش، گوشه‌ی نیوه‌تیره‌یی سو‌دگه‌لیکی هیه، به تاییهت له هم‌به‌ر نه‌خشه‌ سیگوشه‌ییه‌کان. گوشه‌ی نیوه‌تیره‌یی به‌وه پیناسه ده‌کریت که پینوانه‌ی چه‌قه گوشه‌یه‌ک له بازنه‌یه‌ک که نیوه تیره‌ک‌ی بریتیه له r و که‌وانه‌یه‌ک (arc) در‌یژییه‌ک‌ی بریتیه له r دیارده‌کات نه‌گه‌ر بازنه‌ی "یه‌ک" هت (circle unit) به‌کاره‌ینا.

بۆ نه‌وه‌ی له‌مه‌ حالی بین، وا دانسی بازنه‌یه‌کمان هیه نیوه تیره‌ک‌ی بریتیه له 1، له‌به‌ر نه‌وه‌ی چیوه‌ی بازنه ده‌کاته: $C = 2\pi r$ ، نه‌گه‌ر $r = 1$ ، نه‌وه $C = 2\pi$. بۆیه پارچه‌یه‌ک x (Portion) له بازنه‌ک، گوشه‌ی θ ی نیوه‌تیره‌یی هیه، کاتیک $\theta = 2\pi x$. نمونه: پارچه‌کردنی بازنه‌ک بۆ چوار به‌شه راسته‌هیل (Segment) ی یه‌کسان، نه‌وه گوشه‌ی پله 90 پی ده‌دات، که نه‌وه‌ش ده‌کاته 2π جارانی $\frac{1}{2}$ یان $\frac{\pi}{2}$ نیوه‌تیره‌یی.



دهتوانين گوشه يک له پله بگورين بو گوشه ی نیوه تیره یی، به هوی لیکدانی پله که به: $\frac{\pi}{180}$ ، یان به پیچه وانه وه، له گوشه ی نیوه تیره ی بو پله، به هوی لیکدانی پله که به: $\frac{180}{\pi}$ ، له م وینه ی خواره وه⁵⁷ زور باشتر له و شیکردنه وه ی سه ره وه تیده گه یین.

Degrees vs. Radians



⁵⁷ Math. better explained. Khalid Azad.

سینگوشه‌کان

Triangles

سینگوشه (سنی لا)، بریتیه له یه‌کینک له شیوه‌نه‌اندازه‌ییه‌چهند لایه هره باوه‌کان، که ده‌تواندریت به سنی خالی لیک جیاواز (Distinct)⁵⁸ بکیشریت به هژی راسته‌هیلیه‌وه، واته له شاهوته‌یه‌ک⁵⁹ (Space) سنی خال دابنن، هر دووخالیک به هژی راسته‌هیلیه‌وه به‌یه‌ک ده‌گه‌ینن به شیوه‌یه‌ک نه‌و پرووبه‌ره‌ی ده‌گه‌ویته ناوه‌وه‌ی، تهنیا به سنی خال ده‌ور درابیت و نه‌کراپیته دووبه‌ش. هه‌ژمارکردنی پرووبه‌ری سینگوشه، به هژی کیشانی لاکیشه‌یه‌ک به ده‌وری سینگوشه‌که، یه‌کینکه له رینگان، واتا سینگوشه‌که بخینه ناو لاکیشه‌یه‌ک. یان نه‌گه‌ر یه‌کینک له لایه‌کانی سینگوشه‌که به بناغه‌که‌ی-بنچینه (base) دابنن، نه‌وه پرووبه‌ر ده‌کاته

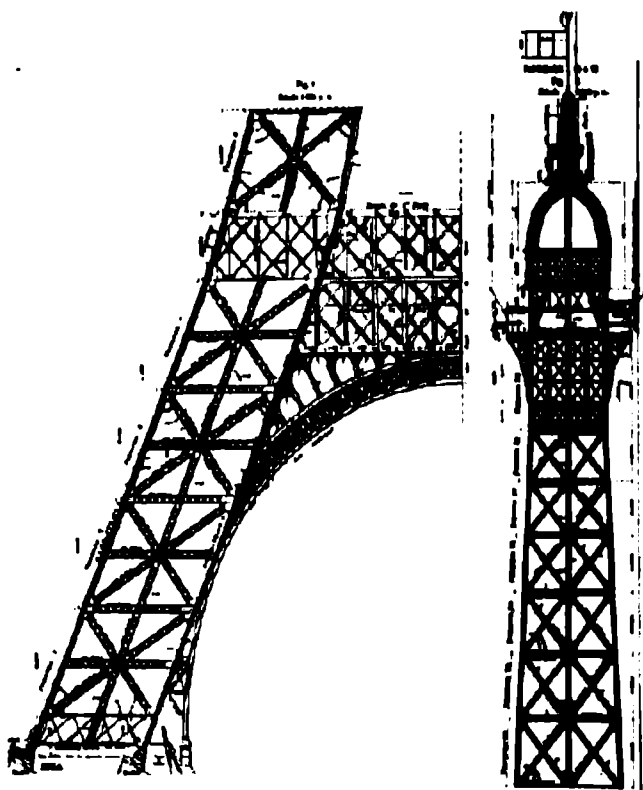
$$Area_{triangle} = \frac{1}{2} h \times b \text{ واته:}$$

سینگوشه‌زانی یه‌کینکه له پایاکانی بیناسازی، به تایبته بو‌نه‌اندازیاران له دروستکردنی پرد و دیوار و باله‌خانه‌کان، که تیندا له شتی زور نالوزدا پو‌لینکی گرنک ده‌بینیت و کاره‌کانمان ناسان ده‌کاته‌وه.

⁵⁸ وشه‌ی "distinct" بو‌دانه (element) به‌کاردریت. وشه‌ی "disjoint" بو‌کومه‌له (set) به‌کاردریت.

⁵⁹ "شاهوته" وشه‌یه‌کی کوردیه‌ به‌رامبه‌ر به "space" ی‌ئینگلیزی و "هزا" ی‌عهره‌یی به‌کارمان هیناوه.

جگه له مانهش، یه کیک له بیردوزه هره ناوداره کان له سهر
بنچینه ی سینگوشه وه دامه زراوه، ئه ویش "بیردوژی فیساکورس" له هه مبهر
سینگوشه یه ک که گوشه یه کی پله 90 هه به.



جۆره کانی-پۆلینکردنی سینگوشه

Types of triangle

له سینگوشه زانیدا، چند جۆریکی سینگوشه مان ههیه، ئه و سینگوشه ی ئیمه باسی دهکەین، بریتیه له سینگوشه یه که کۆی گوشه کانی ناوه وهی دهکاته 180 پله⁶⁰. ئه وهشی وادهکات باس له جۆری سینگوشه کان بکهین و جیاوازی له نیوانیان بکهین، بریتیه له دریزی لایه کانی و گوشه کانی.

پۆلینکردنی سینگوشه کان به پنی دریزی لایه کانی:

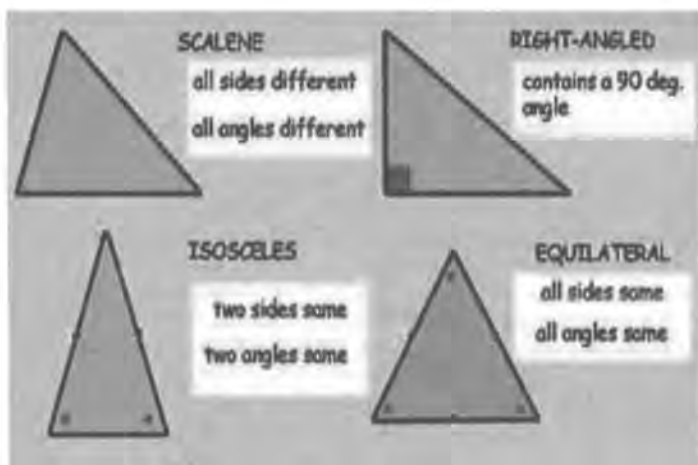
1- سینگوشه ی سنی لایه کسان (Equilateral triangle): ئه و سینگوشه یه که دریزی هه ر سنی لایه که ی وهک یه کن-جووتن، واته یه کسانه. که هه ر گوشه یه کی دهکات 60 پله.

2- سینگوشه ی دوو لایه کسان (Isosceles triangle): ئه و سینگوشه یه که دریزی ته نیا دوو لایه که ی وهک یه کن-جووتن.

3- سینگوشه ی گوشه وه ستاو (Right angle triangle): ئه و سینگوشه یه که گوشه یه کی پله 90 هه یه.

⁶⁰ مه به ست له مه که کۆی گوشه کانی ناوه وهی دهکاته 180، له بهر ئه وهیه که سینگوشه مان هه یه که کۆی گوشه کانی ناوه وهی زیاتره له 180 پله، هه شعانه که متره له 180. که له بابته کانی دواتر باسی لیه وه ده کریت.

4- سیگوشه‌ی جیالا (Scalence triangle): نهو سیگوشه‌یه که درینژی هیچ لایه‌کی وهک نهوی تر نییه-جووت نییه، واته هر لایه‌کی درینجیه‌کی جیاوازی لهوی تر هیه. سیگوشه‌ی گوشه وهستا باریکی تایه ته له سیگوشه‌ی جیالا.



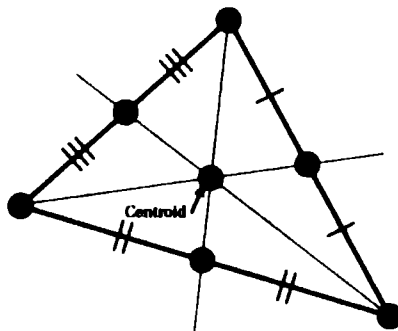
سیگوشه‌زانی له شارستانیه‌تی میصر سه‌رئاو کهوت، به‌هزکاری دروستکردنی هه‌په‌مکانی میصر و نه‌خشاندنی بته‌کان له بهره‌کان. له‌گه‌ل نه‌مه‌ش، زانا میصر-پیه‌کان زور بیریان له لایه‌نی په‌تی (Abstract) ی شته‌کان نه‌ده‌کرده‌وه، لای نه‌وان، به‌کاره‌یتانیان گرنگترین شت بووه.⁸¹

⁸¹ وه‌رگیز.

چەقی سینگۆشه

The center of a triangle

چەندین ڕیگا هەن بۆ ئەوەی بزانی چەقی سینگۆشه یەک بەوردی دەکەوێتە کوێ. یەکیەک له ڕیگاگان، ئەوەیە: گەورەترین بازنه بکیشی له ناو سینگۆشه که، ئەو خالە دەبیتە چەقی بازنه که، دەبیتە چەقی سینگۆشه که ش. یانیش، چەقی بازنه یەک، که چێوهی بازنه که به هەرسێ سەری سینگۆشه که تیپەر دەبیت. یەکیکی تر له ڕیگاگان، بریتیه له دەست نیشان کردنی ناوه راستی هەر یەک له سێ لایه کهی سینگۆشه که، دواتر کیشانی راسته هیلک له کوژبني سوچ هەر سینگۆشه یەک بۆ ئەو لایه دەکەوێتە بهرامبەر کوژبنه که، بهم شێوه سێ راسته هیلک دهکیشن، ئەو سێ راسته هیله، له کام خال پینگه یشتن، ئەو ئەو خاله دەبیتە چەقی سینگۆشه که. وهک له وینهی خوارهوه زیاتر پوونه.



لێره جیاوازی دروست نابیت که سینگۆشه که له کام جوړی سینگۆشه کانه، ئەم شێوازه-میتوده بۆ گشتیان راسته به شێوه یهکی گشتی.

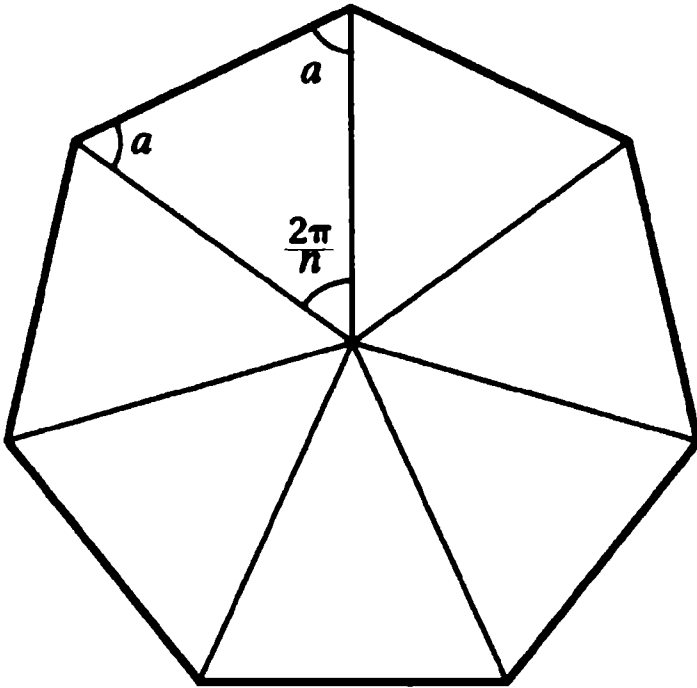
چند لایه کان

Polygons

له دیر زهمانه وه، چند لایه کان به کارهاتون بۆ رازاندنیه
 باله خانه کان و کاره هونه ریه کان، وهک: سینگوشه کان و لاکیشه کان. چند
 لایه کان، بریتین له شیوه یه کی پرووته ختی داخراو به سنی پارچه
 راسته هیل یان زیاتر (یان چند گوشه یه کی هه یه).

چند جوریک له چند لامان هه یه، نهوانه ی ریکن و نهوانه ی ریک
 نین. چند لای ریک، نهو چند لایه یه که دریزی هه موو لایه کانی
 یه کسانن، وهک: پینج لا (Penatgon)، شش لا (Hexagon)، حوت لا
 (Heptagon)، هه شت لا (Octagon) و تا دوایی. پینج لا
 (Pentagon) که 5 لای ریکی هه یه، ده تواندریت بکیشریت به هوی چند
 سینگوشه یه که وه که دو گوشه به یه که ده گن، که ناسراوه به سینگوشه ی
 دوو لا ریک (Isosceles) که لوتکه ی (Peak) هه سینگوشه یه که به
 یه کترده گن له چه قی شیوه که، وهک له وینه که دا دیاره. له بهر نهوه ی
 دهوری نهو چه قی دروست بووه ده بیت 2π بیت، نهوه گوشه ی لوتکه ی
 هه سینگوشه یه که ده کاته: $\frac{2\pi}{n}$ کاتیک n بریتیه له ژماره ی سینگوشه کان
 یان لایه کانی چند لایه که. بابه تیکی تر، که له مهر سینگوشه کان ده زانین،
 نهوه یه که کوی گوشه کانی سینگوشه ده کاته π ، وه ده زانین کسه
 کوی گوشه یه که سانه کان ده کاته $2a$ ، واتسه $2a = \pi - \left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

ههروهه ها ئه و بـره $2a$ بریتیه له نرخی هه ر گوشه یه کی ناوه کی
 (Internal) ی چند لایه کی رینک، وه ک: پینتاگون (Pentagon) کاتیک
 $n=5$ ، نه وه کزی گوشه ی ناوه کییه کانی ده کاته: $\frac{3\pi}{5}$.



هاوشیوهی

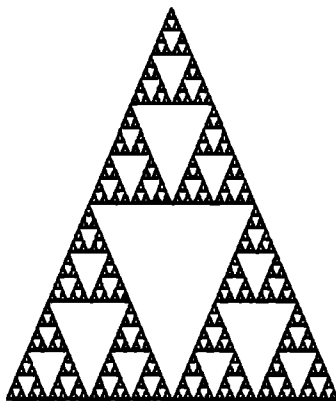
Similarity

دوو شت یان دوو شیوه (Shapes) پټان دهوتریت هاوشیوهن، نه‌گه‌ر هات و نه‌و دوو شته له پرووی شیوه‌وه وهک په‌کتر بن‌همان پټکهاه‌یان هه‌بیت. نه‌مه په‌کینکه له ریڼاکان، چونکه چهن‌دین ریڼگای تر هه‌ن بؤ نه‌وهی بریار‌بده‌ین دوو شت یان دوو شیوه (Shapes) هاوشیوهن یان نا. له نه‌ندازه، نه‌گه‌ر له‌سه‌ر سیڼگوشه‌کان بدوین، نه‌گه‌ر هه‌رسی گۆشه‌ی سیڼگوشه‌یهک په‌کسان بیت به‌گۆشه‌کانی ناو سیڼگوشه‌که‌ی تر، نه‌وه هاوشیوهن، یان ریژه‌ی دريژي نینوان دوو لای سیڼگوشه‌ک په‌کسان بیت به‌ریژه‌ی دريژي دوو لای سیڼگوشه‌که‌ی تر. کاتیک له شیوه یان شته نه‌ندازه‌بیه‌کانی تر ورد ده‌بینه‌وه، وهک چهن‌دلایه‌کان (Polygons) و چه‌ماوه‌کان (Curve)، نه‌وه شتیکی تر هه‌یه ده‌بیت لټیوه بریار بده‌ین نه‌و دوو شته هاو شیوهن یان نا، وهک: دوو چهن‌دلایه‌کی ریڼک، هاوشیوه ده‌بن نه‌گه‌ر بیت و هه‌مان ژماره لایان هه‌بیت. لټره گه‌وره‌ی و بچوکی شیوه‌کان گرنک نییه، به‌لکو جه‌وه‌ری شیوه‌که گرنکه.

چه‌مکی هاوشیوهی، یان جیگ‌ژورکینی هاوشیوهی (Similarity transformation) به‌کار‌دین بؤ وه‌سفکردنی پټوانه‌کردار (Scaling operation) که شتیکی جیگ‌ژورکینی پټکراوه بؤ شتیکی هاوشیوه. جیگ‌ژورکینی هاوشیوهی یان لټکچوو به‌جوریکه که هیچ گورانکاربیه‌ک له شیوه‌ی نه‌و شته‌ی هه‌مانه دروست ناکات، ته‌نیا له

رووی برهوه نه بیت. واته نه گهر چوارگوشه یه ک که در یژی لایه کانی 5 بیت، بمانه ویت گوره تری بکین، نه وه بز هر لایه ک چند یه که زیاد بکین، نه وه بز لایه کانی تریش به هه مان شیوه، نه مهش واتا له پروتهختی دیکارتی (Cartesian coordinates) له کاتی جینگزپکی، سه رجه خاله کانی نه پروتهخته ثقلیدیه جارانی هه مان ژماره، واته هه مان فاکتور ده کرت.

نهم وینهی خواره وه بریتیه له سینگوشه ی سیرپینسکی⁶².



⁶² سینگوشه ی سیرپینسکی (Sierpinski triangle) جوری ک فرا کاله، که له سینگوشه یه کی ریک یان لایه کسان دروست ده بیت. سه رتا سینگوشه یه کی لایه کسان له ناوه راستی سینگوشه یه که م جیا ده کرتیه وه، پاشان نهم کاره له سه ر هه موو سینگوشه کان دووباره ده کرتیه وه. ناوی نهم سینگوشه یه، له ناوی ماتماتیکزانی پوله نندایی 'واکلام سیرپینسکی' وه رگیراوه، به لام چندین سه ده بهر له کاره کانی سیرپینسکی، نهم سینگوشه یه، وه کو شیوازی ک بز پازاندنه وه که لکی لن وه رده گیرا.

جووتیون

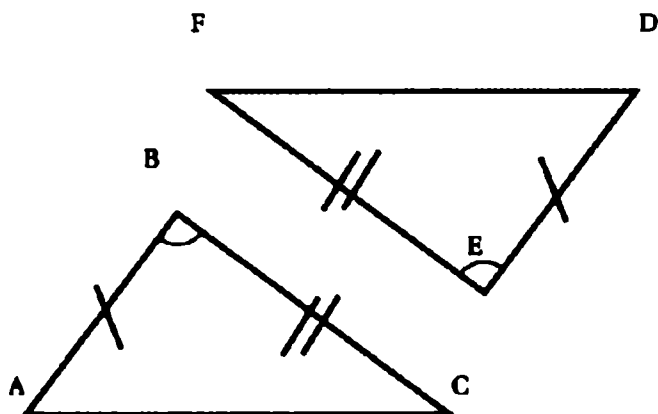
Congruence

دوو شت پیمان دهوتریت جووتده بن، نهگر هاتوو نهو دوو شته له شیوه؛ هه مان پیکهاته و پیوانیان هه بیت. چونییه تی هه لکه وتسی له بوشایی (Space) گرنګ نییه. واتا دوو سینگوشه که دریزی لایه کانی و گوشه کانیان هه مووی وهک یه که، به لام وهک یه که له بوشایی دانه نراون؛ نهوه جووت ده بن. نمونه: دوو بلزکی وهک یه که، نهگر بلزکیکیان به باری ستونی دانین و نهوهی تر به باری دریزی، نهوه نهو دوو بلزکه جووت ده بن، گرنګ نهوهیه هه ردوویکیان بلزکن و پیکهاته و پیوانیان هه موو شتیکیان وهک یه کتره، به واتایه کی تر، ریزه ی نیوان هه پیکهاته یه کی شته که یان شیوه که-جیگورکیه که بوشیوه که ی تر، ده کاته 1 (Scaling factor) ⁶³.

له وینه دا، ده کرایت دوو شتی له م شیوه وینه دانه وهی یه کتر بن. دوو سینگوشه به گشتی جووتده بن نهگر بیت و هه یه کیک له مانه ی دین روو بدات، نه وانیش: دریزی هه س لایه کانی یه کسان بن؛ دریزی دوو له لایه کانی و گوشه ی نیوان نهو دوو لایه له هه ردوویکیان وهک یه ک بیت؛ یان دریزی یه کیک له لایه کان و نهو گوشه ی که گوشه کانی تر

⁶³ ریزه ی جیگورکی (Scaling factor)، واتا نهگر له سینگوشه ی یه کم گوشه یه کم هه بیت هه ک ی 90 بیت، نهوه ده بیت له سینگوشه که ی تر گوشه یه کی هه 90 هه بیت، نه مهش دیاره که ریزه ی نیوانیان ده کاته یه ک: $\frac{90}{90} = 1$.

ته واوده کات، یه کسان بیت. بۆ هه ریه کینک له م سنی پینوه ره، به سه بۆ
 نه وه ی بریار بدهین دوو سینگۆشه جووت ده بن یان نا.



بابه تی جووت بوون له نه ندازه دا، یارمه تیمان ده دات له دۆزینه وه ی
 پرووبه ر، قه باره،... بۆ هه ندی له شیوه کان. کاتیک لیکۆلینه وه له هه مبه ر
 شیوه یه ک گران و سه خته، نه وه له رینگه ی شیوه یه کی تری نه و شته ی
 هه مانه، که له گه ل شیوه ره سه نه که ی خۆمان جووت ده بیت، کارمان
 ئاسانتر ده کات. وه ک چۆن له هه ژمارکردنی π له ناو بازنه یه ک چند
 لایه ک ده کیشین، که نه و چند لایه پیکه وه جووت ده بن...

بیردۆزی فیساگورس

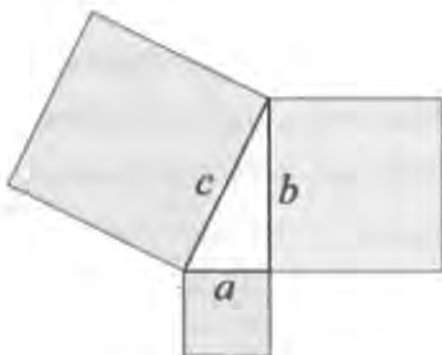
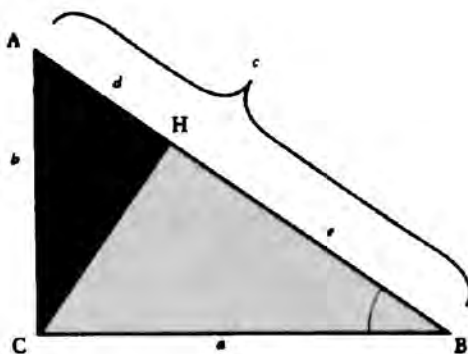
Pythagoras's theorem

بیردۆزی فیساگورس، یه کیک له سیما هه ره دیاره کانی بیرکاری. قوتابی له قوناغی ناوهندی ئاشنای ئه و بیردۆزه ده بیست. بیردۆزی فیساگورس، لای زۆریک له بیرکاریزانه کان، بریتییه له جوانترین بیردۆزه کان، که به رادهیه کی زۆر سه رسامی پێوه دیاره. ئه م بیردۆزه په یوه ندییه که له نیوان گوشه و دریزی لایه کانی سیگوشه یه کی گوشه وهستا، و اتا سیگوشه یه ک که گوشه یه کی پله 90 هه بیست. سه لماندنی ئه م بیردۆزه له ریگه ی کیشانی سیگوشه یه کی هاوشیوه (Similar) له ناو سیگوشه که، وهک له وینه که دا دیاره، یانیش له ریگه ی رووبه ره وه له دوو جاکردنی هه ر سی لایه که ی سیگوشه که.

له بنچینه دا ئه م بیردۆزه له پیش یونانییه کان و فیساگورس بوونی هه بووه، که له شارستانییه تی بابلییه کان؛ ئه وان کاریان پی کردووه، به لام له کوتاییه کانی سه ده ی شه شه می پیش زاین، گریکه کان کردیان به ناوی خویانه وه⁶⁴. ئه م بیردۆزه گرنگیه کی زۆری هه یه له ئه ندازه، فیزییا، وه

⁶⁴ ئه م بیردۆزه چهن دین سه لماندنی هه یه، پتر له 300 سه لماندن، که ریگاو شیوازی هه مه جور هه ن. ساده ترینیان بریتییه له ریگه ی کیشانی چوار لایه کی ریگ له ناو چوار لایه کی گوره تر، له م ریگه یه وه ده گه یین به پشتراستی ئه م بیردۆزه. راستیه ک سه باره ت به سه لماندنه که ی، ئه ویش ئه وه یه بابلییه کان ده یانزانی ئه م بیردۆزه راسته، به لام نه یانده زانی بزچی راسته؟ ئه مه پرسیار بوو لایان، به لام وهک روونه چه مکی سه لماندن له

تەنانەن تەوهرەى پۇتانی دوو رەهەندی لەسەر ئەم بێردۆزەیه بناتنراوه. پەيوەندییەکی تۆکمەش هەیه له نیوان ئەم بێردۆزە و نەخشە سینگۆشەییەکان له چۆنییەتی دۆزینەوێ گۆشە.



یۆنانیەکانەوێ دەستی پێکرد، هەر بۆیە دەشیت بەهۆی سەلماندنی ئەم بێردۆزەو، یۆنانیەکان بە مولکی خویانی بزائن.

ساین، کوساین و تانجیت

Sine, cosine, and tangent

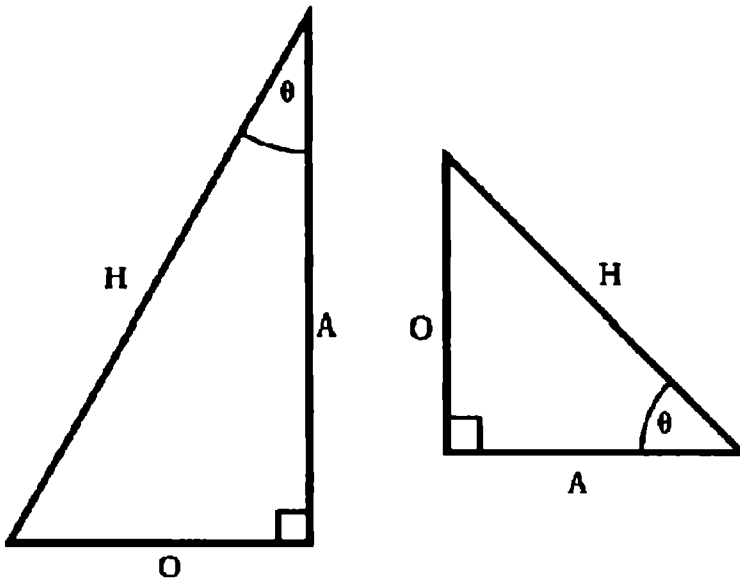
سینکوشی گۆشه وهستا، بواری ئهوه مان دهات که له په یوه ندى گۆشه و دريژی لایه کانی زیاتر تیبگهین، هر بۆیه له بیرکاری ئه مانه به نه خشه سینکوشیه کان ناسراون، که سه ره کیتربنیان بریتین له نه خشه کانی ساین، کوساین و تان.

بو ئه وهی پیناسه ی ئه و نه خشانه بکه یین، سه ره تا وا دانسی گۆشه یه کمان هیه θ ، که ئه م گۆشه پله که ی 90 نیسه. ئه و گۆشه ده که وینته نیوان دوو لا A و H که نه دوو لایه سه ریکی هاوبه شیان هیه (وهک له ویننه که دیاره). ئه و دوو لایه ش پینان دهوتریت: هاوسنی- دیوار به دیوار. له سه ره وه باسی دوو لامان کرد، لای سینیهم پیی دهوتریت لای به رامبه ر (دژ) که ناوی O مان لی ناوه. ئه و سنی نه خشه یه: ساین، کوساین و تانجیت به و شیوه پیناسه کراوه:

$$\sin(\theta) = \frac{O}{H} ; \cos(\theta) = \frac{A}{H} ; \tan(\theta) = \frac{O}{A}$$

له بهر ئه وهی هر دوو سینکوشیه یه کی گۆشه وهستا، له گه ل گۆشه ی θ وهک له بهر گه یراوه ی به کتر وان، ئه وه نه خشه کان هر هه مان وه لامان لیان ده ست ده که وینته وه بی گویدانه قه باره ی سینکوشه که، وه چونکه $\frac{O}{A} = \frac{\frac{O}{H}}{\frac{A}{H}}$ ، له مه وه ش ده بینین که:

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$



نەخشە سینگۆشەییەکان وینەکانیان شیۆه شەپۆلە، ئەمەش کەرنکی
 هەیه له بواری فیزییا. ساین له بنەرەتدا بە واتای کەوانە دیت، وە کۆساین
 هەر له ساینهوه سەرچاوهی گرتووه co-sine واتە: تەواوکەری ساین
 (complement of sine).

سینگوشه سازی

Triangulation

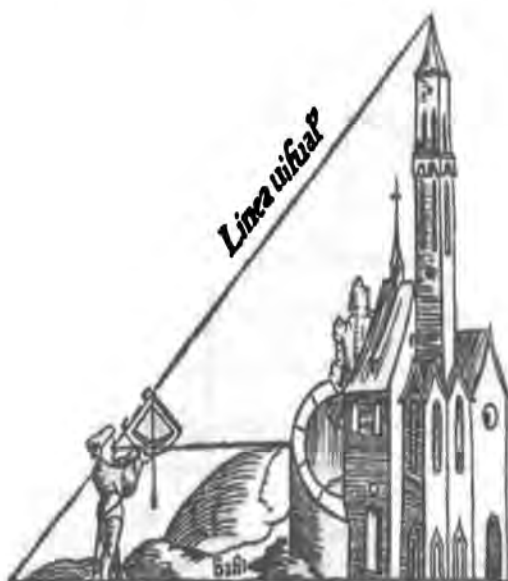
سینگوشه سازی، یه کینکه له و میتودانه ی که به کار دیت بؤ دوزینه وهی هموو پیکهاته کانی سینگوشه یه کی گوشه وه ستاو، به هوی ته نیا دوو دراو، نه ویش دریزی یه کینک له لایه کان و گوشه یه ک. دواتر له ریگه ی ثم دوو دراوه، ته اووی دراوه کانی تر ده دوزینه وه به به کارهیتانی نه خشه سینگوشه یه کانی ساین، کوساین و تانجیت.

وادانی شازاده یه ک دهویه ویت به رزی نیوان په نجره ی ژووری خه ونی شازنه کی و زهوی بزانتیت، بؤ نه مهش، پیوسته قژی کچه که چند دریز بیت بؤ نه وهی بگاته سه زهویه که؟ شازاده له دوری A وه ستاوه له کوشکه که، که گوشه ی نیوان بنکه ی کوشکه و په نجره که بریتیه له θ .

وا دانسی که کوشکه به شیوه یه کی ستونی ریک دروستکراوه، وه شازاده دوری نیوان خوی و کوشکه که ده زانتیت، که به که رهسته یه ک- نامیزیک (Protactor) گوشه که شی دوزیوه ته وه. شازاده دهویه ویت بزانتیت په نجره ی کچه که چند له زهویه وه به رزه، بویه به به کارهیتانی نه دوو دراوه، یه که م: دوری شازاده له کوشکه که. دووهم: گوشه ی نیوان شوینی شازاده به گویره ی په نجره که. به هوی ثم دوو دراوه و

به کارهیتانی یاسای \tan ده توانین بهرزی پنجره ی کچه که بدوزینه وه که بهرزییه که بریتیه له d بهم شیوه:

$$\tan(\theta) = \frac{d}{l} \text{ ، وه } d = l \times \tan(\theta)$$



$$d = l \times \tan(\theta)$$

دروستکردنی نه و نامیره یان نه و گوشه پنه زور سهخت نییه، بههزی چند شتیکی ساده وه ده توانی دروستی بکە ی.

هاوئه نجامه سینگوشه بیه کان

Trigonometric identities

هاوئه نجامه سینگوشه بیه کان، بریتین له و هاوکیشانهی که نه خشه سینگوشه بیه کانی وهک: ساین، کوسان و تانی له خوگرتووه، ئەم هاوکیشانه به راستی دەمینه وه هه رچهند گۆرانکاری له به های گۆراوه کانیدا θ بکریت. گریمان سینگوشه بیه کی گوشه وه ستاومان هه بیه، نه نیشته کی ده کاته A ، به رامبهره کی ده کاته O و ژیه که شی بریتیه له H ، ئه وه به پئی بیردۆزی فیساکورس:

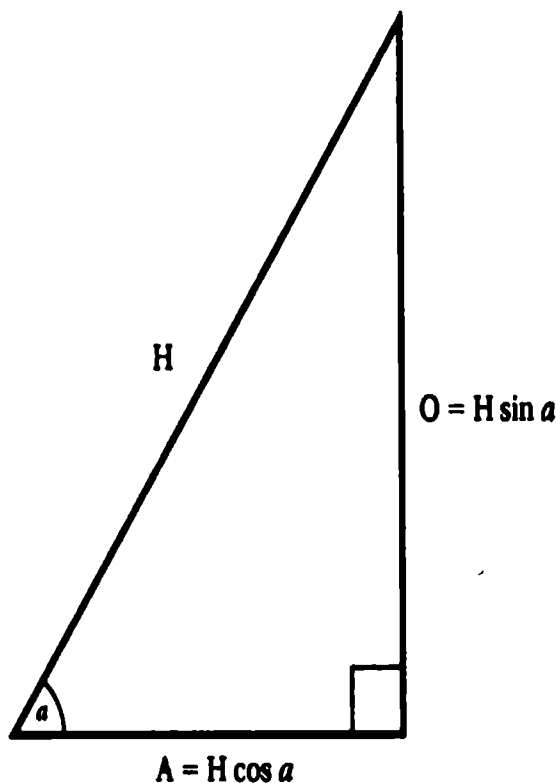
$$O^2 + A^2 = H^2$$

پاشان ئەگه ر بیت هه ردوو لای ئەم هاوکیشه بیه دابه شی H^2 بکه ین، ئه وه ده بیینن که:

$$\frac{O^2}{H^2} + \frac{A^2}{H^2} = 1 \text{ OR } \left(\frac{O}{H}\right)^2 + \left(\frac{A}{H}\right)^2 = 1$$

له بهر ئه وهی که $\sin(\theta) = \frac{O}{H}$ & $\cos(\theta) = \frac{A}{H}$ ، ئه وه به له جی دانانه وهی ئەمانه ده گه ینه: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ئەم به بۆ هه موو گوشه بیه ک θ راسته. دیاریشه ئەمه که شتیکی به سووده، که

په یوه نډیبه کی به هیزه له نیوان یاسای فیساکورس و نه خشه
 سینگوشه ییبه کان، هه لږه ته به بی یاسای فیساکورس نه مه بوونی نه ده بوو.
 کهر تیبنی بکه یین، له یاساکه هر یه که له ساین و کوساین دووجان،
 نه مه ش واته نیمه قسه له سهر شتیکی ده که یین که چوارگوشه یه!



ریساکانی ساین و کوساین

Sine and cosine rules

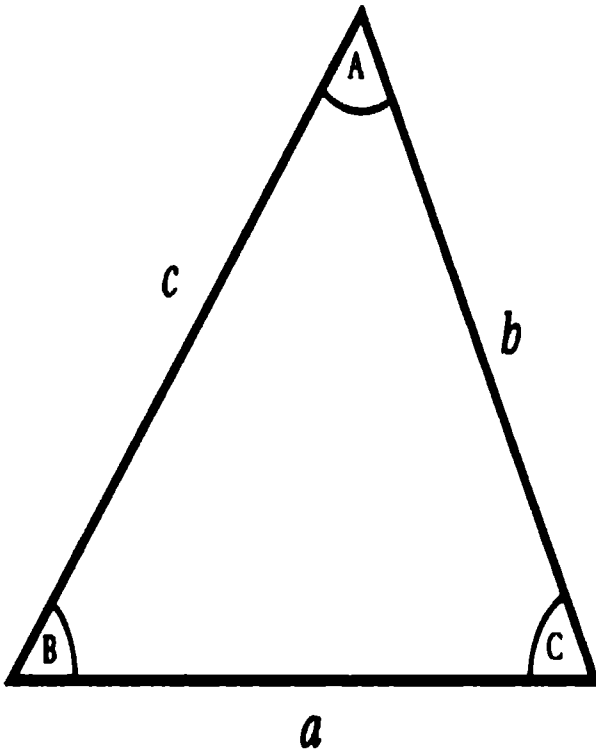
ئیمه تا ئیستا تهنیا باسمان له یاساکانی ساین و کوساین کردوو. بۆ سینگۆشه‌یه‌ک که گۆشه‌یه‌کی پله 90 هه‌یه، واته سینگۆشه‌ی گۆشه وه‌ستاو. به‌لام رهنه‌گه‌یه‌کێک له‌و ئیوه به‌رسیت: چی نه‌گه‌ر سینگۆشه‌که‌مان سینگۆشه‌یه‌کی گۆشه وه‌ستاو نه‌بوو؟ واته گۆشه‌ی پله 90 نه‌بوو؟ له راستیدا یاسا بۆ ئه‌ویش هه‌یه، بۆ دزینه‌وه‌ی هه‌ر یه‌کێک له دریز و گۆشه‌کانی، نه‌گه‌ر مه‌به‌ستمان بێت. بۆ سینگۆشه‌یه‌ک که له خواره‌وه‌ش وینه‌که‌ی دراوه، ئه‌مه یاسا‌که‌یه‌تی:

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c} \quad ; \quad \text{ئهمه یاسای ساین}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C) \quad ; \quad \text{یاسای کوساین}$$

نه‌گه‌ر C نرخی 90 بێت، ئه‌وه $\cos(90) = 0$ ، دیاره نه‌گه‌ر

نهمه‌ش پووبدات له یاسای کوساینه‌وه ده‌گه‌ینه‌وه به یاسای فیساگورس!



پیسای گوشه‌ی دووهنده

Double angle formulae

پیسای (فۆرموله‌ی) گوشه‌ی دووهنده، بریتیه له و پيسایه‌ی که رینگمان دهدات گوشه‌یه‌ک بکه‌ین به دوو به‌شوه، که به جیا نیش له‌سه‌ر هر گوشه‌یه‌کیان بکه‌ین به به‌کاره‌یتانی نه‌خشه سینگوشه‌یه‌کانی ساین و کۆسان. یه‌کیک له سووده‌کانی ئه‌و پيسایه‌ی نه‌وه‌یه، هر به‌شه گوشه‌ک له نیوان 0 و 90 پله دایه. ئه‌و پيسایه‌ی سه‌رچاوه‌ی په‌یدابوونی به‌ه‌زی نه‌وه‌ی کاتیک له ناو سینگوشه‌یه‌ک به شیوه‌یه‌ک؛ راسته‌هیلێک له یه‌کیک له گوشه‌کانه‌وه ده‌کیش بۆ لایه‌کی به‌رامبه‌ری گوشه‌ک، که ئه‌و راسته‌هیلێه گوشه‌ک له‌ت ده‌کات. پيساکانیش به‌و شیوه‌ن:

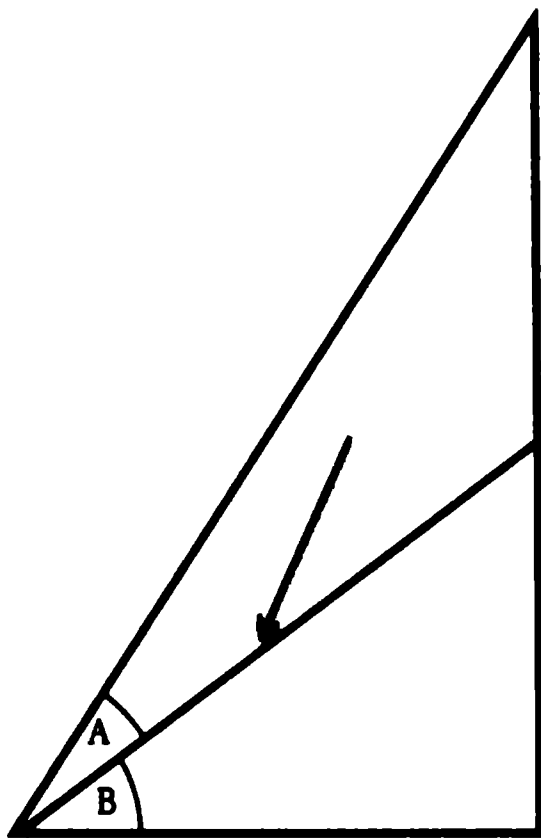
$$\sin(A + B) = \sin(A) \cos(B) + \sin(B) \cos(A)$$

$$\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B)$$

ئه‌گه‌ر A و B هر دووکیان به‌یه‌کسان دانتین، ئه‌وه:

$$\sin(2A) = 2 \sin(A) \cos(A)$$

$$\cos(2A) = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1$$



راسته هیله که، گوشه که ی له ت کردییه بو دوو گوشه A و B.

ناساندنی هاوچینی-هاوچەشنی

Introducing symmetry

زۆر کەس وا بیردەکاتەوێه که هەندیک وێنە هەن، چ دەستکرد چ لە سروشت، چ پەيوەندییەکی بە بیرکارییەوێه هەیه، یان وەک هەندی جۆری باندە. لە بیرکاری بابەتیک هەیه پێی دەوتریت "هاوچینی-هاوچەشن یان هاوشان"، که هەر شتیک یا وێنەیک پێی دەوترین هاوچەشنە ئەگەر هاتوو شتەکه یان وێنەکه جەوهرەکهی هەر وەک خۆی بمینیتەوێه کاتی جینگۆرکیتی پێ دەکەین. لە ئەندازە زانیدا، جینگۆرکیتی، بەکار دێت بۆ پێناسەکردنی هاوچەشنی بەهۆی "گۆرینی جیگا یان ئاراستە" بە پاراستنی درێژی یەکه کانی شتەکه، که ئەم جینگۆرکیتیەش وێنەدانەوێه. تەوهرە ی وێنەدانەوێه (Line of reflection) لە ئاھووتە ی (Space) دوو پەھەندیدا، بریتییە لە راستەھێلێک، وەیان پروتەخت لە ئاھووتە ی سێ پەھەندیدا، یان خولاندنەوێه (Rotation) بە دەوری تەوهرەکان، یان بەهۆی وەرگیران-کشانەوێه (Translation). ئەگەر جینگۆرکیتی بەسەر شتیک یان شیوہیک بینین، کاتیک شتەکه جەوهری خۆی لە دەست نادات لە جینگۆرکیتیەکه، ئەو بەو شتە یان بە شیوہەکه دەوتریت جیگیر-نەگۆر لە ژیرکرداری جینگۆرکیتیەکه (Invariant under the transformation). هاوچەشنی لە پانتایی ماتماتیک سوودی زۆرە، کاتیک هەر شتیک لە ژیر کرداریک دەکریت بە هاوچەشن سەیری بکەین، ئەگەر ئەو شتە لە ژیرکردارەکه، تاییەتمەندییە پەسەنەکهی خۆی

بپاریزیت. ئەمەش زارشتیکی گرنگە که بەکار دیت له پیناسە کردنی
گرووپەکان و کردارەکان، یان چارەسەر کردنی هەندیک له کیشە
بیرکاریەکان.



راسته هيله که، تهوهره ی وینه دانه و هیه بو شیوه که.

Translation, rotation, and reflection

کشانه وه، خولاندنه وه و وینه دانه وه

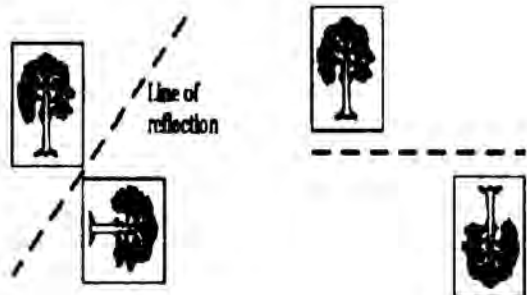
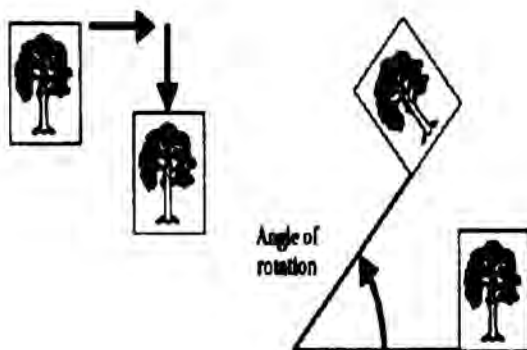
له ئەندازه زانیدا، سێ جور له هاوچه شنیمان ههیه، ئەمانه چەند ریگایه کە بۆ جیگۆرکێ شتیک به بێ ئه وهی هیچ گۆرناکاری به ک له چه وهری شته که پروویدات.

کشانه وه (Translation): بریتیه له و کرداره ی که تیدا شتیک یان وینه یه ک دهکشیت-دهخزیت بۆ ئاراسته یه کی تر، به بێ ئه وهی گۆرناکاری له گوشه و دریزی و پانی شته که پروویدات، به شیوه یی هیلێ.

خولاندنه وه (Rotation): بریتیه له و کرداره ی که تیدا شتیک دهخولیننه وه به دهوری چەند خالیک (یان خالیک) ی نه گۆر-جیگیر له ئاهووته دا-بۆشایی، دووباره له مهش هیچ شتیک گۆرناکاری به سه ر نایه ت له چه وهری شته که، به لکو ته نیا له پرووکهش دهگۆریت نه وه ک له ناوه روک.

له پۆتانی دووره هه نیدا، وینه دانه وه (Reflection): بریتیه له دووباره کردنه وه ی یان بیننه وه ی وینه یه ک یان شتیک به دهوری ته وه ره ی وینه دانه وه که، وه ک چۆن ئیمه خۆمان له ئاوتنه دا ده بینین. وینه دانه وهش، به دهوری ته وه ره یه ک ده بیه ت له ئاهووته ی دوو ره هه ندی، له ئاهووته ی سێ ره هه ندی، پرووته خت رۆلی وینه دانه وه که ده بینیت. وه ک: بالیکێ په پوله، وینه دانه وه ی باله که ی تریه تی، وه ئه گه ر خه تیک به

ناوه راستی په پوله که بکیشین، نه وه نه و راسته هیله ده بینه راسته هیله
 وینه دانه وهی نیتوان هر دوو بالی په پوله که. له هه موو نه و پرۆسانه دا، هیچ
 شتی که له دریزی و پانی و یان گوشه ی شته کان ناگوریت.



چهند پوههکان

Polyhedra

نیمه له شاهووتهی دوو پههندی، چهند لایهکانمان هه بوو. له شاهووتهی سنی پههندی، چهند پوههکانمان هه یه. له شاهووتهی سنی پههندی نیمه سنی چه مکه مان هه یه: دریزی، پانی و به رزی. بۆ ئه و شیانتهی دوو پههندی، پوهه رمان (Area) هه یه. بۆ ئه و شیوه و شتانهی سنی پههندی، قه باره مان (Volume) هه یه که ده وردراوه به رووته خته کان و چه ماوه کان. وهک چۆن چهند لای پیکمان هه یه، به هه مان شیوه چهند پوههکان؛ شیوهی ریک و نارپیکیان هه یه. بۆیه خیزانیک له چهند رووی پیکمان هه نه، که ناسراون به ناوپره ئه فلاتونیه کان (Platonic solids). چهند پوههکان ته نیکه سنی پههندی، که له چوار روویان زیاتر پیکدیت، که تیدا ته نیا لایهکان یه کتر ده برن.

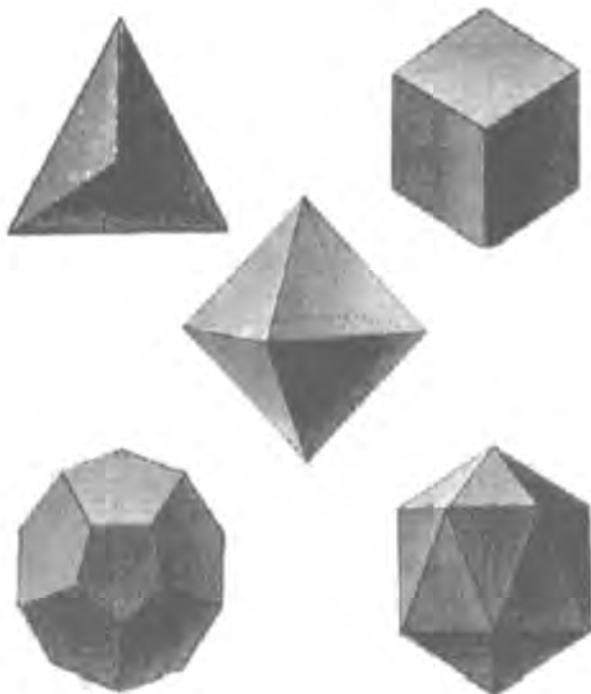
- چوار پوو (Tetrahedron): چوار رووی هه یه، هه رووهک سینگوشه یه کی سنی لایه کسانه.
- شش پالوو (Cube): شش رووی هه یه، هه رووهکی چوار لایه کی ریکه.
- هه شت پوو (Octahedron): هه شت رووی هه یه، هه رووهکی بریتیه له 5 لای ریک (Pentagon).
- دوانزه پوو (Dodecahedron): دوانزه رووی هه یه، هه رووهکی بریتیه له سینگوشه ی سنی لایه کسان.

• بیست پوو (Icosahedron): بیست پووی ههیه، ههه

پوهکی بریتیه له سینگوشه ی سی لایه کسان.

به دنیایی، زور جزو و شیوه ی تری چند پوو مان ههیه، به جزو ریک

زیاتر له ژماره ی چند لایه کان.



ریزه‌بندی-کاشییه به‌ندکردن

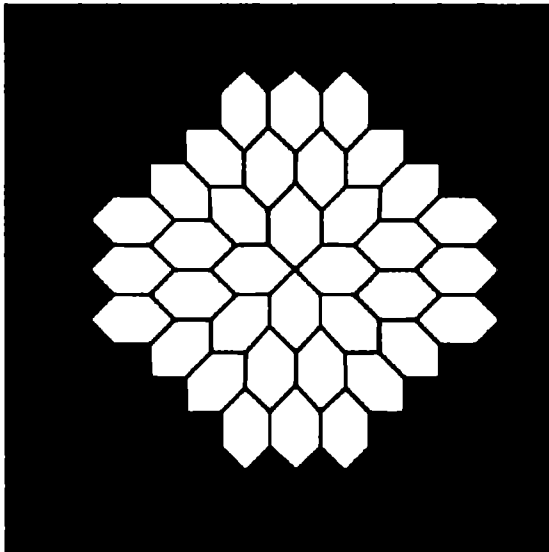
Tessellations

شپوه دوو ره‌ه‌ندییه‌کان، پیمان ده‌وترین ریزه‌بندی-کاشی به‌ندکردن (Tessellate) نه‌گر هاتوو تواندرا نه و شپوانه پیکه‌وه بلکیندین به شپوه‌ی لابه‌لا بی نه‌وه‌ی هیچ بوشاییه‌ک له‌م پیاووسانه⁶⁵ دروست بیت له کاتی رو‌پوشکردنی ناوچه‌که یان ناوچه‌یه‌ک. له‌م ریزه‌بندی کردنه، یه‌ک شپوه به‌کاردیت، نمونه به‌س چوار لا به‌کاردینین یان هر شپوه‌یه‌کی تر. یه‌کینک له شپوه‌کان که ده‌تواندیریت پیکه‌وه‌بلکیندین به‌و شپوه‌ی وتمان، بریتییه له چند لایه ریکه‌کان، وه‌ک: چوار لا و شه‌ش لا، که ده‌تواندیریت کاشییه به‌ندبکیریت، وه‌ک له وینه‌که‌شدا دیاره.

ریزه‌بندی ئالوزتر و وردتر، ده‌کیریت دروستبکیریت به‌ه‌زی پیکه‌وه‌ گریداندانی چند شپوه‌یه‌کی لیک جیاواز. ساده‌ترینیان، زانراوه به‌چاندنی ده‌وری (Periodic Tilings)، که شپوه‌یه‌کی هاوچه‌شسه به‌ه‌زی کشانه‌وه-وه‌رگیران. نه‌وه‌ش واتای نه‌وه‌یه: له‌و ریزه‌بندکردنه کلیشه- شپواز هه‌یه، نه‌و کلیشه‌شانه‌ش (Pattern) ده‌تواندیریت به‌چوری جیاواز ئاراسته‌بکیریت.

⁶⁵ پیاووسان: لکاندنی شتیک به‌شتیکدا.

له جوړه جیاوازه کانی چند پوهه کسان، واته شیوه سنی
 په هندیه کانی، تنیا شش پالو شو توانایه هیه که به کار بهیندریت بڼ
 ریزبهندی کردن له ناهووتی سنی په هندیدا به په چاوکردنی شو
 مه رجانهی باسمانکرد، به لام نهگر بیت و رڼچینه چند پوه زور
 نالوزه کانی، شوو نهستم نیسه شو کاره بکریت، وه دهگریت بگینه ناکوتا
 ریزبهند-کاشیه بهنکردن که پزی دهوتریت: شاهنگ (honeycombs).
 نهمش گرنگه له (crystal chemistry)، کاتیک سه ره کانی چند
 پوهه که نامازن بڼ شوینی نه تومه کانی له کریستاله که. شیکردنه وهی
 شاهنگه کانی ده ریده خات که 230 ریزبهندی سه ربه خڅ، دهوری مه ودای
 شیاوی پیکهاته کانی کریستاله کانی ددهن.



لکاندنی پنروز

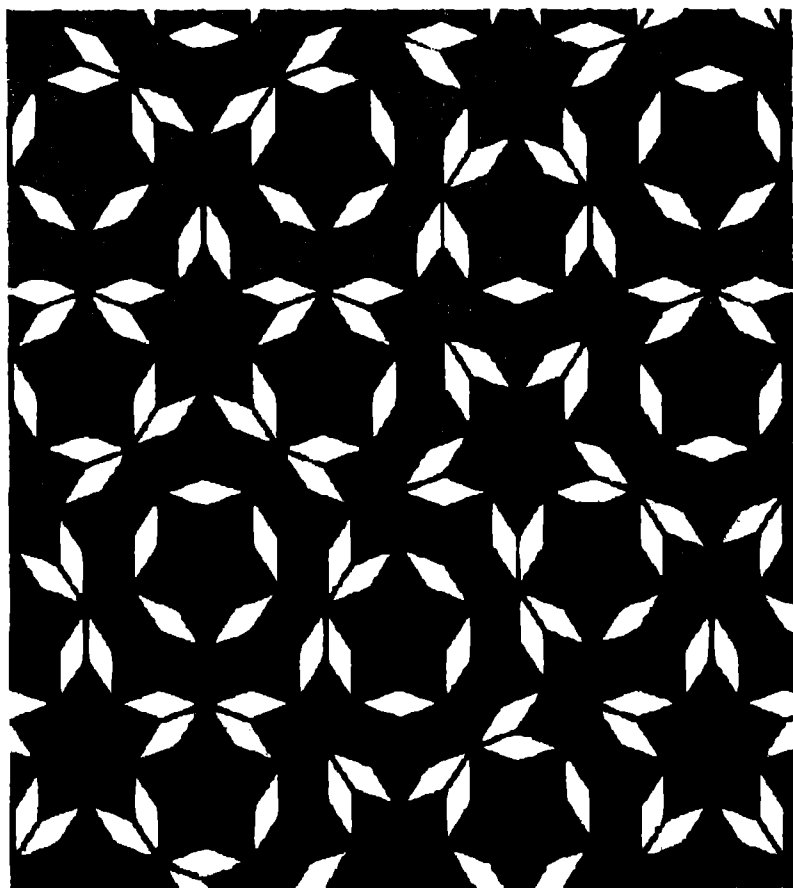
Penrose

لکاندنی پنروز⁶⁶ بریتیه له پۆلیکی تایبته له لکاندنی دوو جوړ شپوهی سه ره تایی لیکجیاواز. ئەم لکاندنه له دهووبه ری سالی 1870 له لاین فیزیازانی تیوری "پوگر پنروز" داهینرا. له لکاندنه دا، کلیشه دووباره نابیته وه به شپوهی خول. ئەوهی جیگای ئاماژه پیکردنه، ئەم شته پروته (په تیه) سه لیمندراوه که چند به کارهیتانیکی سروشتی هیه. له سه ره تاکانی 1980، زانستخوازه مه تریاله کان، پیکهاته په کی خولییان داهیتا که پیی دهوتریت: نیمچه کریستال (Quasicrystal) له گهل تهفسیریکی بیرکارییانه. ئەمانهش دهتواندیریت به کاربهیتدیریت وهک روپوشینکی پتهو بۆ مادهکان، که بهرکهوتنی زور لاوازی هیه.

سادهترین پنروز که دروستکراوه له بهکارهیتانی له پزینه پی قه به و له پزینه پی لاواز ("fat" rhombus and a "thin" rhombus) وهک شپوهی سه ره کی، وهک له وینهی خواره وه نیشاندراوه. له پزینه، بریتیه له شپوهیهک که چواری لای یه کسانی هیه، به جوړیک که هر جووتیکی

⁶⁶ سیز روجه پینروز (8ی ئایی 1931) فیزیکزان، بیرکاریزان و فهیلهسوفیکی به ره چه لهک ئینگلیزه. پروفیسوره به هالگری ناویشانی روز بیته له پهیمانگای بیرکاری له زانکوی ئوکسفورد. پینروز ناسراوه به نیشهکانی له دنیای فیزیای بیرکارییانه، به تایبته کارهکانی له بواری تیوری گویره پی گشتی و کوزمولوجیدا. چهنسین خهلاتی وهرگرتوه له وانه: خهلاتی ولفی سالی 1988 له فیزیا، هاوکات له گهل ستیفن هوکینگ پیکه وه له سه ره تیگهشتیان له گهردون.

لایه بهرامبهره کان ته ریښ. شتیک که له م باریبه وه نه زانراوه، نه وه یه: ده کړیت شپوه یه ک (ته نیا یه ک شپوه) بدوزریته وه که بتواند ریت پیکه وه بندریت بو دروستکردنی شتیکی له م شپوه به هه مان نه و تایه تمه ندیبه ی ئیستا؟



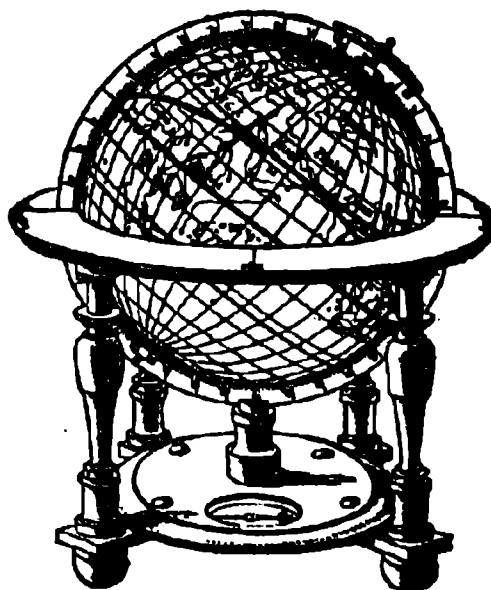
گړ

Sphere

گړ، بریتیه له شپوهیه کی سې په هندی که هاوتای بازنه په له شاهووتهی دوو په هندی، که به ته وای شتیکی خری ناو پته وی نه اندازه یی. پووی گړ بیرکاریانه پیناسه کراوه وه کوو کومه له خالی که هموویان همان دووریان 2 هیه له خالیکی دیاریکراو، به لام له شاهووتهی سې په هندی. هم دووریه 2 بریتیه له نیوه تیره ی گویه که، وه خاله دیاریکراوه که، بریتیه له چه قی (ناوه راست) گویه که. به دریزترین راسته هیلی ناو گویه که، که دوو خالی به رام بهر به کی گویه که به په که وه ده به سستیته وه و به چه قی گویه که ش تپه په دیت و دریزیه که شی دوو نه ونده ی نیوه تیره ی گویه که په، دهوتریت تیره ی گویه که. نه گړ گویه که، راگیر که ریکی هیت له دهوری چپوه که ی، بۆ نمونه هیلی جه مسه ری زه وی، نه وه هر شوینیک له سه ر پوه که ی ده تواندیت وه سفکریت و دیار بکریت به هزی دوو گۆشه وه. له زه ویدا، نه و هیلانه وه که هیلی پانی و هیلی دریزی ناسراون. هیلی پانی (Latitude) برتیه له گۆشه ی نیوان نه و هیلی که به ستر او ته وه به شوینه که بۆ چه قی گویه که، که وه که تیشکی که، وه که ته وده ی سه ر که ی. هیلی دریزی (Longitude) برتیه له و گۆشه ی دهوری ته وده که، له نیوان تیشکی هیلی پانی و هیلی که خالیکی پیناسه کراوی ناشکراوا، وه که هیلی سه رته نیای دریزی زه وی (Prime Meridian). پووبه ری گشتی گړ، به هزی نه و فوړموله یه وه که

ده کاته: $4\pi r^2$ ههژمارده کریت. رووبه ری گۆ ده کاته: 4π کاتیک نیوه تیره ی گۆیه که 1 بیت. به هۆی هیله کانی دریزی، کاتی سه ر زه ویمان پین دیاری نه کریت و هیله کانی پانیش توانای نیشاندانی گهرمیان هه به له سه ر زه وی، چونکه هیلی که ماره یی زۆرتیرین تیشکی خۆری به رده که ویت.

نه گهر به هۆی رووته ختی که وه، گۆیه ک بکهینه دوو به ش-دوو نیوه گۆ (Hemisphere) و کاتیک رووته خته که به چه قی گۆیه که دابروات، نه وه رووته خته که له بازنه یه ک گۆیه که ده بریت که پینی دهوتریت بازنه مه زنه (Great circle).



ئەندازەى نا-ئىقلیدى و نا-كلاسیكى

Non-Euclidean and non-classical geometries

تەۋارى ئو ئەندازانەى كە ئىقلیدى نین، پىان دەوتریت ئەندازە نا-ئىقلیدىبەكان. ئەندازە نا-ئىقلیدىبەكانىش جىاوازن لە ئەندازەى ئىقلیدى. سەرچەم ئو ئەندازەبەى لە قوتابخانە دەباخوینین، ھەموویان ئەندازەى ئىقلیدىن. پەیداوونى ئەندازەكانى تر دەگەریتەوہ بو پیشكەوتن لە زانستەكانى تر، واتە ئەندازەى ئىقلیدى تەنیا لە ئاھوتەى دوو پەھەندى كارى پى دەكرا، ئەم ئەندازەبەىش خۆى لە 5 بەلگەنەویست دەبىنیتەوہ كە پىشتەر باسماں كەرد. بەككە لە ئەندازە نا-ئىقلیدىبەكان برىتیبە لە ئەندازەى كۆ (Spherical geometry). لە ئەندازەى ئىقلیدى وتماں 'ھیل' شىتىكى راستە، بەلام لە ئەندازەى كۆ ھیل برىتیبە لە بازنە! كە بازنەكەش بە قەد چىوہى كۆبەكە دەبىت، واتە بازنە مەزنە (Great circle). لە ئەندازەى ئىقلیدى وتماں ئەگەر لە دەرەوہى راستەھىلىك؛ خالىكان ھەبىت، ئەوہ راستەھىلىكى تر ھەبە بو خالەدا دەرۋات و تەرىب دەبىت بە راستەھىلەكەى تر، بەلام لە ئەندازەى كۆ، ئەگەر لە خالىك لە دەرەوہى راستەھىلىك (لە ئەندازەى كۆ) ھەبىت، ئەوہ ھەر راستەھىلىكى تر بەو خالە دا بېرات، بى يەك و دوو راستەھىلەكەى تر دەبىت! واتە لە ئەندازەى كۆ ھىچ دوو راستەھىلىك پىكەوہ تەرىب نابن لە كاتىك راستەھىل لەو ئەندازەبە برىتیبە لە بازنە مەزنە. ئەندازەى ئىقلیدى دەكرىت دابەشبكرىت بو دوو بەش، ئەوانىش ئەندازەى چەماوہى ئەرىنى و ئەندازەى چەماوہى

نه رینتی، که ئەمانەش بە ئەندازەى نا-کلاسیکییش ناو دەبرین. خالی هەره جیاواز لەمانە، ئەوەیە: لە ئەندازەى ئیقلید کۆى گوشه کانی ناو هەوى سینگۆشه یەک بە تەواوى دەکارته 180، بەلام لە ئەندازەى نا-کلاسیکی بەو شیوهى نییه، وەک لە ئەندازەى گۆ، کۆى گوشه کانی ناو هەوى سینگۆشه زیاتره له 180 پله! وه له ئەندازەى بېرگه ی زیاد (Hyperbolic) که مته له 180 پله.



Zero curvature



Positive curvature



Negative curvature

ئەمانە بەکاردهیند ریت بۆ تەفسیری ئەم گەردوونه، ئایا فراوانبوونی گەردوون، بە کام لەم مۆدیلانەیه؟ وه چەندین پرسى تر...

پرسی پێچانهوهی گۆیهکان

Sphere-packing problem

پرسی -کیشەى پێچانهوهى گۆیهکان، یه کینک بوو له کیشهکانى سهدهکانى پابردوو بۆ سهردهمی کیهلەر، که میژوووهکی سهرنج راکیش و دهولهمندى ههیه. کیشهکه دهبارهی پیکهستن و دانانى چەند گۆیهکه، واته ئەگەر چەند گۆیهکهمان هه بێت، ئەوه پێوسته ئەو گۆیهانه چۆن دابندریت بۆ ئەوهی که مترین بۆشایی دروست بێت له م کاره دا، ئایا چەند بۆشایی داگیر دهکەن؟ له گهله ئەمەش، دیاره ئەمه په یوه ندى به دوکانیکى میوه فرۆشى هه بووه، که یه کینک له میوهکانى بریتیه له پرتهقال، که دهیه ویت پرتهقالهکان بۆ جۆریک له ناو کارتۆنه که جی بکاتهوه که که مترین بۆشایی دروست بێت. له م پرسه له بری پرتهپال، گولهتۆپ بۆ سهرنج خسته سهر ئەو کیشهیه به کارهات. له سهدهی 17، گهردووناسی ئەلمانی "جۆهانس کیهلەر"⁶⁷ گریمانەیهکی کرد، له م پرسهش پیکهستنیکی ساده ئەنجامدرا به هۆی دانانى گۆیهکان به شیوهیهک چەند ریزیک، که ریزهکانیش پیکهوه شیوهیهکی دووجا (چوارلای یهکسان) دروست دهکەن، پاشان دانانى چینیکی تر له ئەو شیوانهیهی که بۆشاییهک دروست بووه

50 کیهلەر، بیرکاریزان و گهردووناس و ئەستیرهناسی ئالمانی بوو. رۆلیکی سهرهکی ههبوو له شۆرشى زانستى سهدهی 17 هه مدا. ناوبانگی کیهلەر دهگه رینهوه بۆ یاساكانى لهبارهی جولهی ههسارهکانهوه که چەندین بهرهمی هه بوون له بواره جیا جیاکان.

(وهك ریزکردنی هیلکه له سهر په کتري)، پرسپاره که نه وه په: نه و توپانه له ناو پاکه تیک-کارتونیک چند شوین ده گرن؟ بق نمونه نه گهر چوار توپی



بلیار به شینو په کی چوارگوشه یی پیکه وه بلکینین، پاشان توپیکي تر بخینه سهر نه و چوار توپه، نه گهر نیستا بینین له هر توپیکي چینی خواره وه، چاره گیکي لی بهیلینه وه، وه توپه که ی چینی سهره وهش نیوه ی بهیلینه وه (وهک له وینه کانی سهره وه)، نه وه ده گینه درنه جامیک، نه و نه جامه نه وه په توپیکي ته و او ده کات به هموویان. نه وه ی پتی ده گین له م میتوده، نه وه په که پیچانه وه ی کومه لیک توپ 74% و شتیک زیاتر له و بوشاییه که ده گریت که توپه کانی له ناو ده پیچینه وه! نه مهش به هوی زانینی په که کانی نه و شته ی که گویه کانی له ناو داده نین. سه لماندنی نه مهش به هوی یارمه تی کومپيوته ره وه بووه که له سالی 2003 به کزتا گه یشت.



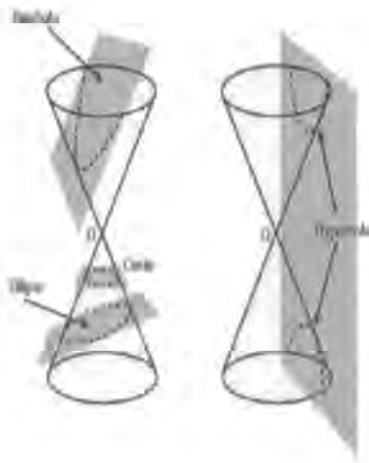
برگه قوچه کیه کان

Conic sections

برگه قوچه کیه کان دهگه پسته وه بۆ سهرده می گریکه کان، هر وهک راسته هیله کان و پروته خته کان. گریکه کان برگه قوچه کیه کان یان بهو شیوه پیناسه کردوه: کاتیک قوچه کیک دوانیمان هه بیت و پروته ختیکمان هه بیت، ئه وه برگه قوچه کیه کان له ئه نجامی برینسی قوچه که کان به هوی پروته ختیکه وه پهیدا ده بن، به لام له ئیستا برگه قوچه کیه کان به جه بریانه پیناسه کراون و لیکولینه وه یان له سه ده کریت، یانیش له رینگه ی به کارهتانی یاسای دوری له پروته ختی پۆتاندا.

برگه قوچه کیه کان، بۆ تیکه یشتمان له ریرهوی هه ساره کان یارمه تیمان ده دن، که جوله یان دیاریده کریت به هوی هیزیک، که ئه وه هیزه هاو پیزه یه له گه ل دوو جای دوریه که یان. له ئاسماندا، هه ساره کانی کۆمه له ی خۆر به دوری خۆردا ده خولینه وه له چنده ها خولگه که شیوه ی برگه ی ناته واو هیلگه یی وه زده کرن، وه که رۆژ پۆلی تیشکو ده بینیت. ئه وه پروته خته چۆن و به چ شیوه یه ک قوچه که ده بریت، ئه وه چهند باریکی جیاوازی لی دروست ده بیت، ئه وانیش هر یه که و سیفته و شیوه یه کی تایبه تی هه یه، که ئه مانه ن:

- دروستبوونی بازنه (Circle): نه‌گه‌ر بیټ پروته‌خته‌که به شیوه‌یه‌کی ناسۆیی قوچه‌که‌که بېریت.
- برگی‌هاوتا (Parabola): کاتیک پروته‌خته‌که به شیوه‌یه‌کی لار قوچه‌که‌که ده‌بریت وه ته‌ریبه به قوچه‌که‌که، به‌و مرجه‌ی پروته‌خته‌که به خالی O تپه‌رنه‌بیټ.
- برگی‌ناته‌واو (Ellipse): کاتیک پروته‌خته‌که به شیوه‌یه‌کی لار قوچه‌که‌که ده‌بریت، وه پروته‌خته‌که ته‌ریب نه‌بیټ به قوچه‌که‌که و به خالی O دا تپه‌رنه‌بیټ.
- برگی‌زیاد (Hyperbolic): برگی‌زیاد له برگی‌ناته‌واو ده‌چیت، کاتیک پروته‌خته‌که و گوشه‌ی پروته‌خته‌که که‌متره له گوشه‌ی قوچه‌که‌که.



باریکی شاز له برگی قوچه‌کیه‌کان که بېریتیه له تپه‌ر-بوونی پروته‌خته‌که به خالی O، نه‌ویش یان پروته‌خته‌که وه‌ک خـوژی ده‌مینیت‌وه و گۆرانکاری دروست ناکات، یان راسته‌هیلک دروست ده‌بیټ.

پووتەختی پۆتان (دیکاری)

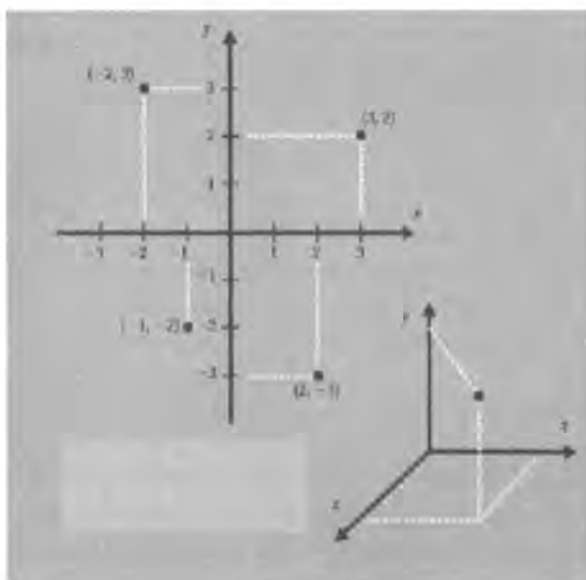
Cartesian coordinates

له بیرکاریدا، پووتەختی پۆتان یان پووتەختی دیکاریتیشی پیندەلین، بریتییه له تەوهرهیهکی دوو رههندی یا سێ رههندی، که تیدا وهسفی شویینی خالیک دهکهین له ئاهووتهدا-بۆشایی. له ئاهووتهی دوو رههندی، خال، له جووتیک ژماره پینک دیت. ههلبهته وهسفی ئه و خاله له پووتەخت (Plane) به هزی چهقی پووتەختکهیه، ئه ویش خال بنه رتهی پیتی دهلین، که دهکاته: $(0,0)$ ، ئه م پووتەخته له دوزینه وهکانهی فهیلهسوفی فه رهنسی دیکارته⁸⁸ له سه دهی 19 هه م. پووتەختی پۆتان دواتر له نه خشی جیهان و GPS به کارهات و ئاسانکارییهکی زوری بو مرۆقایه تی کرد.

⁸⁸ رینن دیکارت (به فه رهنسی *René dekart*) (له دایکبوون 1596- کۆچی دوا یی 1650) فهیلهسوف، بیرکار و شاره زای فیزیکی و نووسه ری خه لکی فه رهنسا بوو که زیاتر ته مه نی له ولاته یه کگرتووکانهی نیزلاندا (هوله ندا) پابوارد. نازناوی (باوکی فه لسه فه ی نویی) پندر و زۆرینه ی گه شه ی فه لسه فه ی پووتەختی که له پووتەختی ئه مرۆشدا ده بیینین، درێژه ی نووسراوه کان و بیره وه ره کانه ی ئه وه. به تایبهت په رتوکی (پامانگه لیک له فه لسه فه ی ئه ولادا) ئیستا که ش وه ک به شی سه ره کی خویندن له زانکوکانه ی فه لسه فه به کار دیت. کاریگه ری دیکارت له سه ر بیرکاری به پوونی دیا ره: سیسته می پۆتانه کانه ی دیکارت (Cartesian coordinate system) پینگه ده دات شیوه هه نده سه یه کان له سه ر هاو کیشه جه بریه کان به یان بکری ن. دیکارت وه ک باوکی ئه ندازه ی شیکارانه ناسراوه. هه روا دیکارت به یه کیک له ئه ندامانی شو رشی زانسته ی ده زانن. (ویکیپیدیا)

له پروتهختی دوو رهه‌ندیدا، خال بریتیه له جووته ریکخراویک به شیوهی (x, y) ، نهمهش واتای نه‌وه‌یه x یه‌که بجولن به شیوهی ناسویی (پاست یان چه‌پ) و y یه‌که بجولن به شیوهی ستوونی (سه‌ری یان خواری) و له کوئی به‌یه‌ک گه‌یشتن، نه‌وه خالیک ده‌نووتین له پروتهختدا.

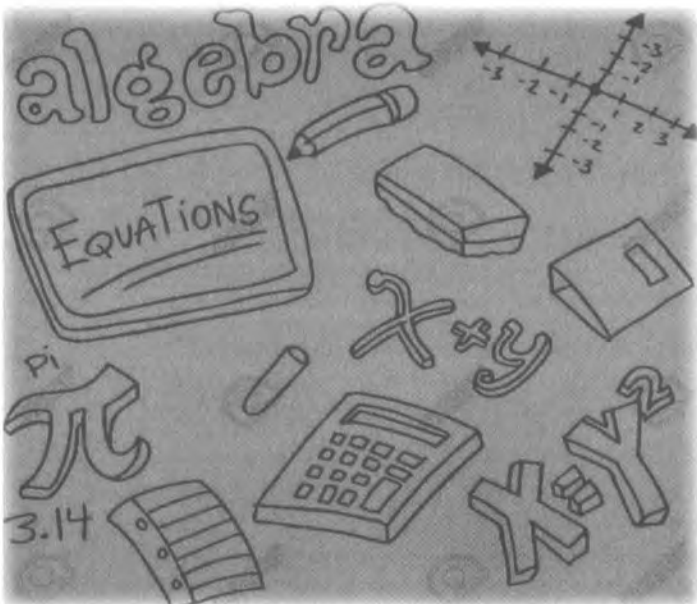
به‌همان شیوه، له شاهووتهی سی رهه‌ندی (x, y, z) نه‌ویش به‌کاردیت بۆ نواندنی نه‌و شتانهی سی رهه‌ندیان هه‌یه، وه‌ک گۆ. بیرکاریزانه‌کان هه‌ر به‌وه نه‌وه‌ستان، به‌لکو توانیان شاهووته‌یه‌کی زیاتر له 3 رهه‌ندی ته‌فسیر بکهن و بیردۆزه‌کان له باره‌یان‌وهه بخه‌ته روو. واته n رهه‌ندی، که ده‌کریت 4 یان 10 یان 15 بیت یان هه‌ر ژماره‌یه‌کی ته‌واوی نه‌رینی.



به‌شی پینجه‌م

جه‌بر

Algebra



جهبر

Algebra

جهبر⁶⁹ لقیکی سسه ره کییه له بیرکاریدا، به لام له گهله شهوش سه رده کیشته ناو زوره بی لقه کانی تر، بویه ده توانین بلین، پیشالی به سته وهی هه موو بیرکارییه. جه بریش له ناو خزیدا ده بیته چند به شیک، سه ره کیتربیان بریتیه له جهبری سه ره تایی، دواتر جهبری پوخت، وهک: تیوری گروپ و تیوری نه لقه. له جهبری سه ره تایی هونه ریک هه یه، نه ویش ده سستکاری کردنی زانراو و نه زانراوه کانه، که دروست کردنی په یوه ندییه که له نیوانیان، زانراوه کان زور جار ده گورین بۆ نه زانراویک که به پیتیک یان هیمایه ک گوزارشتیان لئ ده کن، زور جار به گشتی به x نامازه ی بۆ ده که یین. واته هیمایه جیگای ژماره کان ده گریته وه!

نمونه: من خۆم 5 دانه په رتوکم هه بوو، براهه م چند په رتوکیکی تری بۆ هینام، که کۆی گشتی په رتوکه کانم بوو به 15 په رتوک. نه گه ر به وردی سه یر بکه یین 'براهه م چند دانه په رتوکیکی بۆ هینام'، واته جارئ نازانین چند په رتوک بووه، بویه نه و (چند په رتوکه) که ژماره که ی نازانین به x گوزارشتی لئ ده که یین، دواتر ده لیت: کۆی گشتی

⁶⁹ جهبر له داهینانه کانی شارستانییه تی عه ره به، له سه ر ده سستی خوارزمی. به هژی بوونی په یوه ندی بازارگانی له نیوان نه وروپییه کان و شارستانییه تی عه ره بی، نه و زانسته کویزرایه وه بۆ نه وروپا، بویه پیته کانی "ال" هه ر له گهله مایه وه له کاتی وه رگیرانی، بویه بووه به Algebra

په ټوکه کانه بـروه به 15، نه مه ش واته: $x + 5 = 15$. نه مه پنیسی دهوتریت هاوکیشهی جـبری. نه وهش دیاره که نرخـی $x = 15 - 5$ واته $x = 10$. جـبر به شیوه کی گشتی دهست تـنوهردانه له نیوان ژماره و هیماکان. له بیرمان نه چیت، هاوکیشهی جـبری⁷⁰ نه و هاوکیشهیه که نه زانراویکی تـیدایه، وهک نه مهی سهروهه. دواتر په پیتا په پیتا شته کان گوره تر و بهره و نالوزبوون دهچن هر له ژیر ناوی جـبر.

x

⁷⁰ له پال هاوکیشهی جـبری، هاوکیشهی ناچه بریش هیه، هاوکیشهی ناچه بری بهس ژماره ی تـیدایه وهک: $23 - 3 = 20$

هاوکیشهکان

Equations

هاوکیشه، برتیه له ده برینکی بیرکاریانه که تیدا دوو بر له نرخدا یه کسان ده بن به یه کتر. یه کیک له سیما هره دیاره کانی هاوکیشه، نه وه به که هیمای یه کسانه ی (=) تیدا به. بق نمونه: $2+2=4$ نه مه هاوکیشه به که. وهک وتمان، ده کریت هاوکیشهکان هیمای له خوبگرن. هاوکیشه هر تاییه نیه به بیرکاری، به لکو به زانسته کانی تریش، وهک له فیزیقا، هاوکیشه به ناوبانگه که ی نه نشتاین: $E = mc^2$. یان هر بق تیگه شتینکی ناسانتر $x + 2 = 20$ ، نه مانه گشتی هاوکیشه. له جه بردا نهو هاوکیشهانی هیمایه که ده گرنه خوی بیان دهوترین هاوکیشه جه بریه کان، هیماکانیش زور جار به پیت یان سیمبولیک هیمای ده رده بردریت که بیان دهوتریت: نه زراو، نمونه: له سه ره وه x ده بینین، یه کیک هزی لی بیت بوخوی پیتی یه که می ناوه که ی داده نیت، یان هر هیمایه کی تر.

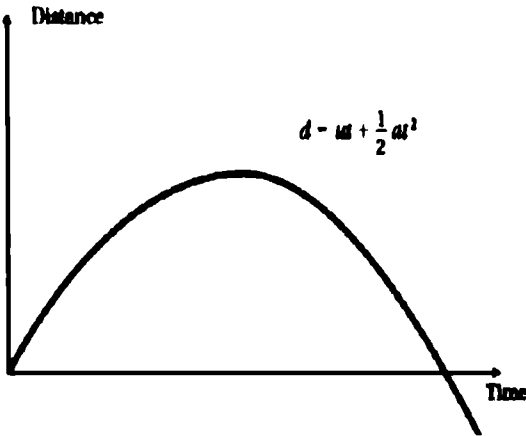
هر له جه بر چند ته کنیک هیه بق دوزینه وهی نهو نه زانراوهی له هاوکیشه که هیه، مه به ستمان نه وه به نرخ ی نهو هیمایه چیه که له هاوکیشه که دا هیه. وهک گوترا هاوکیشه هر مولکی بیرکاری نیه، به لکو له خزمه تی زانسته کانی تریش دایه، به جوریک وه سفی نهو جیهانه ی نیمه بق زوریک له رووداوه کان، گشتی به هاوکیشهکان ته فسیر ده کریت، هاوکیشه مان هیه به ناوی "هاوکیشهکانی دیارده سرو شتیه کان"

(مانگیران و پروژگیران)، که دیارده سروشتیه کان لیکده داته وه. نه گه ر نمونه یک وهرگرین، یاسای نیوتن بق جوله، یان له ئابوریدا هاوکیشی په یوهندی نرخى کالاو بق داواکاری و دابینکردنى، ریژهى باج و ریژهى داشکاندن، که ئەمانه گشتیان به هوى هاوکیشه وه هه ژمارده کرین.

هاوکیشه ده کریت زیاتر له نه زانراویک له خوی بگریت، وهک: $x + y = 3$ له گه ئه مهش، که باسی هاوکیشه ده کریت، ئه وه بیرمان بق شیکاری هاوکیشهش ده روات. به شیوهیه کی گشتی، کومه لهی شیکاری هاوکیشهیه ک، بق چوار جزر پۆلینده کریت، شیکاری هه هاوکیشهیه ک، سهه به یه کیک له و پۆلانهیه، ئه وانیش:

- i. کومه لهی شیکار، (یهک) نرخى تیدایه.
- ii. کومه لهی شیکار، زیاتر له نرخى تیدایه.
- iii. کومه لهی شیکار، نا کوتا نرخى تیدایه.
- iv. کومه لهی شیکار، هیچ نرخى تیدایه، واته کومه لهی به تال ϕ .

ئهم هارکیشهی خوارهوه له ویننهکه، به کینکه له هارکیشه ناسراوهکانی فیزییا، که په یوه نندییه که له نیوان دوریه که d که شتیک دهیپریت (له بوشایی) له گه ل خیرایی سه ره تایی u ، که هه له به ته لیره ش تاودان کاریگری هیه که بریتیه له a . ئهم چه ماوهی خوارهوه دوری بهرامبه به کات دهنوینت.



ههلسورانندی هاوکیشهکان

Manipulating equations

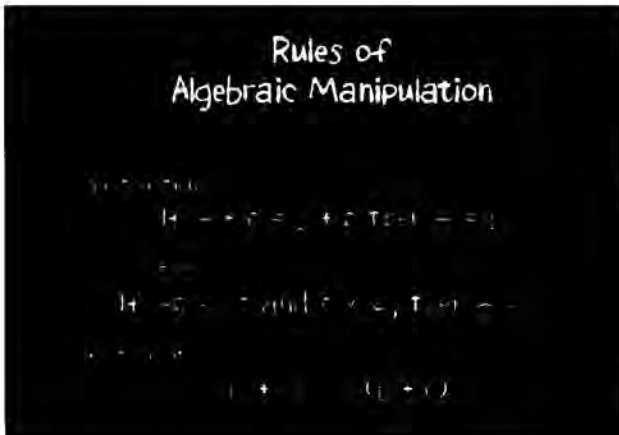
هاوکیشهکان دهکریت ساده بکریتهوه، له ههندی دوخدا شیکار بکریت بههزی بهکارهینانیان به شیوهیهکی لیزانانه و به ریگای ههههچیشن. که باس له هاوکیشه دهکین، ههلهبهته شتیکی تریش ههیه، نهویش شیکاری هاوکیشهیه. بۆ هاوکیشهکان چهند تهکنیکیک ههن بۆ شیکارکردن و سادهکردنهویان، زۆر جار دهلین: به دهستیوهردانیک هاوکیشهکه شیکار دهییت، واته تهنیا به یاریکردن به رادهکانی هاوکیشهکه به ئاسانی دهگینه شیکاری هاوکیشهکه، بهلام ئەمه بۆ ههموو هاوکیشهکان راست نییه! له هاوکیشهکان ههندیک کردار ههن نادیارن، بهلام له راستیدا بوونیان ههیه، ئەو شاردهنوه و نهووسینی ئەو کردارانه، وهک نهریتیکی هاوکیشهکان وایه. وهک له هاوکیشهکان دهبینین که هیمای جاران نانوسریت (بشنووسریت کیشه نییه). ئەگەر هاوکیشهیهک له دوو نهزانراو پیک هاتییت وهک: $x \times y = xy$ بهو شیوه دهنووسریت. له هاوکیشه به ناویانگهکهی ئەنشتاین دهبینین که نووسراوه: $E = mc^2$ که واتای $E = m \times c \times c$ ههیه. ئەم خۆلادانهش له ههندی شت له کاتی کارکردن له هاوکیشهکان تهنیا بۆ ساده دهرکهوتنی هاوکیشهکانه نهوهک شتی تر.⁷¹ بهلام ئەم شاردهنوهی کرداری 'جاران' بۆ ههموو رادهکان

⁷¹ دهتوانین هیمای (x) له نیوان دوو شت لابه‌رین کاتیک ئەو دوو شته له پووکار پیکههچن. وهک: $a \times 2$ دیاره لیتره دهتوانین هیمای 'جاران' لابه‌رین، بهلام بۆ: 2×3

راسته؟ هه‌بته نه‌خیر، ئه‌گه‌ر هه‌مان بێت: $3 \times 4 + 5 \times 6$ دیاره که لیتره
 هیمای جاران لابه‌رین شته‌که ده‌شیویت و ده‌بیته کاریکی نامه‌عقلانه،
 ئه‌م شیوه‌ی سه‌ره‌وه‌ش تووشی سه‌رلی شیوانمان ده‌کات! ئه‌ی چاره‌سه‌ر،
 چاره‌سه‌ر ئه‌وه‌یه ده‌بیت که‌وانه () به‌کاربێنین بۆ ئه‌وه‌ی له هه‌ندی
 سه‌رلیشیوان خومان لابه‌دین و تووشی هه‌له نه‌بین، به‌لام دانانی که‌وانه‌ش
 هه‌روا به‌هه‌زی خومان نییه، سه‌یری ئه‌و دوو شیوه‌یه بکه:

$$(3 \times 4) + (5 \times 6) \text{ جیاوازی هیه له گه‌ل } 3 \times (4 + 5) \times 6$$

بۆیه له جبه‌ر چه‌ند یاسایه‌ک هه‌ن بۆ ئه‌و مه‌به‌سته، که به‌ یاساکانی
 هه‌لسورانندی جبه‌ری ناسراوه، که له خواره‌وه ئاماژه‌یان پیکراوه.



دیاره که ناتوانین، چونکه ئه‌م دواته پێکه‌ه‌چن، به شیوه‌یه‌کی گه‌شتی: لابه‌ردنی هیمای
 جاران له ئیوان ژماره‌کان (نه‌وانه‌ی هیمایان نییه) ریگه‌بندراو نییه.

هاوکیشه هاوده میه کان

Simultaneous equations

هاوکیشه هاوده میه کان، بریتیه له چند هاوکیشه یه که به یه که وه، که چند نه زانراویک له خۆده گرن. نه گهر دوو هاوکیشه مان هه بیته که به و شیوهی که هاتوه: $x - y = 1$ ، $2x + y = 3$ ، دیاره وه که ده بینین دوو هاوکیشه یه به یه که وه، که نه زانراوه کانی بریتین له X و Y . نه وهی گرنکه له و بابه ته، نه وهیه که نه و دوو هاوکیشه یه به یه که وه په یوه ستن، واته دوو هاوکیشه یه جیا و سه ره خۆ نین، ده شکریت به سه ره خۆی لیانه وه بدوین، به لام مه به ستنی ئیمه لیکۆلینه وهیه لیان نه گهر پیکه وه بن. مومکینه پرس یاریک دروست بیت، نه مانه پیکه وه چون قسه یان له سه ره ده کریت؟ پرس یاره که نه وهیه، دوو هاوکیشه و دوو نه زانراومان هه یه، شیکاره که چییه؟ واته نرخ ی X و Y چه نده که پاسه دانی هه ردوو هاوکیشه که ده کات؟ به نمونه یه کی ژبانی رۆژانه: نه گهر که سیک دوو مندالی هه بیت، له گه لیان ده چیته بازار، باوکه که پیوسته چیان بو بکریت تا دلی هه ردوو منداله که یه رازی بکات (یه که جور شت)؟ که واته نه گهر دوو هاوکیشه پیکه وه به سیسته میک سه یریان بکه ین، نه وه به یه که وه شیکاریکی هاو به شیان هه یه! چه ندین ریگا هه ن بو شیکاری نه م سیسته مه، به له جیاتی دانان (Substitution) یه کیکه له ریگا کان. به وشیه ی خواره وه: هاوکیشه ی یه که م به پتی x ده نووسین،

$$x = 1 + y$$

$$2x + y = 3$$

دواتر به دانانی نرخى x له هاوکیشه که ی ژیر نه.

$$2(1 + y) + y = 3$$

$$2 + 2y + y = 3$$

$$3y = 3 - 2 \rightarrow 3y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{3}$$

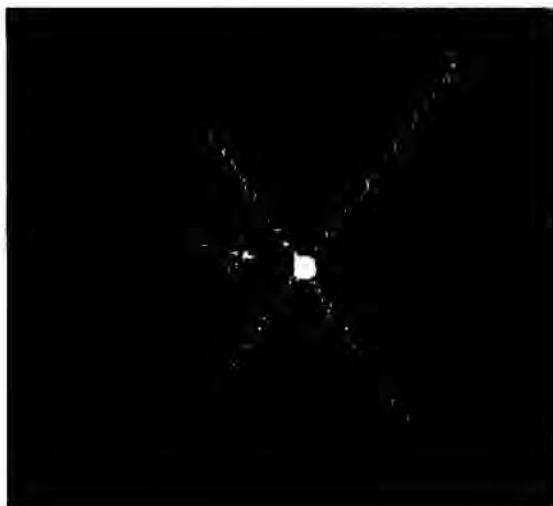
لیره نرخى لاما دوزیه وه که کردییه: $y = \frac{1}{3}$, نرخى y له به کینک له

هاوکیشه سه ره کییه کان داده نیتنه وه و نرخى x ده دوزینه وه، به و شینوه:

$$x = 1 + \frac{1}{3} \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

که واته نرخى x ده کاته $x = \frac{4}{3}$ و نرخى y ده کاته $y = \frac{1}{3}$

به گشتی، چند نه زانراو هه بیت، ده بیت نه وهنده هاوکیشهش هه بیت بۆ نه وهی شیکاریکی تاقانه (Unique) بۆ هاوکیشهکان بدوزینه وه. نه گهر ژمارهی هاوکیشهکان له نه زانراوهکان زیاتر بوو، نه وه هیچ شیکاریک نییه بۆ هاوکیشهکان، نه گهر ژمارهی نه زانراوهکان زیاتر بوو له ژمارهی هاوکیشهکان، نه وه ناکوتا- پی سنوور شیکار ههیه بۆ هاوکیشهکان. له وینهی خواره وه ده بینین که نه و دوو هاوکیشه هه یه که یان راسته هیلیک ده نوینیت، که وینهی ههردوو هاوکیشه که ده کیشین، ده بینین له خالیک یه کتر ده برن، نه م خالهش بریتییه له شیکاره که.



نه م دوو راسته هیله، دوو هاوکیشه پیشانده ده ن به شیوه یه کی نه ندازه یی، خاله هاوبه شه کهش، شیکاری ههردوو هاوکیشه که ده نوینیت.

هاوکیشه کان و وینه پروونگردنه و همیه کان

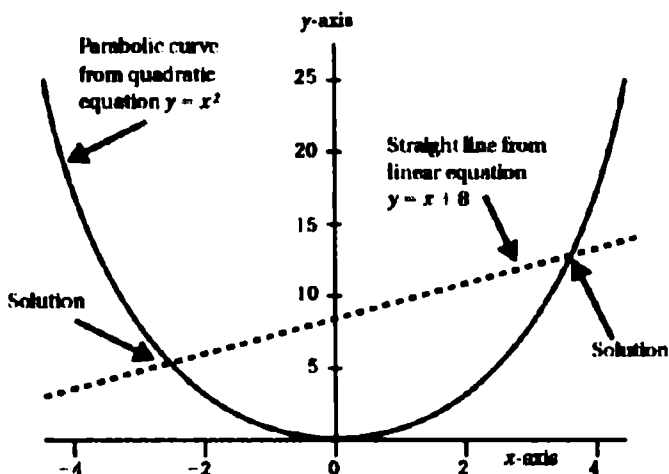
Equations and graphs

له بابتهتی پیشوو باسی هاوکیشه مان کرد. له م بابته باسی وینهی ئەو هاوکیشه مان ده که یین، واته هەر هاوکیشه یه که وینه یه کی هه یه، هەر وهک چۆن هەر مرفۆیک ئاسۆکیکی⁷² خۆی هه یه.

له ریگهی وینهی هاوکیشه کان، باشتر حالی ده بین که چۆن نرخ یه کیک له نه زانراوه کان ده گۆریت به گۆرانی نه زانراوه که ی تر. مه بهستی ئیمه لهو هاوکیشه یه؛ که دوو نه زانراوی تیدایه X و Y ، دیاریشه ئەمانه له تهوهره ی پۆتان، واته پرووتهختی دیکارتی وینه ده کرین. ئەگەر نمونه یه که وهر گهرین، هاوکیشه ی $y = x^2$ ، ئەمه هاوکیشه یه کی دوو جابه (Sequere) که شیوه که ی له وینه ی به رامم بهر دراوه. له بهر ئەوه ی نه زانراوی X توانی دووه، واته بۆ هەر Y یه که دوو نرخ هه ن! به واتایه کی تر ئەگەر $y=4$ ، ئەوه دوو ژماره هه یه که پاسه دانی هاوکیشه که ده کات، ئەوانیش 2 و -2. هەر له بابتهتی پیشوو باسی سیسته مان کرد (هاوکیشه هاوده مییه کان)، واته چهند هاوکیشه یه که به یه که وه، لیره ش ئەگەر ئەم هاوکیشه ی سه ره وه له گه ل هاوکیشه یه کی هیل ی (توان یه که) مان هه بیته، پاشان وینه یان بکه یین به یه که وه، به شیوه ی ئەندازه ی بیانه ده بینین که شیکاری ئەو دوو هاوکیشه یه به یه که وه چیه. وهک لهو شیوه ی به رامم بهر.

⁷² ئاسۆک: سییه ر.

دیاره ئه دوو وینه له کوئ به کترین بریوه، ئه وه ئه شوینه ده بیته شیکاری هاوکیشه کان.



په ره بـؤـلا- بـرگه ی هاوتـا واته ئه هاوکیشه یه: $y = x^2$ و
هاوکیشه ی دووم، که هاوکیشه یه کی هیلیه: $y = x + 8$

شیکاری هاوکیشه کان به شوینه ده کـریت: هاوکیشه ی دووم له
هاوکیشه ی به کم داده نینه وه: $x + 8 = x^2$

له مه وهش توژیک ریکی دهخین ده بیته: $x^2 - x - 8 = 0$

به یاسای ده ستور $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ نرخه کان ده دوزینه وه که
 $a = 1, b = -1, c = -8$

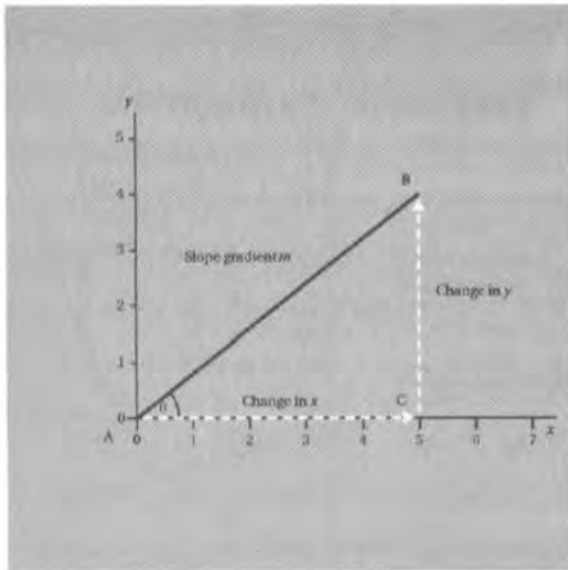
هاوکیشهی هیلی راست

The equation of a straight line

همه وو هیلیکی راست له تهوه ره ی پروتهختی دوو په هندی دهتواندریت به یه کیک لهو شیوانه بنوسریت، ئه ویش: $x = a$ که لیره a ژماره یه که، یان به شیوه گشتیه که ی: $y = mx + b$ که m و c دوو ژماره ن. لیره m بریتیه له لاری هیله که و c بریتیه له نرخ ی کاتیک هیله که تهوه ره ی y ده بریت.

لاری m دهتواندریت له ریگی دوو خال بدوزریته وه، که له ریگی ریژه ی جیاوازی نیوان به رزی-ستونی ئه دوو خاله و جیاوازی نیوان دریزی-ناسویی ئه دوو خاله، واته به شیوه ی بیرکاریانه ئه گه ر دوو خالی وهک (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هه بیست، ئه وه لاری دهکاته: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. وهک له وینه ی به رامبه ردا دیاره لارییه که دهکاته $\frac{4}{5}$.

هه ر دوو هاوکیشهی $x = a$ وه $y = mx + b$ دهتواندریت به شیوه یه کی گشتی بنوسریت، ئه ویش $rx + sy = t$ کاتیک r, s و t ژماره ن. دیاره که نابیت هه موو r, s و t سفر بیت، چونکه گه هه موو ئه مانه سفر بیت؟



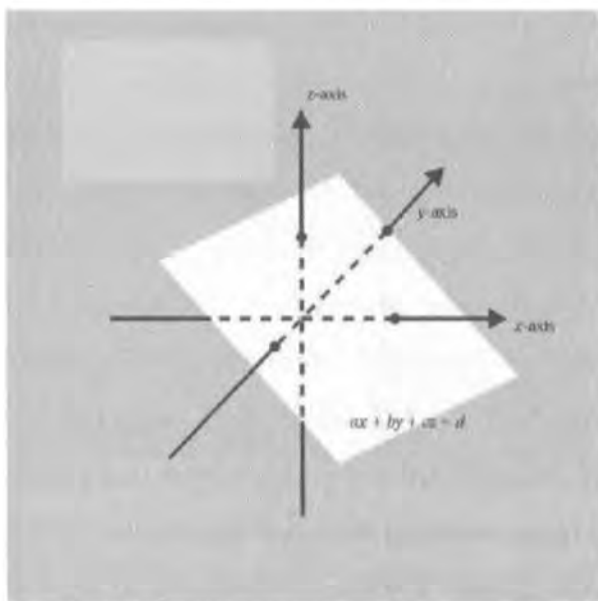
له قوناغه کانی نامادهیی، قوتایی زیاتر ناشنای کالکیله س
 (Calculus) ده بیت، جا بویه که بابتهی داتا شراوه ده خوینیت، نه وه زیاتر
 له بنه رتهی لاری تیده گات، چونکه داتا شراوه واتا لاری.

هاوکیشهی پروتخت

The equation of a plane

پروتخت، بریتیه له پروهکی تهختی دوو رههندی له
 ناهوتیهکی سی رههندی. هاوکیشهی پروتختیش بریتیه له:
 $ax + by + cz = d$ ، که نهه هاوکیشه گشتیه که بز ناهوتی سی
 رههندی کاتیک a, b, c, d ژمارهن و به لایه نی کهم ناییت یه کیک له مانه
 سفر بیت؟! بز نمونه نهگر نیمه وهسفی شیوهیهک بکهین له سی
 رههندی، نهه پیوستمان به گزراوی Z دهیت بز نهوی وهسفی
 رههندی سییم بکهین. نهگر هاتوو $a = b = 0$ ، نهه هاوکیشه که
 کورت دهیتوه بز $cz = d$ یان $z = \frac{d}{c}$ له بهر نهوی d و c ژمارهن،
 نهه واتا Z یش ژمارهیه، بزیه لهم باره دا، پروتخت بریتیه له پرویکی
 ناسویی له بهرزی ژمارهیهک که بریتیه له Z . تبیینی نهه بکهن که
 نهگر $a = b = 0$ ، نهه گزراوه کانی وهک x و y له هاوکیشه که بونیان
 نامینیت. باشه بزچی ناییت a, b, c, d هه موویان به یه که وه سفر بن؟ واته
 نهگر هه گشتیان سفر بیت چی پروده دات؟ پیشتر باسی شیکاری
 چند هاوکیشه یه کمان کرد به یه که وه، وتمان وینهی هه هاوکیشه یهک
 دهکشین، هاوکیشه کان له کوئی یه کتریان بری، نهه نهو خاله دهیته
 شیکار بز سیستمه که. بزیه به هه مان شیوه نهگر سی گزراو و سی
 هاوکیشه مان هه بوو، نهه وینه کان له سی رههندی دهکشین، دیسانه وه
 جار هه یه شیکار مان نییه، جار هه یه شیکاریکی تاقانه مان هه یه، وه یان

ناکوتا شیکار ههیه، که ئەمەش دەگەریتەوه سەر ئەوهی ئایا ئەم سی
هاوکیشەیه بە یەکتەر دەگەن یان نا، وه چۆن.



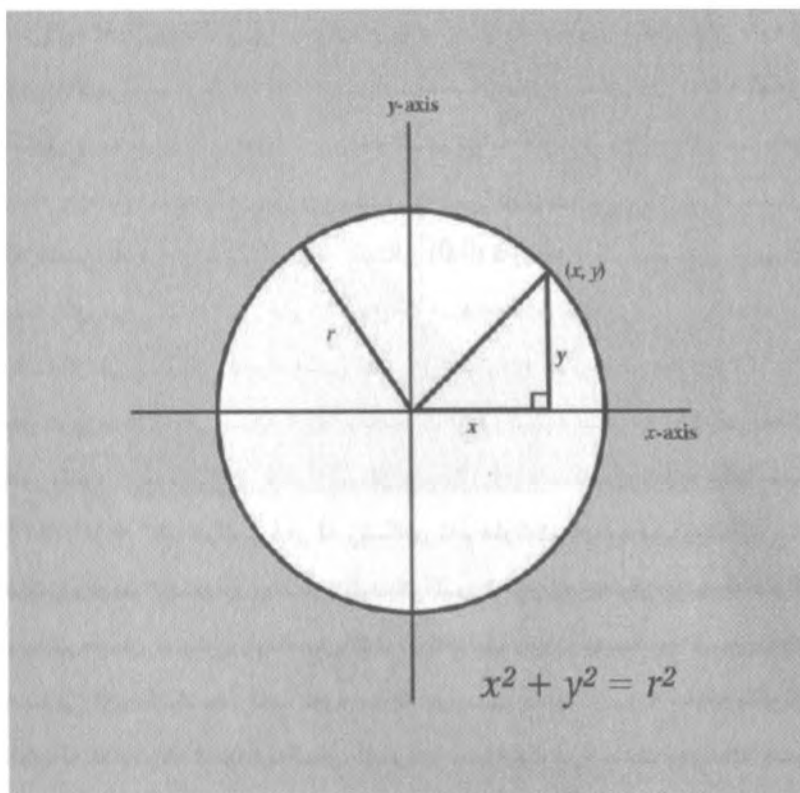
لیـرە تەوهرەى x تەوهرەى ئاسـۆی دەنوینیت، تەوهرەى z
تەوهرەى ستونی دەنوینیت. تەوهرەى y ، تەوهرەیهکی ئەستوونه بەسەر
تەوهرەکانی تر.

هاوکیشهی بازنه

The equation of a circle

بازنه، بریتیه له یه کیک له شیوه ئه اندازه یه زور گرنگه کان، که بریتیه له: کومه لهی هم موو ئه و خالانهی که دوری خالیکیان داوه له دوریه کی دیاریکراو، که هم موو خاله کان دوریه یان له و خاله (چق) نه گوره. به شیوهی جه بری، ده تواندریت به هاوکیشه ئه م نووسینهی سهروهه بنووسریت. ئه گه بیت و چه قی بازنه که مان بکه ویتته خالی بنه رتهی ته وهره ی پۆتان، واته خالی (0,0) ئه وه به به کارهینانی یاسای فیساکورس؛ ده توانین هاوکیشه یه ک بۆ بازنه بدوزینه وه به ده ست نیشانکردنی خالیکی هه ره مه کی له سه ر چیه ی بازنه که وه ک (x,y) بۆ هه ر دوریه یه ک له و خاله ۲ که مه به ست لینی نیوه تیره یه و ژماره یه کی که وهره تره له سفر (ئه ی ئه گه سفر بیت؟!)، ئه وه ده گه ین به و هاوکیشه یه: $x^2 + y^2 = r^2$ دواتر هه ر له ریگه ی ئه م هاوکیشه یه وه ده په رینه وه بۆ خویندن و دوزینه وه ی چه ند بابه تیکی تر. ئه گه ر له بیرتان بیت له بره گه قوچه کیه کان باسی بازنه مان کرد، کاتیک رووته ختیک به شیوه یه کی ئاسویی قوچه کیک ده بریت، ئه وه بازنه دروست ده بیت، بۆیه بازنه باریکی تایبه ته له بره گه قوچه کیه کان. لیره پرسیاریک دروست ده بیت. چی رووده دات ئه گه ر بیت و هاوکیشه ی بازنه دوو جا بکه ین؟⁷³

⁷³ له م پرسیاره پرسیاریکی تریش دروست ده بیت، ئایا هیچ بازنه یه ک ده دوزینه وه که یه کسان بیت به چوارلایه کی ریک. واته بازنه یه ک و چوارلایه ک هه مان رووبه ریان هه بیت؟!



برگه هاوتاکان

Parabolas

په پابوله برگه هاوتاکان، یه کیکه له برگه قوچه کیه کان. برگه هاوتاکان ته نیا یه خالی بهرترین یان نرمترین هیه، که به شیوه جهبری بهم شیوهی خواره وه هاوکیشه کی دنوسریت، که له یه گورادا دهکاته وه نه خسهی دوو جا:

$y = ax^2 + bx + c$. ساده ترین نمونه له برگه هاوتاکان، بریتیه له: $y = x^2$ له بهر نه وهی x^2 ، نه وه y گوره تره له سفر، نه وه ش واته همیشه دوو نرخ هیه، نه رینییهک و نه رینییهک، که بهرام بهر هر رخیکی y دوو نرخ هیه. بویه بچوکتین نرخ که y هبیت برتیه له سفر. تا x گوره تر بیت، نه وه y زور گورتر ده بیت (به نزهت نه خسهیه).

برگه هاوتاکان، زور یارمه تی دهره بز وه سفی جوولهی ته نه کان، کاتی تاودانیکه نه گور به سه رییه وه هیه، وهک: له کاتی هاویشتنی موشه کیک، نه وه ده زانین که به هزی هیزی کیشکرده وهی موشه که له شوینیک دهکاته بهرترین خالی دواتر ورده ورده نزم ده بیت وه، بویه له پینگه برگه هاوتاکان ده تواندریت نامانجه که به وردی بپیکیت، وه چندین به کارهینانی تر. له به کارهینانی تری هم بابه ته، له یارییهک به ناوی . Angry birds



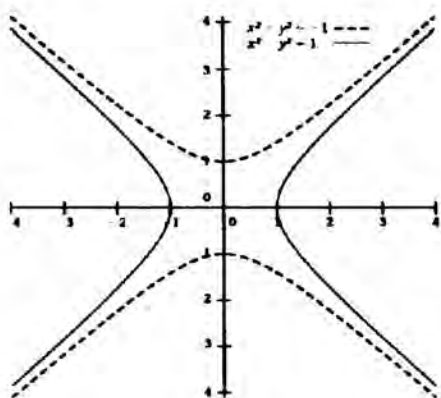
هاوکیشه کانی برگه قوچه کیه کان

Equations of conic sections

له بابه ته کانی پیشتر باسی برگه قوچه کیه کانمان کرد، وینهی برگه قوچه کیه کانیش که به هژی برینی قوچه که کان دروست ده بیست به هژی پرووته ختیگه وه. ریسای جه بری بو ئه و برگانه چونیه که، به دهوری ته وه ره ی Z (z-axis) بریتیه له: $|z| = x^2 + y^2$ ، کاتیک $|z|$ بریتیه له مهودا (Modulus) ی Z. بویه $|z|$ یه کسانه به Z نه گهر هاتوو Z نه رینی (+) بو، وه ده کاته $-Z$ نه گهر هاتوو Z نه رینی (-) بو. لیره مهودای Z هرگیز نرختیکی نه رینی (سالب) نییه.

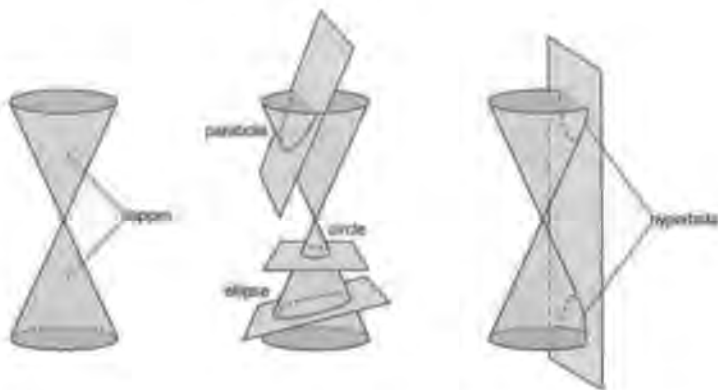
ته وه ره ی Z له پرووته ختیگی ئاسویی بریتیه له نه گورپیک، واته ژماره یه ک، وه ک: c، که یه کتر برینی ئه و نه گوره له گهل قوچه کینکی ستوونی به و شیوه پیناسه کراوه: $|c| = x^2 + y^2$. که ئه مهش هاتوای هاوکیشه ی بازنه یه کاتیک نیوه تیره ی بازنه که بریتیه له: $\sqrt{|z|}$. ئه م جار به بو یه کتر برین له گهل پرووته ختیگی ستوونی، ته وه ره ی لای ده بیسته نه گورپیک-ژماره، که هاوکیشه که به م شیوه ی لای دیت: $|z| = x^2 + c^2$ ، که ئه مهش هاوکیشه ی جووتیک له برگه ی هاتوایه (Parabolas)، که یه کتیکان Z بچو کتره له سفر $z < 0$ ، ئه وه ی تر که Z گوره تره له سفر $z > 0$.

بیرگی هیلکەیی ناته‌واو (Ellipse) و بیرگی زیاد (Hyperbola) به‌هۆی یه‌کتربیرینیکی لاره‌وه دروست ده‌بن به‌هۆی ڤوته‌خته‌وه، واته کاتیک ڤوته‌ختی به شیوه‌یه‌کی لار قوچه‌که‌که ده‌بیریت. نه‌گه‌ر بیت و ڤوته‌خته‌که چه‌ماوه‌یه‌کی داخراوی قوچه‌که‌که بیریت، نه‌وه بیرگی ناته‌واو دروست ده‌بیت که هاو‌کیشه‌کی بریتییه له: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



نه‌گه‌ریش نه‌وه
ڤوته‌خته‌هه‌ردوو
قوچه‌که‌که بیریت، نه‌وه
جووتیک له بیرگی زیاد
دروست ده‌بیت که
فۆرمه‌کی-
هاو‌کیشه‌کی بریتییه

له: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

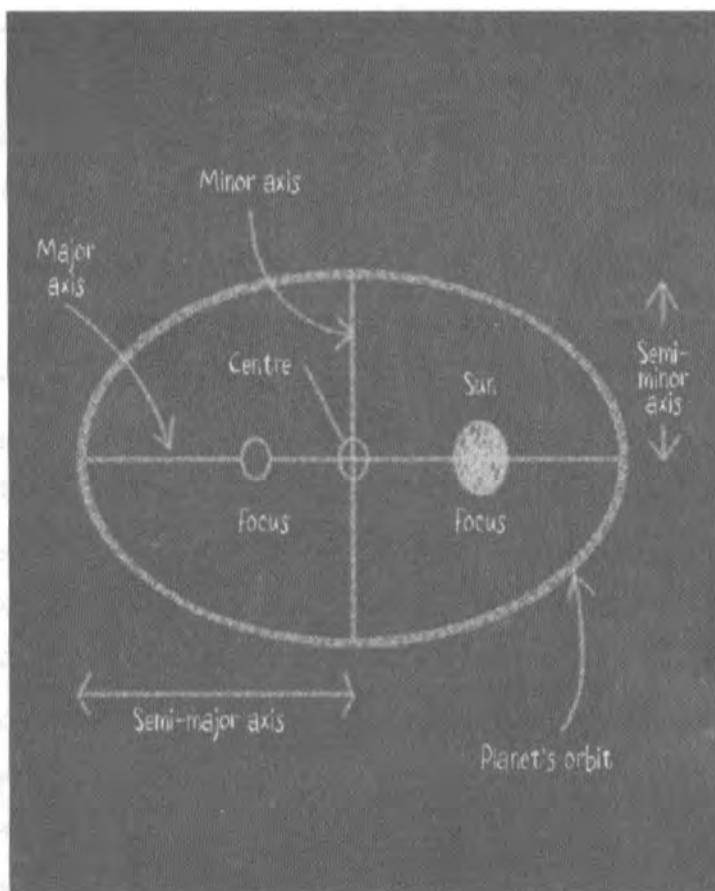


برگه ناتواوهکان

Ellipses

برگه‌ی ناتواو، یه‌کیکه له برگه قوچه‌کیه‌کان، نه‌مه‌ش کاتیک دروست ده‌بیت که پروته‌ختیک به شیوه‌یه‌کی لار و به‌ته‌واوی قوچه‌که‌که ده‌بیت. نه‌و برگه‌یه‌ش ده‌کریت به‌مزی نه‌و هاوکیشه‌یه‌وه گوزارشتی لی بکریت، که بریتیه له: $|z| = x^2 + y^2$. وتمان نه‌گه‌ر بیت و پروته‌خته‌که ته‌نیا وه‌ک چه‌ماوه‌یه‌ک قوچه‌که‌که بپریت، نه‌وه‌ی ده‌ستمان ده‌کویت بریتیه له: برگه ناتواویک له و فورمه: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. کاتیک a و b دوو نه‌گورن، واته ژماره‌ن، که a نیوه تیره‌ی ته‌وه‌ری گه‌وره‌یه b نیوه تیره‌ی ته‌وه‌ری بچوکه. نه‌گه‌ر بیت و $a > b > 0$ نه‌وا، له دوزینه‌وه‌ی سه‌ره‌کانی برگه‌که، نه‌مه به‌کار دینین: $\sqrt{a^2 - b^2}$ له چه‌قی برگه‌که‌وه. جیا له‌مه، برگه‌ی ناتواو ده‌تواند ریت به‌و شیوه‌ش پیناسه بکریت: کومه له خالیکه له پروته‌خته‌ختیکدا که سه‌رجه‌می دووریان له دوو خالی دیاریکراو (تیشکر) ده‌کاته به‌هایه‌کی نه‌گور. له سالی 1609 زانای نه‌ستیره‌ناسی نه‌لمانی 'یوهانس کیپلر' روونیکرده‌وه که هه‌ساره‌کان به ده‌وری خوردا ده‌خولینه‌وه به شیوه‌یه‌ک، که هر یه‌کینکیان له خولگه‌یه‌کی تایبته، که خولگه‌کان برگه‌ی ناتواوه. به‌گشتی، برگه ناتواوه‌کان ده‌توانن ته‌فسیری جوله‌ی شته‌کانی پیکریت که له ژیر هیزی پراکیشانی زه‌وی یه، وه‌ک: مانگه ده‌ستکرده‌کان له خولگه تایبته‌یه‌کانیان. نه‌م کاره‌ی

کیپلر راستکردنه وهی تیورییه که ی کچه رنیکس بو، که دهیوت:
ههساره کان له پیرهویکی بازنهیی به دهوری خور دهخولینه وه.



پاده داره کان

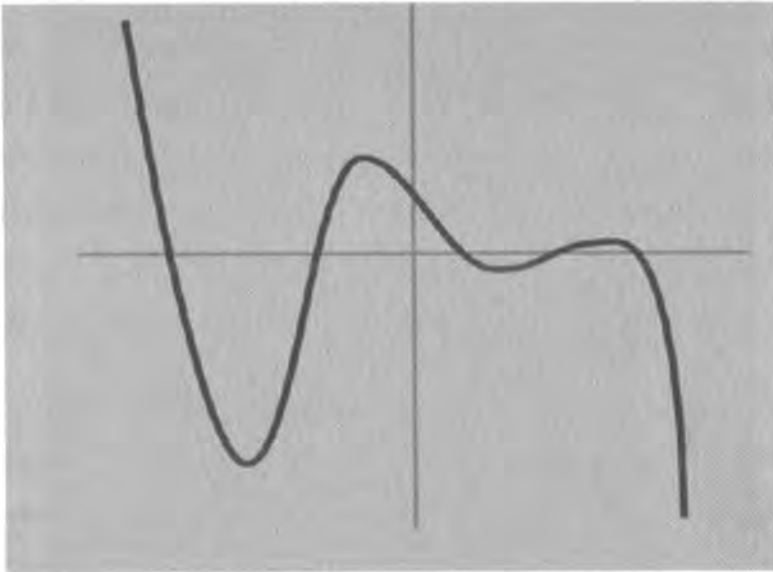
Polynomials

پاده داره کان، بریتین له دهر برینتیکى بیرکاری یانه له سه شپوهى $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ له کاتیک که a_i ژمه اره و $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ده شکریت به شیوازیکی تر بلین: پاده داره کان بریتین له زنجیره یه کی دوا هاتوو له x به توانیک (هیزیک). به زترین توان له پاده داره کان، پیزی دهوتریت: پله ی پاده داره که (Degree of polynomial)، نه و پله یه ده لکیندریت به پاده داره که، واته نه گهر به زترین توانی پاده داریک 5 بیت، نه و ده لکین: نه و پاده داریکه له پله ی پینج.

نه گهر پاده داریک پله که ی 2 بیت، واته x^2 ه بیت، نه و ناویکی تاییه تی هیه و پیزی دهوترین پاده دارى چوارگوشه یی (quadratic). نه گهر توانی سی ه بیت، نه و پیزی دهوتریت: پاده دارى شه شپالویى (cubic). پاده دارى پله یه که، پیزی دهوتریت: هیل، چونکه وینه که ی ته نیا پاسته هیلکه. کاتیک ده لکین سفره کانى پاده داریک، نه و مه به ستمان شیکارى نه و پاده داریه، واته پاده داره که له چ نرخیکى x ده کاته سفر (له کوى ته وهره ی x ده بریت).

پاده داره کان گرنگیه کی زوریان هیه له بواری فیزیا، کیمیا، ئابوری و زانسته کومه لایه تیه کان. له بیرکاریدا بو وه سفى تایه تمه ندیه کانى

ریزکراوهکان (Matrix) به کاردههیندیریت، له گهل شهوش، له جهری پوخت، پوایکی ئیجگار گرنک دهگیریت. رادهارهکان بو ههژمارکردنی رووبهر و قهباره به کاردیت، یانیش بو ههژمارکردنی قهبارهی تهلاره نارپکهکان.



ئهم وینهیه، رادهاریک دهنوینیت که له 5 شوین تهوهره ی x برییه، واته رادهاریکه له پلهی 5.

هاوکیشهی پله دوو

Quadratic equations

هاوکیشهی پله دوو، ئه و هاوکیشهیه که گزراویکی تیدایه، که بهرزترین توانی ئه و گزراوه بریتیه له 2. واته هاوکیشهیه تینیا دوو رهگی شیکاری هیه، که له دوو بهها هاوکیشهی دهکاته سفر. به شیوهی ئه اندازهییانه: ئه و هاوکیشهیه کاتیک ده بیت به سفر نهگه بیت و تهوهی x ببیت، واته $y = 0$. شیوه گشتیه که ی بریتیه له $ax^2 + bx + c = 0$ ، کاتیک نابیت a سفر بیت ($a \neq 0$)، ئهگه سفر بیت؟

ئهگه بیت و $b = 0$ ، ئه وه شیکارکردنی هاوکیشهیه که ئاسان ده بیت وه بو شیکارکردن، که: $ax^2 + c = 0$ له مه وهش $ax^2 = -c$ پاشان $x^2 = -\frac{c}{a}$ ، رهگی دوو جای ههردوو لا وهرده گرین و دهگهینه: $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ ئه و هیمایه \pm واته ی ئه وهیه، دوو شیکار هیه، یه کیکان ئه رینی و یه کیکان نه رینی، چونکه x توانی دووه، له بهر ئه وهی 2 جووته، و توانی جووت (-) دهکاته (+)، واته: $(+)^2 = +$ و $(-)^2 = +$ که $-\frac{c}{a} = \left(\pm \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2$ به دلنیا یی ئهگه بیت و $-\frac{c}{a}$ نه رینی بیت (دوای ئه وهی که نرخ ی c و a دهزانین)، ئه وه شیکاری هاوکیشهیه که له ژماره راستیهکان نییه، به لکو له ژماره

ئاویته کانه (Complex numbers). به شیوه یه کی گشتی، شیکاری هاوکیشه که بریتیه له: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. نه ویره $b^2 - 4ac$ پیسی دهوتریت، یه ری جیاکه ره وه (Discriminant) که پیمان دهلیت هاوکیشه که شیکاره کانی کام جوهره ن، ژماره ی راستین یان نا، نه ویش نه گهر بیت و بچوکر بیت له سفر، نه وه شیکاری هاوکیشه که ژماره یه کی ئاویته ییه، نه گهر بیت و گه وره تر بیت له سفر، نه وه شیکاری هاوکیشه که ژماره ی راستین، نه گهر سفر بیت؟

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

سن جاکان، چوار جاکان و پینج جاکان

Cubics, quartics, and quintics

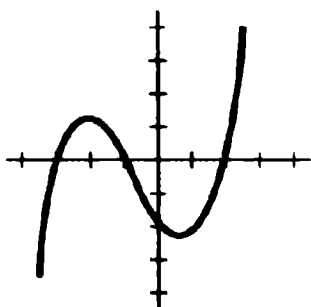
له بابه تی پیشوو باسی راده داره دوو جاکانمان (Quadratic) کرد. نیستاش راده داریکی پله 3 پی ده لین: سن جاکان پالوو (Cubic) که بهرترین هیژ-توان له راده داره که بریتیه له 3. راده داره پله چوار (Quartic) و راده داره پله پینج (Quintic) که هر یه که یان بهرترین توانیان بریتیه له 4 و 5. نه گهر سه رنج بدهین، هاو کیشه پله دوو هکان تنیا یه خالی و هر گه رانیا هیه، هاو کیشه پله سینه کان دوو خالی و هر گه رانیا هیه، به شیوه یه کی گشتی واته، هاو کیشه که پله چند بیت، نهوه خالی و هر گه رانیا هاو کیشه که یه کی که متره له پله ی هاو کیشه که، وهک هاو کیشه ی پله 5 ده کریت 4 خالی و هر گه رانیا هیه بیت نهک زیاتر.

دو زینه وهی شیکاریکی گشتی (General solution) بو ئو هاو کیشه پله بهر زانه به بهر اوورد به هاو کیشه ی پله دوو، کاریکی و هها ناسان نییه! شیکاری هاو کیشه ی پله سن، که له سه ده کانی شازده هم دو زرایه وه، شیکاریک، دوو شیکار یان سن شیکاری هیه.

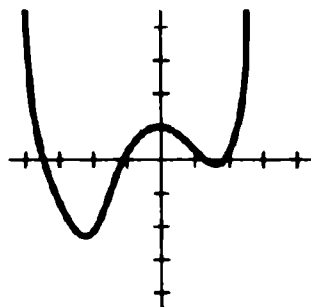
به همان شیوه، پاش هول و تهقه لایه کی زور، هاو کیشه ی پله چواریش توندرا شیکاری بو بدو زریته وه، به لام بو هاو کیشه پله پینج، له گه له هولیکی زور و بهر ده وام، هیچ شتیک ده ستگیر نه بوو سه بارهت به

شیکاریکی گشتی بۆ ئەم هاوکیشیه، ههتاكو تا سالانی 1820 کاتیک
ئوه سهلمیندار که شیکاری گشتی بوونی نییه بۆ رادهداری پله چوار
به رهو سهری! که له بابتهکانی داهاوو باسیان دهکهین.

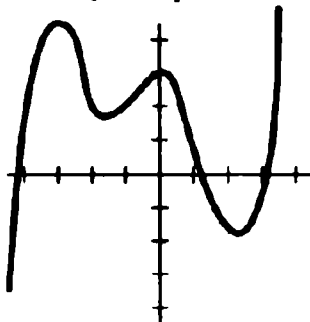
Cubic equation



Quartic equation



Quintic equation



بیردۆزی سه ره کیی چه بر

The fundamental theorem of algebra

بیردۆزه سه ره کییه کان، بریتین له نهجامیکی به ده ست هاتوو که چه قی نهو پانتاییه رو شنده کاته وه که کاری تیدا ده کریت. بیردۆزی سه ره کی چه بر، وه سفی سفره کانی شیکاره کانی راده داریکمان بۆ ده کات به شیوه یه کی گشتی. دننیامان ده کاته وه له هه بوونی ژماره ی شیکاره کانی راده داریک، واته پیمان ده لیت: هر راده داریک پله که ی چند بیت، نه وه بی که م و زیاد (Exactly) نه وه نده شیکاره شی ده بیت. واته نه گه ر راده داریک پله که ی 4 بیت، نه وه چوار شیکاری ره به قی هه یه، بۆ راده داریکی پله n ، نه وه n شیکار هه یه. نه وه ش و امان لسی ده کات که تیگه یشتیمان فراوانتر بیت له هه مبه ر راده داره کان به جو ریک له کۆلکه ی ژماره راستییه وه، بۆ کۆلکه ی ژماره ئالۆزه کان. بیردۆزی سه ره کی، شیتل کردنی کمان ده خاته به رده ست، وه ک چون شیتلی خۆبه شمان هه یه، نه مه ش هاوشیوه ی نه وه، که ده لیت:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

ده تواند ریت به شیوای لیکدانی n راده بنوسریت:

$$a_n(x - z_1) \dots (x - z_n)$$

کاتییک z_1, \dots, z_n ژماره ی ئاویته ن (Complex number).

هه ندیکان ده کریت به شه خه یالییه که یان سفر بیت، واته ده کریت

هندیکیان ژماره‌ی راستی بن، نه‌گەر بیت و هاوکۆلکه‌کانی (Coefficients) راده‌داره‌که a_i گشتیان ژماره‌ی راستی بن، ئه‌وه ژماره ئالۆزه‌کان ئه‌وانه‌ی به‌شه‌ خه‌یالییه‌که‌یان سفر نییه، به‌ شیوه‌ی جووتی ئاوه‌ل دهرده‌که‌ون. نه‌گەر بیت و راده‌داره‌که بکاته سفر، ئه‌وه به‌ لایه‌نی کهم (at least) په‌کیک له راده‌کانی ناو‌که‌وانه‌کان ده‌بیت سفر بیت، به‌ پیچه‌وانه‌شه‌وه راسته. بۆیه، ئه‌و فۆرموله‌یه پیمان ده‌لێت: که راده‌داریکی په‌ n ، بی کهم و زیاد n شیکاری- په‌گی هه‌یه، مومکینه هندیک له شیکاره‌کان دووباره‌ بیه‌وه، وه هندیکیان مومکینه شیکاری راستی- ژماره‌ی راستی نه‌بن.

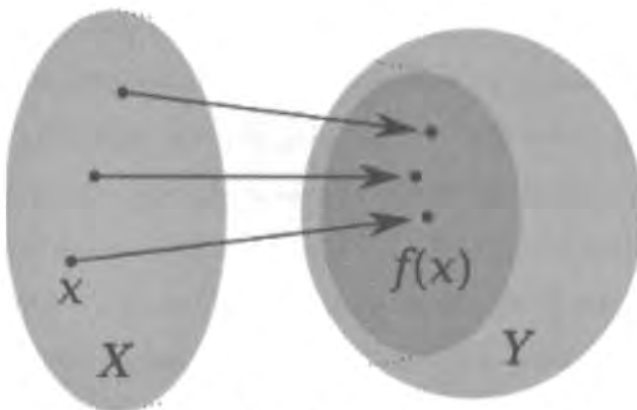
شیکاری دووباره‌ بووه‌وه، ئه‌و شیکاره‌یه که زیاتر له جاریک ده‌بیه‌ته‌وه شیکار به‌ پینی هه‌ل و مەرچی راده‌داره‌که، وه‌ک: $(x - a)^2 = 0$ یه‌ک شیکاری هه‌یه، که بریتیه له a ، به‌لام شیکاره‌که دوو جار دووباره‌ ده‌بیه‌ته‌وه. ئه‌مه‌ش دراوه‌ته پال بیرکاریزانی ناوداری ئه‌لمانی "کارل گاوس"⁷⁴ (Karl gauss) که ئه‌و ئه‌نجامه‌ی له سالی 1799 بلاوکرده‌وه. له‌گه‌ل ئه‌مه‌ش، له سه‌لماندنه‌که‌ی گاوس، کهم و کورپیه‌ک هه‌بوو، بۆیه سه‌لماندنه‌که به‌ شیوه‌یه‌کی ورد و دروست، له سالی 1920 به‌ کۆتا گه‌یشت.

⁷⁴ بیرکار و فیزیکزانی گه‌وره‌ی سه‌ده‌ی هه‌ژده و نۆزده‌ی ولاتی ئالمانیایه. له‌ وته‌یه‌کی خۆیدا بیرکاری به‌ شاژنی هه‌موو زانسته‌کان ناو ده‌بات. گاوس په‌کیکه له بیرکاریزانه هه‌ر دیاره‌کان له هه‌موو کاتیکدا، که جی په‌نجی له زۆربه‌ی لقه‌کانی بیرکاری دا دیاره، وه‌ک له پیشتر باسمانکرد.

به شی شه شه م

نه خشه کان و کالکیله س

Functions and Calculus



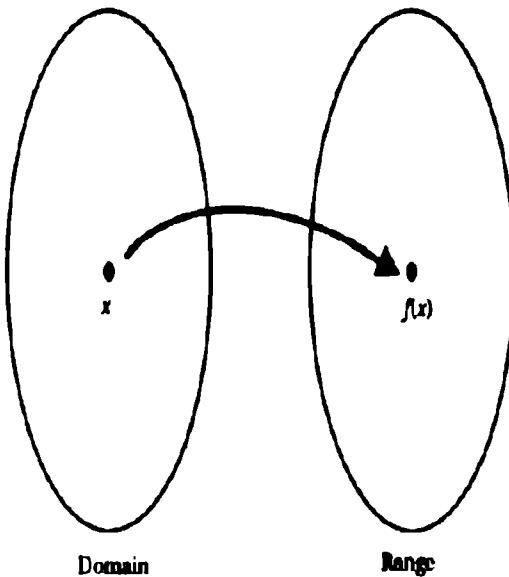
$$f : X \rightarrow Y$$

نخشه

Function

نخشه، بریتیه له په یوه نندیهک له نیاوان دوو کومه له A و B ، به و
 مرجه ی که $A, B \neq \emptyset$ ، بق هر دانه ی که x له کومه له A ده بیت ته نیا
 یه ک دانه ی بی هاوتا (Unique) y ه بیت به و مرجه ی که $f(x) = y$.
 نه مه پیناسه ی نخشه یه. به و x ه دلین گوراو، واته ته نیا یه ک ژماره
 وهرناگریت، زور ژماره وهردهگریت. نخشه وهک عه ساره ی شه ربه ت
 دروستکردن وایه، له سه ره وه میوه کانی تیده که ی، ئویش گوشراوی ئو
 میوانه ت پی دده ت. نمونه یه کی ساده، نه گهر نخشه یه کمان ه بیت به و
 شیوه بیت: $f(x) = x + 2$ واته تو هر نرخیک x بده ی به نخشه که،
 ئو x ه که ت پینده داته وه و 2 شسی بق زیاد ده کات، واته
 $f(2) = 2 + 2 = 4$ یانی وهک ئه وه وایه یه کیک بیت و پیت بلیت، تو 2
 هزارم پییده، من له به رام به ر 4 هزارت پی دده مه وه. هر نخشه ی
 له م جورهمان نییه، نخشه کان زورن و ئی واش هیه توژی ئالوزه، وهک
 نخشه سیکوشه بیه کان، راده داره کان و نخشه توانیه کان. بویه جومگه ی
 سه ره کی بیرکاری، بریتیه له نخشه کان! له سه ره وه وتمان به و x دلین
 گوراو، واته چند شتیک دهگریته خوی، وهک عه ساره ی شه ربه ت ته نیا بق
 شه ربه ت دروستکردنه، حق ناگریت بهین ماسی بهینه ناوی! بویه
 ده بینین لیره x ه که ته نیا میوه کان وهردهگریت، ده شگریت ه ندیک له
 میوه کان نهک ه مووی، بویه ئو شتانه ی x که دهیگریته باوهشی خوی،

پیان دهوترین بوار (domain) - بوارى نهخشى f : کاتیک نرخیک دهدهین به نهخشهکه، ئویش شتیکمان پیده داته وه و شتیک به ره م دینیت، ئوه بهو به ره مه دهوتریت: مهودا (Range) - مهودای نهخشى f . یانی که له عساره که شه ربته دروست بوو، ئوه به شه ربته که دهوتریت مهودا، وه به میوهکان به شیوهی سروشتی خویان پیش ئوهی بیخینه ناو عساره که پنی دهوترین بوار، هندی جار پنی دلین: وینه - image. پنی f هر له پنی یه که می $function$ هاتوه، تو ئه گه ر هزت لییه، پنی یه که می ناوه که ت یان هر پتیک و ره مزیکت ده توانی به کاری بینیت.



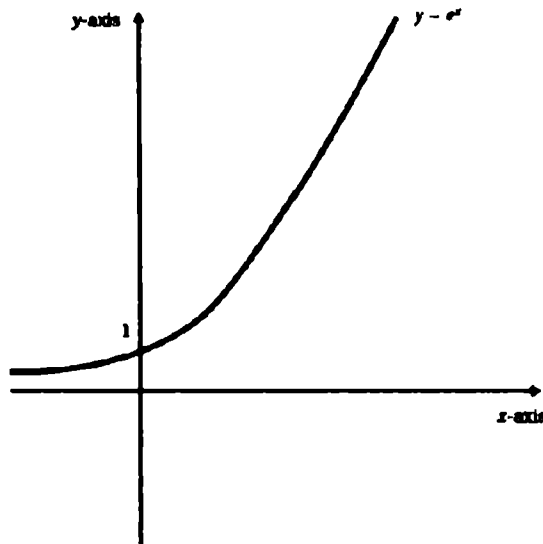
نهخشه‌ی توانی

The exponential Function

نهخشه‌ی توانی، مومکینه گرننگترین و بهرچاوترین نهخشه بیت له بیرکاریدا، هاوکات له گه‌ل نهخشه‌ی خۆی (Identity function).
 نهخشه‌ی توانی، بهم شیوه‌یه پیتاسه کراوه که $f(x) = b^x$ کاتیک b بریتیه له بنچینه؛ که ژماره‌یه‌کی نه‌گۆره و، x گۆراوه‌که‌یه، وه‌ک:
 $f(x) = e^x$ نهخشه‌یه‌کی هه‌میشه ئه‌ریتیه، واته ئه‌گه‌ر بیت و x له $-\infty$ نزیک بکه‌ینه‌وه، ئه‌وکات نهخشه‌که له سفر نزیک ده‌که‌ویتته‌وه. وینه‌ی ئه‌م نهخشه‌یه به‌رز و نزمی، نشیوی تیندا نییه، وه‌ک ئه‌وه وایه به‌رده‌وام به‌سه‌رکه‌وی، واتا تا دیت وینه‌ی نهخشه‌که به‌رز ده‌بیتته‌وه. ئه‌وه‌ی زۆر جوان و سه‌رنج پراکیشه له‌و نهخشه‌یه، ئه‌وه‌یه که لاری وینه‌که‌ی ده‌کاتوه نرخ‌ی نهخشه‌که! ئه‌وه واتا چی؟ واته لاری نهخشه‌که له هه‌ر خالی‌ک x ته‌نیا نرخ‌ی x له نهخشه‌که دانیه‌وه ئه‌وه لاری ئه‌و نهخشه‌یه‌ت له‌و خاله‌ ده‌ست ده‌که‌ویتت، به‌ کورتی واته تاکه نهخشه‌یه که داتاشراوه‌که‌ی ده‌کاتوه نهخشه‌که خۆی: $f(x) = f'(x)$. ئه‌م نهخشه‌یه دیارده‌ی هه‌مه‌چه‌شمان بو‌ پرونده‌کاته‌وه، وه‌ک گه‌شه‌ی پروه‌که‌کان، په‌تا، شیبوونه‌وه‌ی ماده‌یه‌کی تیشکده‌ر و گه‌شه‌سهند و چه‌ندین شتی تر له‌ ریگه‌ی ئه‌م نهخشه‌وه لیان تیده‌گه‌ین. له پال ئه‌مه‌ش، ئه‌م نهخشه‌یه هه‌وینی بونیاتی چه‌ندین نهخشه‌ی تره، سه‌رده‌کیشیته ناو چه‌ندین بابته‌ی تری بیرکاری و لقه جیا‌جیا‌کانی بیرکاریش! په‌نگه‌ یه‌کیک به‌رسیت ئه‌و e

چییه (پیشتر باسمان کردوه)؟ ئه وه ژماره یه که، نه گۆپنکی بیرکاریه که نرخه که ی به نزیکه ده کاته 2.71 که به نه گۆپی ئۆیله ناسراوه، ئۆیله ریش یه کیکه له بیرکاریزانه هر دیاره کانی ناو بیرکاری، ئه م نه خشه یه ده تواند ریت له سه ر شیوه ی زنجیره بنوسریت:

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots = e^x$$



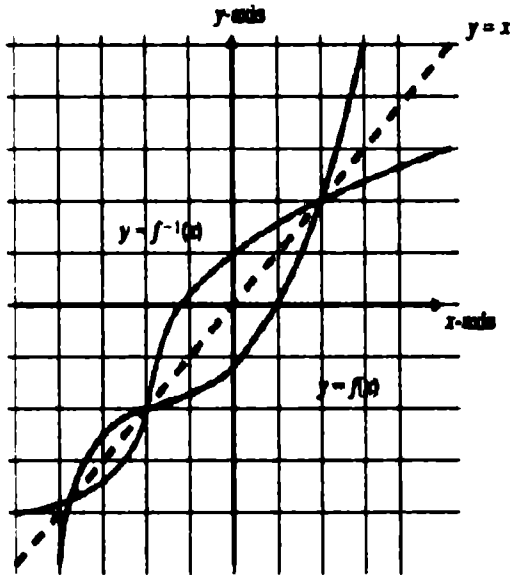
ئه م نه خشه یه ی سه ره وه نه ک هر داتاشاروه که ی ده کاته وه خۆی، به لکو ته واوکاریه که شی هر ده کاته وه خۆی (له گۆراوی X)

هه لگه پاره ی نه خشه

Inverse function

هه لگه پاره ی نه خشه، بریتیه له کاری پیچه وانه ی نه خشه ی بنه پره تی که به $f^{-1}(x)$ ده نووسریت. وهک چون ده زانین که کرداری پیچه وانه ی کۆکردنه وه بریتیه له کرداری که م کردنه وه، وهک: دژه کۆکردنه وه ی 3 بریتیه له 3- یان دژه لیکدانی 7 بریتیه له $\frac{1}{7}$. له بابته ی پیشوو وتمان $f(x) = x + 2$ ، واته کابرایهک هه بوو، ده پوت، تو ئه گه 2 دینارم بدهیت، ئه وه من 4 دینار پی ددهم، ئیستا وا دانئ کابرا دیت به خهت ده گریت و پیت ده لیت ها ئه وه 5 دینار، تو ده پیت چه ندی پی بدهیت؟ تو ده پیت 7 دیناری پی بدهیت! ئا به مه ده وتریت نه خشه ی هه لگه پاره (Inverse function). نه خشه ی هه لگه پاره بو ئه وه نه خشه ی سه ره وه ده کاته: $f^{-1}(x) = x - 2$. له نه خشه ی $f(x)$ ئه گه 8 پی بدهین، ئه وه 10 ده داتئ، له نه خشه ی هه لگه پاره ی $f^{-1}(x)$ ئه گه 10 پی بدهین، ده پینین 8 دیناره که مان پی ده داته وه. له بابته ی پیشوو نه خشه ی خویمان (Identity function) خویند، واته $f(x) = x$ ، که ئه وه نه خشه یه ریک وهک ئاوینه وایه، چیه ی به خه یته به رده می، هر هه مان شت نیشان ده داته وه، که واته نه خشه ی هه لگه پاره ی نه خشه ی خو یی چیه؟ دیاره هر خو یه تی، واته $f^{-1}(x) = x$. نه خشه ی توانیمان خویند، وهک: $f(x) = e^x$ هه لگه پاره ی ئه وه نه خشه یه ده کاته لوگاریتمی سروشتی، واته نه خشه ی لوگاریتمی $f(x) = \ln(x)$. نه خشه ی لوگاریتمی

سروشستی وهک پروبهری ناوچهیهک دهردهکه ویست، هر بویه تهواوکارییهکهی $\ln(n)$ ههژماری پروبهری چهماوهی $y = \frac{1}{x}$ کاتیک له 1 بۆ n بیت. لهگهله تابهتهندییه جوانه نهخشه لۆگاریتمی سروشستی، شتیکی ترهیه که زور سهرسامکهره، نهوهش به کاردیت بۆ زانیی نهوهی که ئایا له خوار ژماره ی x چند ژماره ی خۆبهش هیه، واته له خوار 100 چند ژماره ی خۆبهش هیه به نزیکه یی، که له بابهتهکانی داهاتوو باسی لیتودهکهین.



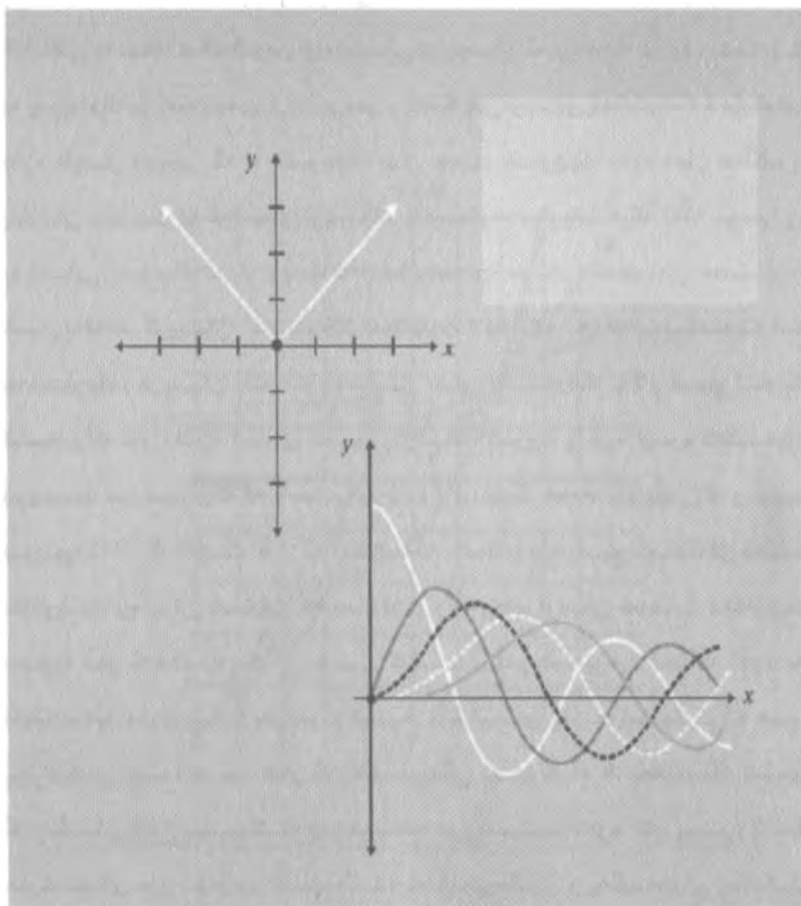
وینهکه دوو نهخشه دهنووینیت، نهوانیش نهخشهیهک و ههلهکه پارهکهی.

نخشه‌ی بهره‌وام

Continuous Function

نخشه‌ی بهره‌وام، یان بهره‌وامی نخشه؛ ناولیتانی بیروکه‌یه که ئایا نخشه‌یه‌ک ده‌تواندریت وینه‌که‌ی بکیشین به‌و مهرجی له کاتی کیشانی ده‌ست هه‌لنه‌گرین و بۆشایی و پچران له وینه‌که دروست نه‌بیت. به‌پێچه‌وانه‌ی نخشه‌ی نا-بهره‌وام که کاتی وینه‌ی نخشه‌که ده‌کیشین، ئه‌وه ناچار ده‌بین که له شوینیک یان چند شوینیک ده‌ستمان هه‌لگرین پاشان ده‌ست به‌کیشانی وینه‌که بکه‌ینه‌وه، دیاریشه‌که ئه‌مه پچران و بۆشایی ده‌خاته ناو وینه‌که. با بینه‌وه سه‌ره نمونه‌ی عه‌ساره‌ی شه‌ربه‌ته‌که، گریمان سندوقیک هه‌نارت لایه، دانه به‌دانه ده‌یانخه‌یه ناو عه‌ساره‌که، گریمان دانه‌یه‌ک ده‌خه‌یه ناو عه‌ساره‌که به‌لام هیچ ئاوئیکی نییه! واته ئه‌و دانه‌یه ئاوی نه‌بوو (وشک بوو)، بۆیه لیره کیشه‌یه‌ک دروست ده‌بیت، واته له نخشه‌ی $f(x)$ نرخیک هه‌یه، با بلین ئه‌و نرخه بریتیه له k ، کاتیک k له نخشه‌که داده‌نینه‌وه، هیچ شتی‌کمان ده‌ست ناکه‌ویت، وه یان شتیکی ته‌لیسمای ریگه‌پینه‌دراومان ده‌ست ده‌که‌ویت، بۆیه هه‌ر نخشه‌یه‌ک تووشی کیشه‌ی له‌م شیوه‌یه هات، ئه‌وه به‌و نخشه‌یه ده‌وتریت: بهره‌وام نییه. نخشه‌ی بهره‌وامیش واته هیچ پچرانیکی تیدا نییه، هه‌ر گورانکاریه‌کی بچوک له x به‌هه‌مان شیوه گورانکاریه‌کی بچوک له نخشه‌که دروستده‌کاته‌وه، ئه‌م بیروکه‌یه‌ش هاوشیوه‌ی دۆزینه‌وه‌ی ئامانجه‌کانه له زنجیره‌کان و یه‌که‌به‌دوای یه‌که‌کان،

بهلام ئەمەش کارێکی هەروا سادە نییە بو ئەوەی بزانیین که ئاخۆ
 نهخشهیهک بهرهوامه یان نا، چەندین ڕیگا هەن، وەک ڕیگای پیناسە،
 یانیش ئەو بیردۆزانهی که له ڕیگای پیناسه کهوه هه لچهراون.



نخشه سینگوشه بیه کان

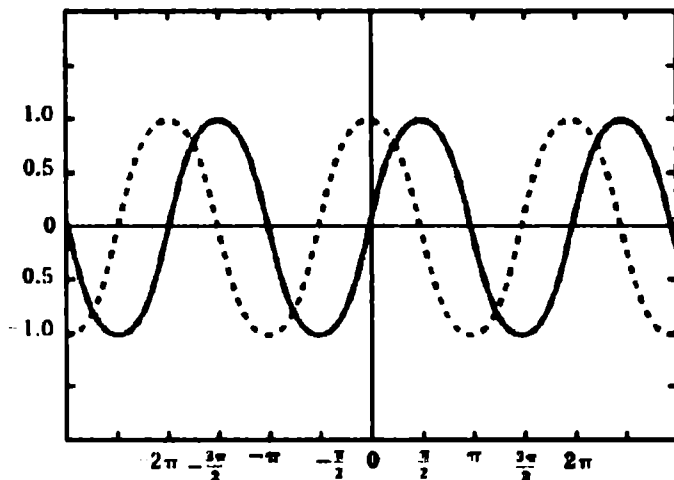
Trigonometric Functions

نخشه سینگوشه بیه کان، ئه و نهخشانه که گۆراوی نهخشه که گۆشه ن- Angel که سه ره کترینیان بیرتین له نهخشه گۆشه کانی

$$f(x) = \sin(x) \text{ و } f(x) = \cos(x) , f(x) = \tan(x)$$

که پیمان ده لاین: نهخشه سینگوشه بیه کان. مه به ستمان لینی ئه و سینگوشه بیه که گۆشه بیه کی پله 90 هیه، واته سینگوشه بیه کی گۆشه وه ستاو. له گه له ئه مه ش، ئه م نهخشانه به کارهینانیان زۆره له و دیوی ئه اندازه وه، به کارهینانی له زۆر بابتهی هه مه جۆر هیه به لیکدانه وه و تیگه یشتن له هه ندیک دیاره. کاتیک دین وینهی ئه و نهخشانه ده کیشین، ئه وه وینه که ی کلیشه بیه کی- دووباره بوونه وه ی ریک پیشان ده دات، به جۆریک به خولیک 360 یان 2π ، ئه وه وینه که خوی دووباره ده کاته وه، بۆیه به و نهخشانه ده وترین نهخشه ی خولی- ده وری وه به ئینگلیزی پتی ده وتریت Period. ئه مه ش گرنگیه کی زۆری هیه له خویندنی فیزییا و به تایبته له بابتهی شه پۆله کان. نهخشه ی ساین نهخشه بیه کی تاکیه (odd function)، چونکه $\sin(-x) = -\sin(x)$ ، واته وینهی نهخشه ی ساین، وینه دانه وه بیه به ده وری خالی بنه پته ی ته وه ره ی پۆتان (0,0)، کۆساین نهخشه بیه کی جووتیه (even function)، چونکه $\cos(-x) = \cos(x)$ ، واته وینهی نهخشه ی کۆساین وینه دانه وه بیه به ده وری ته وه ره ی y له پروته ختی پۆتانه دا. ناوی ساین له

بهمانای که وانه یی دیت، وه 'کو ساین' هر له ساینه وه پیدابووه، نهگه سهرنج بدهین کو ساین (Cosine)، لیره ئه (کو-co) له وشه ئینگلیزییه که وه رگراوه (Complimentary of sine). هه ردهم مه وای ئه وه نه خشانه له نیوان -1 و 1 دایه، واته مه وای ئه نه خشیه له نیوان ئه دوو به هایه تته پرناکات.



هیلکارییه پچه پچه کان نه خشی کو ساین ده نوینیت، وه هیلکارییه ئاساییه که وینهی نه خشی ساین ده نوینیت.

بیردۆزی به‌های ناوه‌ندی

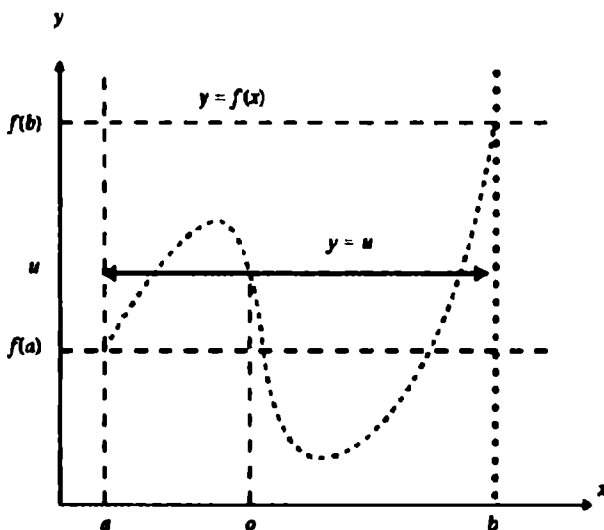
The intermediate value theorem

بیردۆزی به‌های ناوه‌ندی، بیردۆزیکه له مه‌ر نه‌خشه بهره‌وامه‌کان،
ئو نه‌خشانه‌ی که ده‌توانین وینه‌که‌یان بکیشین بی‌ئوه‌ی ده‌ستمان
هه‌لگرین و وینه‌که بۆشایی بکه‌وتی. ده‌قی بیردۆزه‌که ده‌لیت:

بۆ هه‌ر نه‌خشه‌یه‌کی بهره‌وام، هه‌ر ژماره‌یه‌ک y له نیوان دوو ژماره‌ی
تری مه‌ودای نه‌خشه‌که، ئه‌وه له بواری نه‌خشه‌که، ژماره‌یه‌ک هه‌یه x که له
رینگه‌ی نه‌خشه‌که وه ده‌مانه‌ینیت بۆ ئه‌و ژماره‌یه $f(x) = y$.

واته، به هه‌یج شایه‌یه‌ک بازدانیک یان بۆشاییه‌ک له مه‌ودای
نه‌خشه‌که بوونی نییه. نمونه‌یه‌ک: ئه‌گه‌ر نه‌خشه‌یه‌که‌مان هه‌بیت، 10 و
20 ی پێده‌ین، ئه‌ویش له به‌رامبه‌ر 20 و 40 مان پێداته‌وه. ئه‌گه‌ر له
نیوان 20 و 40 هه‌ر ژماره‌یه‌ک هه‌لبژێرین، ئه‌وه‌ی ده‌بیت له بواری
نه‌خشه‌که ژماره‌یه‌ک هه‌بیت بمانه‌ینته‌وه بۆ ئه‌و ژماره‌ی هه‌لمانه‌بژارد، واته
له نیوان 10 و 20 ده‌بیت ژماره‌یه‌ک هه‌بیت. با بینه‌وه سه‌ر نمونه‌ی
عه‌ساره‌ی شه‌ربه‌ته‌که، تۆ له کۆمه‌لێک میوه شه‌ربه‌تیکی کۆکتیلت دروست
کرد، هه‌ر میوه‌یه‌ک به‌ فیتامینیک یا سویدیک ناسراوه، ئه‌گه‌ر بیت و
شه‌ربه‌ته‌که به‌رینه‌ تاقیکه، ده‌بینین فیتامین k له ناو شه‌ربه‌ته‌که هه‌یه،
واته: ئیلا-حه‌تمه‌ن له‌سه‌ر که شه‌ربه‌ته‌که دروستکراوه، مۆزی تیندابووه.
ئهمه هه‌مووی له‌سه‌ر نه‌خشه‌ی بهره‌وام قسه‌ی له‌سه‌ر ده‌کریت، به‌لام

هه‌ندێ نه‌خشه هه‌ن، له‌گه‌ل ئه‌وه‌ی به‌رده‌وامیش نینه، به‌لام له‌ مه‌ودایه‌ک ئه‌وشته هه‌ر جێ به‌جێ ده‌که‌ن. ئه‌م بیردۆزه بۆ سه‌لماندنی زۆریک له‌ بابته‌ی تر به‌کارده‌یت، که ده‌توانین له‌ ڕیگه‌ی ئه‌م بیردۆزی بگه‌ینه ئه‌وه‌ی که بۆ هاوکێشه‌یه‌ک، 'شیکار' بپوونی هه‌یه یان نا. هه‌روه‌ها ئه‌م بیردۆزه وه‌ک که‌ره‌سه‌سته‌یه‌ک وایه بۆ بیردۆزی له‌فه‌ی گۆشه‌یه‌ک (Ham sandwich theorem) واته کاتیک پارچه گۆشته‌یکمان هه‌یه له‌ نێوان دوو پارچه نان-سه‌مون، کاتی گه‌زه‌ی لێ ده‌ده‌ی، ئه‌وه به‌ دلنایایی گه‌زه‌ت له‌ هه‌ردوو پارچه‌که‌ داوه، ئه‌ی که گه‌زه‌ت له‌ هه‌ر دوو پارچه‌که‌ ده‌ده‌ی، ئه‌وه به‌ دلنایایی گۆشته‌که‌ش گه‌زه‌که‌ی به‌رده‌که‌وێت.

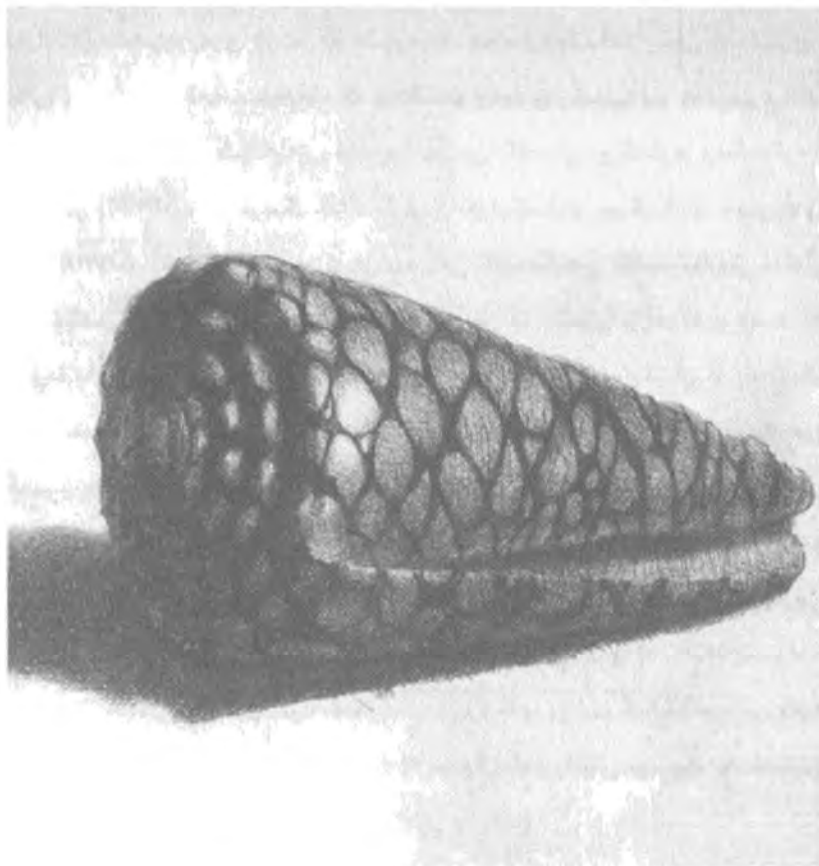


کالکولس

Calculus

جیاکاری و تهاوکاری-کالکولس، سه ره کترین لقی بیرکاری، که به گشتی ده باره ی گۆرانه-خیرایی و تاودان (chang). به گشتی دوو شت ده گریته خوی، نه وانیش داتاشراو و تهاوکاری، هر بویه پیی دهوتریت جیاکاری و تهاوکاری. له داتاشراو پیژهی گۆران و له تهاوکاریدا پووبه ری ژیر چه ماوه یه که هژمارده کات، یان نه خشی بته پته تی بو نه خشی یه که داتاشراوه ی و هر گراوه. هه موو نه و بیرکاریه ی بهر له کالکولس فیری ده بین، گشتی بیرکاری وه ستاوه-جیگیر (Static)، له کاتی که جیاکاری و تهاوکاری بیرکاری جووله ن (Dynamic). قوتابی هر له قونای ناماده یی ناشنایه تی له گهل که لکیله س پهیدا ده کات. وشه ی که لکیله س به واتای ورده بهر دیت له بته پته تا، واته بو ژماردن. داتاشراو و تهاوکاری ههردووکیان له بابته تیک هاوبه شیان هه یه، نه وانیش له نامانجه کان (Limits)، هه م له دوزینه وه ی گۆران-نامانج به کاردینیت، هه م له دوزینه وه ی پووبه ری ژیر چه ماوه یه که نامانج به کاردینیت، وه زور به وردی به دوا ی نه م پرؤسه یه وه یه. گرنگترین به کاره ی تانه کانیان له خویندنی خیرایی، کیشکردن و تاودان، که بو هر یه کیک له م بابته تانه، بناغه که ی له که لکیله یسه وه سه رچاوه ده گریته و قورموله ده گریته. بیروکه ی پشت کالکولس، بریتیه له و په یه ندیه ناوازه ییه ی که هه یه له نیوان گۆرانیکی بچوک له نیوان

بوار و مهودا، واته ئه و ژماره ی به نهخشه که ی دهدهین و ئه و ژماره ی نهخشه که پیمان دهدهاته وه. 'بیرکاری کرداری- Applied maths' پشت به کالکیله س ده به ستیت بو کارکردن، چونکه به شیکی زور له دیارده کان له فیزیا و کیمیا و بواره کانی تر به گشتی به هژی کالکیله سه وه وه سف ده کرین و لیکه درینه وه.



ریشه‌ی گۆرپان

Rates of change

به‌هۆی وینه‌ی نه‌خشه‌وه، ده‌توانین ئه‌و ریشه‌ی گۆرپانه بپه‌یوین که له نه‌خشه‌که پووده‌دات. ئه‌گەر بیت و وینه‌ی نه‌خشه‌که به‌رز و نزمی تیدا بیت، ئه‌وه ئه‌و گۆرپانه‌ی پووده‌دات زۆر خیرا ده‌بیت. به‌لام ئه‌گەر بیت و تهنیا له‌سه‌ر یه‌ک په‌وت (به‌رز و نزمی تیدا نه‌بیت) بیت، ئه‌وه ئه‌و گۆرپانه‌ی پووده‌دات، زۆر کم ده‌بیت، که ئه‌مه‌ش لیکچوونیکه فیزیکی هه‌یه.

مه‌به‌ست له‌گۆرپان لێره بریتیه له لاری نه‌خشه‌که، واتا له ته‌وه‌ری x ئه‌و گۆرپانه‌ی پووده‌دات له به‌رام‌به‌ر به‌رزییه‌که چۆن ده‌گۆریت له ته‌وه‌ری y ? بۆ نه‌خشه‌ی هه‌لی، لاری نه‌خشه‌که نه‌گۆرپکه، که لاری نه‌خشه‌که له هه‌مووشوونیکه نه‌خشه‌که هه‌ر هه‌مان شته، ئه‌گەر سه‌یری نه‌خشه‌ی هه‌لی بکه‌ین، ده‌بینین که: $y = mx + b$ کاتیک m لاری نه‌خشه‌که ده‌نوینیت. به‌گه‌ستی بۆ نه‌خشه‌کانی تر، ده‌بیت خالیک ده‌ست نیشان بکه‌ین بۆ ئه‌وه‌ی لاری نه‌خشه‌که له‌و خاله‌ بدۆزینه‌وه، چونکه وینه‌ی هه‌ر نه‌خشه‌یه‌ک به‌ ده‌ر له وینه‌ی نه‌خشه‌ی هه‌لی و نه‌خشه‌ی نه‌گۆر، ئه‌وانی تر وینه‌کانیان چه‌ماوه‌ن (Curve). بۆ دۆزینه‌وه‌ی لاری نه‌خشه‌یه‌ک له خالیک، ئه‌وه پێوستمان به‌ خالیکه‌ی تر ده‌بیت. وه‌ک چۆن ئه‌گەر به‌مانه‌وینت تانکیه‌ک به‌رینه‌ سه‌ریان، ئه‌وه دوو که‌سی ده‌وینت، له‌و دوو که‌سه‌ ده‌بیت، یه‌کیان خۆت بیت، ئه‌وی تر هه‌ر که‌سیک بیت کیشه

نیسه. دوزینه وهی لاری نهخشه یه ک له خالیک، واتا دوزینه وهی داتاشراوی
 ئه و نهخشه یه، پاشان دانانه وهی خاله که؛ له داتاشراوی نهخشه
 بنه پره تییه که، ئه وه لاری ئه و نهخشه یه مان دهست ده که ویت له و خاله ی
 مه به ستمانه.

لاری نهخشه ی نه گۆر ده کاته سفر، نمونه وه ک: $f(x) = 5$ وینه ی
 ئه م نهخشه یه هیلیکی راستی ئاسویه، که لارییه که ی سفره. به لام بز
 راسته هیلیکی ستونی، لاری پیناسه نه کراوه، بز نمونه $x = 5$. لیره
 پرسیاریک دروست ده بیت، بزچی لاری نهخشه ی نه گۆر ژماره سفره؟
 وادانی له رۆژیک پله ی گهرمی له کاتژمیر 12 تا 6 ی دوی نیوه پۆ به
 به رده وامی 40 پله بوو. ئیستا، به رزی و نزمی له پله ی گهرمی له و
 مه ودا به چند بوو؟ دیاره که که به رزی و نزمی پوی نه داوه، بزیه

ریشه ی گۆران-به رزی نزمی
 سفره. بز نهخشه ی هیلی،
 کاتیک وینه که ی هیلیکی
 لاره، ئه مه ش ده کریت بلین:
 له کاتژمیر 3 شه و بز 7
 به یانی، پله ی گهرمی ورده
 ورده داده به زی، بز هر
 کاتژمیریک 2 پله داده به زی،
 ئه مه واته ریشه ی گۆران-
 لاری بریتیه له 2



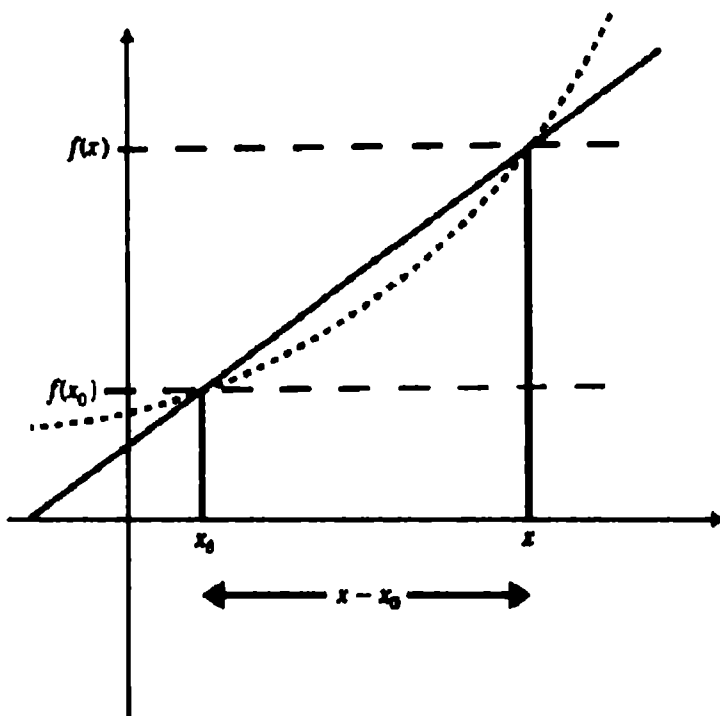
جیاکاری

Differentiation

جیاکاری، یه کیکه له چه مکه هره گرنه کانی کالکله س. که تیدا له ریگه ی به کارهینانی هاوکیشوه ده کریت لاری نه خشه یه ک بدوزینه وه، واته ریژه ی گوران بدوزینه وه له خالیکی دیاریکراو. ساده ترین په یوه ندی له نیوان دوو گوراودا، هاوکیشوه ی هیلی؛ یه کیکه له وان، $f(x) = mx + c$ کاتیک که m لاری نه خشه که ده نوینیت. نه گره نرخیک جیگیر بکین و ناوی لی بنین x_0 له سهر ته وه ری x دا، پاشان لاری نه خشه که له خالی x داواکراوه که بیت، نه وه بریتیه له نه و گورانه ی پروده دات له x دا، وه y که مه به ستمان $f(x)$. نه م برانه ش دیاره که ده کاته: $x - x_0$ و $f(x) - f(x_0)$ وه که له وینه که ی خواره وه شدا دیاره. دوزینه وه ی لاری له خالی x_0 گرنه که له دوزینه وه ی m که $f(x) - f(x_0)$ به نزیکه یی یه کسانه به $m(x - x_0)$. چونکه x لار ده بیته وه به ره و x_0 به ده برینگی تر، $x - x_0$ و $f(x) - f(x_0)$ ، نه و دوو بره که ی یه کسان ده بن؟ بره ی $x - x_0$ جارانی چ ژماره یه ک m بکین یه کسان ده بیت به $f(x) - f(x_0)$ ؟ هه رکاتیک نه و لاریه m بو نه خشه که بوونی هه بوو، نه وه پنی ده و تریت لاری نه خشه که داتا شراوه ی نه خشه که.

داتاشراره ی نه خشه ی f به م شینوه به $f'(x)$ کوزارشتی لى ده کړیت

یانیش $\frac{df}{dx}$ 75



75 له سالی 1675، 'لایبېنز' دهسته واژه- ده برینى $\frac{df}{dx}$ ناساند یو جیاکاری-داتاشراره، دواى 95 سال 'لاگرانج' په کم کهس بوو، دهسته واژه- ده برینى $f'(x)$ به کارهینا یو داتاشراره ی په کمى نه خشه په ک.

دۆزینه وهی داتاشراوه

Calculating Derivative

هر وهک له بابه ته کانی پيشوو وتمان چند جزریک نهخشه مان ههیه. بۆیه دۆزینه وهی داتاشراوهی هر نهخشه یهک جیاوازه له گهل یه کیک-جزری تر. یه کیک له نهخشه کان برتییه له و جزره نهخشانه: $f(x) = x^n$ که داتاشراوه کهی دهکاته: $f'(x) = nx^{n-1}$ کاتیک n برتییه له توانی رهسه نی نهخشه که.

داتاشراوهی $f(x) = x^2$ دهکاته: $f'(x) = 2x$ ، بۆ نهخشه کانی x^3 و x^7 به هه مان شیوه. بۆ نهخشه کانی تریش له و شیوهی خواره وه هه ندیکیان داتاشراوه کانیان نووسراوه. ئه گه ر بیته و نهخشه ی $f'(x)$ خوی توانای داتاشراوهی هه بیته، ئه وه دووباره ده توانین داتاشراوی بۆ وه رگرینه وه، واته داتاشراوهی دوهم بۆ هر هه مان ئه و نهخشه ی سه ره وه که نووسیومانه، که داتاشراوهی دوهمی نهخشه که دهکاته: $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. بۆیه دووباره به هه مان شیوه ئه گه ر n مین داتاشراوهی نهخشه که بدۆزینه وه، ئه وه به و شیوه ئاماژه ی پهن ده که یین: $f^{(n)}(x)$

بۆ ئه م جزره نهخشه ی سه ره وه که نووسیومانه، ئه وه به زیاتر وه رگرتنی چهن دین جار داتاشراوه که ی، ئه وه توانی نهخشه که ورده ورده بچوک ده بیته وه و کۆلکه ی گۆراوی نهخشه که گه وره و گه وره تر ده بیته،

بهلام به بهره‌وام بوون له و کاره، له کوتایی له شوینیک به وه‌رگرتتی
 داتاشراوهی نه‌خشه‌که، نه‌خشه‌که ده‌بیته سفر، وه‌ک چون نه‌خشه‌ی
 $f(x) = 2x$ به داتاشراوهی دووهم نه‌خشه‌که ده‌بیت به سفر:
 $f''(x) = 0$.

f	f'
$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x
$\cos x$	$-\sin x$
x^n	nx^{n-1}

پیکه‌ستنه‌وه‌ی نه‌خشه‌کان

Combining functions

پیکه‌ستنه‌وه، واته چند نه‌خشه‌یه‌کمان هه‌بیت، لیک‌ی بده‌ین و نه‌خشه‌یه‌کی نو‌ی دروست بکه‌ین له ریگه‌ی ئه‌و چند نه‌خشه‌ی هه‌مانه.

بۆ ئه‌و مه‌به‌سته دوو ریگه‌ی سه‌ره‌کی هه‌ن، ئه‌وانیش: کرداره‌کان له‌سه‌ر نه‌خشه‌کان (که‌م، کۆ، جاران و دابه‌ش)، یان ئاویته‌کردنی نه‌خشه‌کان. ئه‌گه‌ر دوو نه‌خشه‌مان هه‌بیت $f(x)$ و $g(x)$ ئه‌وه به‌ ریگه‌ی یه‌که‌م، ئه‌گه‌ر بیت و دوو نه‌خشه‌که به‌هۆی کرداری جاران-لیکدان، لیکدانی یه‌کتیری بکه‌ین، واته: $f(x) \cdot g(x)$ ، وه‌ک: ئه‌گه‌ر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sin(x)$ ئه‌وه له‌ ریگه‌ی لیکدانی ئه‌و دوو نه‌خشه‌یه، نه‌خشه‌یه‌کی نو‌یمان ده‌ست ده‌که‌ویت ناوی ده‌نێن:

$$h(x) = \sin(x) x^2$$

ئاویته‌کردنی دوو نه‌خشه‌ به‌و شـ ئه‌وه ده‌کریت

$f(g(x))$ یان $g(f(x))$ ، دیاریشه‌ که ئه‌م دووانه یه‌کسان نین.

$$f(g(x)) = f(\sin(x)) = (\sin(x))^2$$

$$g(f(x)) = g(x^2) = \sin(x^2)$$

دۆزینه وهی داتاش راوهی ئەم نهخشانهش به به کارهینانی یاسای زنجیر (Chain rule) دهکریت، که له خوارهوه به وینه پروونکراوتهوه چون.

PRODUCT RULE

$$\frac{d}{dx} u(x)v(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

e.g. $(x \sin x)' = \sin x + x \cos x$

CHAIN RULE

$$\frac{d}{dx} u(v(x)) = v'(x)u'(v(x))$$

e.g. $\left(\sin\left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]\right)' = (x^2 - 1) \cos\left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]$

QUOTIENT RULE

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{(u'(x)v(x) - u(x)v'(x))}{v(x)^2}$$

تهواوکاری

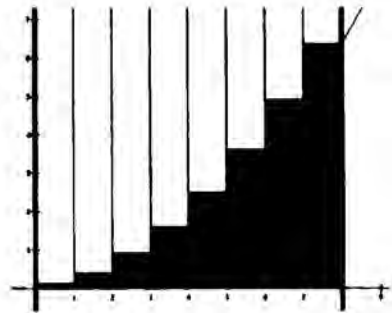
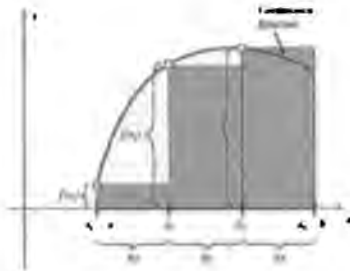
Integration

مه به ست له تهواوکاری، بریتیه له دوزینه وهی پووبه ری بن-ژیر چهماویهک یا وینهیهک که سنوریکه هیه. له خواره وه نهگه سهرنجی چهماوهی نیوان هر دو خالی a و b بدهین: دهینین دوزینه وهی نه پووبه ره ئاسان نییه، چونکه شیوهکهی ریک نییه تا یاسای پووبه شیوه زانراوهکان به کاریین، ئیمه یاسای پووبه تهیا بۆ تهنیکه شیوه زانراوی وهک، بازنه، سیکۆشه، چوارگۆشه و لاکیشه دهزانین، بۆیه بۆدوزینه وهی پووبه ریکی له م شیوه، نه وه پیوستمان به تهواوکاری هیه.

بیرۆکه کهش نه وهیه: سه ره تا نه و پووبه ری ده مانه وئ بیدوزینه وه به چند پارچه هیلک، بهش بهشی دهکین، وادانئ له سه ره تا دهیکه ینه سئ بهش، وهک له وینه که دا دیاره، نه و سئ بهشه لاکیشه، ئیمهش نه زانین پووبه ری لاکیشه چۆن ده دوزینه وه، نه ویش دریزئ جارانی پانی، بۆیه پووبه ری هه رسئ لاکیشه ده دوزینه وه، پاشان هر سیکیان به یه که وه کۆده که ینه وه، پووبه ره که مان ده ست ده که ویت، به لام به نزیکی، چونکه نه و ژماره ی ده ستمان ده که ویت راسته قینه نییه، له بهر نه وهی هه ندیک کم و کوری هیه، واته نهگه سه یری لاکیشه ی یه کم بکه یین، ده بینین له بهشی سه ره وه، هه ندئ پووبه ره که له ده ره وهی چهماوه که یه، له وهی دوا ی نه و، له سه ر لاکیشه که به شیک به جئ ماوه، له لاکیشه بچوکه که، مه ساقه یه ک زۆرمان به جئ هیش تووه! نه ی چاره سه ر؟

چارهسه ره که ئه وهیه ههتا زیاتر لاکیشه دروست بکهین، ئه وه زیاتر و زیاتر له نرخى راسته قینهی رووبه ره که نزیک دهکه وینه وه، به جوریک ئیمه له بیرکاری ژماره ی ئه و لاکیشهانه بۆ ناکوتا نزیک دهکه وینه وه، به و شیوه ش رووبه ی راسته قینه مان دهست دهکه ویت. له وینه ی دوا ی ئه و ژماره ی لاکیشه کانمان زیاتر کردووه، بۆیه وهک دیاره کهم بهش ههیه فه راموشمان کردبیت. بۆیه دۆزینه وه ی رووبه ی له م شیوه ، به هوی یاسای ته واوکاریه وه ده کریت، که بریتیه له: $\int_a^b f(x) dx$ واته دۆزینه وه ی رووبه ی نه خشه ی f له ماوه ی a و b دا کاتیک $a < b$.

ئه و ته واوکاریه ی ئیمه له قوتابخانه خویندوومانه، ههتا ئه وه ی له زانکوش ده خویندربیت، پیهی دهوتریت: ته واوکاری پیمان (Riemann integration). جیا له ته واوکاری پیمان، ته واوکاری تریش هه، وهک: ته واوکاری لیبیک (Lebesgue integration).



بیردۆزی سه رهکی له کالیکلهس

The fundamental theorem of calculus

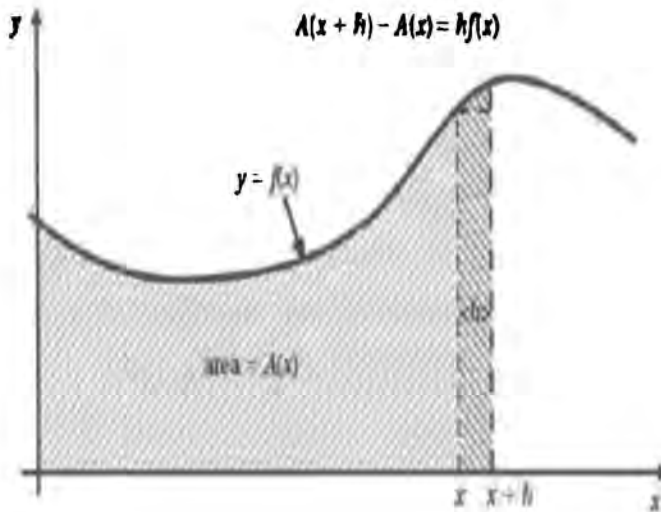
بیردۆزی سه رهکی کالیکلهس ده لیت: ته واوکاری پیچه وانی داتاشراوهیه. بیرۆکه که شه له وه سه رچاوهی گرتووه که ته واوکاری نه خشه ی $f(x)$ ده کړیت وهک نه خشه یه کی نوی سه یر بکړیت $F(x)$. له م په یوه نډیبه شه ده بینین که: $F(x) = \int^x f(u) du$.

ایره شه نه خشه نویبه به پیتی که پیتل هیما ده کړیت. به شیوه باوه که ی وا ده نو سریت: $F(x) = \int f(x) dx$. بو شه ی خوینتری سه ری لن نه شیویت. شه جوړه ته واوکاری به پتی ده و تړیت ته واوکاری بی سنور. که شه ته واوکاری به هیچ په یوه نډیبه کی به پرو به نیه، شه ته واوکاری به که په یوه نډی به پرو به روه هیه، ته واوکاری سنور داره. کهر له وه ده سته واژه ی سه روه وردیبه شه ده بینین که:

$$\int f'(x) = f(x) + c$$

رهنگه به کتیک پرسیت شه C چیه زیاده مان کردووه؟ له بهر شه ی داتاشراوه ی ژماره نه گوړ ده کاته سفر، بو یه نیمه شه نه گوړه که ناومان لی ناوه C زیادی ده کین، پتی ده وترین نه گوړی ته واوکاری به که. هر

بۆیه نه خشی $F(x)$ پیشت بهو نه گۆره نا به سقتیت، چونکه داتاشراوه که ی ده کاته سفر.



سه لماندن ئه اندازه ییانه بۆ بیردۆزی سه ره کی کالکیله س. روه به ری ئه و به شه په راویزه ی که به h پیشاندراره، ده توانین بجه ملیندریت به هۆی $h \times f(x)$ یان کهر هاتوو نه خشه که مان بریتی بیست له $A(x)$ ، ئه وه ئه و روه بهر هه ژمارده کریت به هۆی $A(x+h) - A(x)$.

ته‌واوکاری و سینگرشه‌زانی

Integration and trigonometry

هژمارکردنی ته‌واوکاری بۆ هه‌ندیک له نه‌خشه سه‌ره‌کیه‌کان، په‌یوه‌ندی به نه‌خشه سینگرشه‌یه‌یه‌کان هه‌یه. ئەمەش ئەو ده‌خاته‌پوو که نه‌خشه سینگرشه‌یه‌یه‌کان چهنده گرنگ و سه‌ته‌رن بۆ بیرکاری. به‌جۆریک ئەگه‌ر هاتبا نه‌خشه سینگرشه‌یه‌یه‌کان له ئەندازه‌دا پیتاسه نه‌کراپان و باسنه‌کراپان، ئەو ده‌بوو له کالکیله‌س بیر له شتیکی له‌و شیوه بکه‌ینه‌وه، چونکه ئەوه‌تا تووشی کیشه‌یه‌ک ده‌بین که به‌بێ بوونی نه‌خشه سینگرشه‌یه‌یه‌کان وه‌لامیکی راسته‌خۆمان نه‌ده‌بوو. نمونه وه‌ک:

$$\int \frac{1}{(1-x^2)} dx = \tan^{-1}(x) + c$$

نمونه‌یه‌کی تر که له وینه‌که خراوه‌ته‌پوو، نه‌خشه‌ی: $\tan^{-1} x$ نه‌خشه‌ی پیچه‌وانه‌یه بۆ نه‌خشه‌ی \tan ، که ناسراوه به: \arctan . ئەگه‌ر سه‌ره‌نج بده‌ین نه‌خشه‌ی پیچه‌وانه جیاوازه له‌گه‌ل ئەم شیوازه‌ی نووسینه: $\frac{1}{\tan(x)}$ واته، ئەم له‌گه‌ل: $\tan^{-1} x$ جیاوازیان هه‌یه. شیوازی ئاسایی نووسینی ئەو جۆره ده‌ربهرینه‌به‌هۆی به‌کارهێنانی ئەم په‌یوه‌ندییه، که: $\int f'(x) dx = f(x) + c$ ، که ئەمەش ئەو ده‌گه‌یه‌نیته که داتاش‌راوه‌ی: $\tan^{-1} x$ ده‌کاته: $\frac{1}{1+x^2}$. به‌همان شیوه نه‌خشه‌ی پیچه‌وانه‌ی ساین: $f(x) = \sin x$ پێی ده‌لین: \arcsin .

f	f'	$\int f'(x) dx$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin x + c$
e^x	e^x	$e^x + c$
$-\cos x$	$\sin x$	$-\cos x + c$
$\left(\frac{1}{n+1}\right) x^{n+1}$	$x^n (n \neq -1)$	$\left(\frac{1}{n+1}\right) x^{n+1} + c$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x + c$

بیردۆزی تایله

Taylor's theorem

بیردۆزی تایله⁷⁶ یه کیگه له بیردۆزه هه ره گرنه گانی کالکیولهس، که ده لیت: نه گه بیت و نه خشه یه ک ناکوتا جار توانای داتاشراوه ی هه بیت، نه وه نه و نه خشه یه ده تواندریت له سه ر شیوه ی زنجیره یه کی توانی بنوسریت. که پیی دهوتریت زنجیره ی تایله.

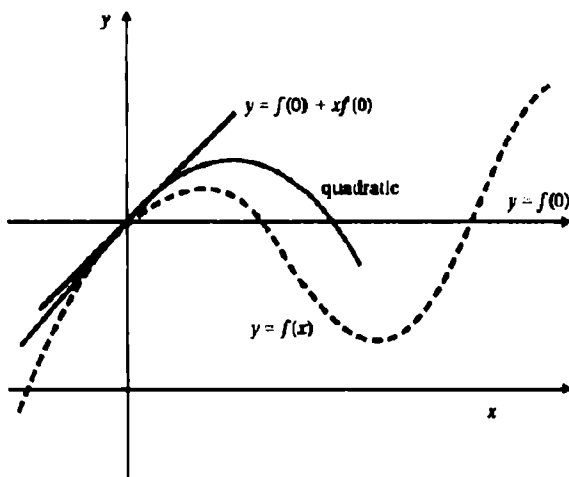
زنجیره ی تایله، بۆ نه خشه یه ک له ده وروبه ری خالی x_0 ، بریتییه له کۆی چه ندين راده که $x - x_0$ ده گرنه خۆیان که توانیش هیز وهرده گرن و توانه کانییش ژماره سروشتیه کانن. نه گه بیت و نرخ ی x نزیک بیت له سفر، نه مه زنجیره که مان ده بیت:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^n(0) + \dots$$

کاتیگ $f^{(n)}$ بریتییه له n جارهمین داتاشراوه ی نه خشه ی f و (!) بریتییه له ئۆپه ره یته ریک که پیی دهوتریت لیکدراو (Factorial). نه وه ی باسما ن کرد باریکی شازه له زنجیره ی تایله، که پیی دهوتریت: زنجیره ی ماکلوریه ن (Maclaurin series).

⁷⁶ ناوی تایله له ناوی بیرکاریزانی ئینگلیزی 'تیم بروک تایله' هاتوه.

ههگر بیت زنجیرهکه لیکزیکبوه بیت بۆ هه موو نرخیکی x که نزیک بیت له x_0 نهوه بهو نهخشهیه دهوتریت: نهخشه ی شیکارهیی (Analytic). که نهخشه ی شیکاریش زۆر گرنگه له بابته ی شیکردنهوه ی ژماره ئاوپتهکان (complex number). کاتیک تهواوکاری بۆ نهو جوړه نهخشانه دهوژینهوه.



له ریگه ی زنجیره ی تایله، ههنگاو به ههنگاو بهره و وینه راسته قینه ی نهخشه که دهوژین. له یهکه م راده ی زنجیره که، وهک له وینه که دا دیاره، هیلکی راسته، پاشان راده ی یهکه م و دووم به یهکه وه، چهماوه ی دووم دروست دهییت وهک له وینه که، راده ی یهکه م، دووم و سینه م پیکه وه... بهم شیوه پهیتا پهیتا له وینه ی راسته قینه ی نهخشه که نزیک دهینه وه.

تی ناخن-چووراندن

Interpolation

ئەم بابەتە زیاتر لە هونەرێک دەچیت! که بریتییە لە خەملاندنی دەرھاویشتەئە نەخشەیک لە خالێکی دیارایکراو، که ئەمەش بە پشت بەستن بە نرخەبەھا زانراوەکانی تری نەخشەکە. واتە خەملاندنی نەخشەیک بە ھۆی چەند خالێکی زانراوی نەخشەک (کە نازانین چییە). کە ئەمەش گرنگییەکی زۆری ھەیە لە بوارە پراکتیکییەکان، کاتێ بەکار دەھێنددریت بۆ دروست کردنی پەيوەندییەکی نەخشەیی بۆ چەند نرخیکی بەرەڵا⁷⁷.

وا دانسی که ئیمە کۆمەلێک نرخێ نەخشەیک دەزانین، که نەخشەکەمان بریتییە لە $f(x)$ و نازانین نەخشەکە چییە! ئەو نرخانەئە دەیانین بریتین لە $n + 1$ نرخ، واتە x_i ، $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ که لە بچوکترینەو بۆ گەوترین پیزکراو. پرسیارەکە ئەو ھەبە: لە نیوان ئەو نرخە زانراوانە چەندین نرخێ تر ھەن، ئیمە چۆن دەتوانین دەستمان بگات بەو نرخانە؟ وینەئە خالی x بە شتێو ھەبەکی گشتی چۆن بدۆزینەو ھەبە نیوان x_0 و x_n ؟ ئەم کیشەبەش، بە ھۆی ئەو کیشانەئە لە ژبانی پۆزانە توشمان دەبیت سەری ھەلدا، بۆ نمونە دیاریکردنی سنوورێکی ناوچەیک.

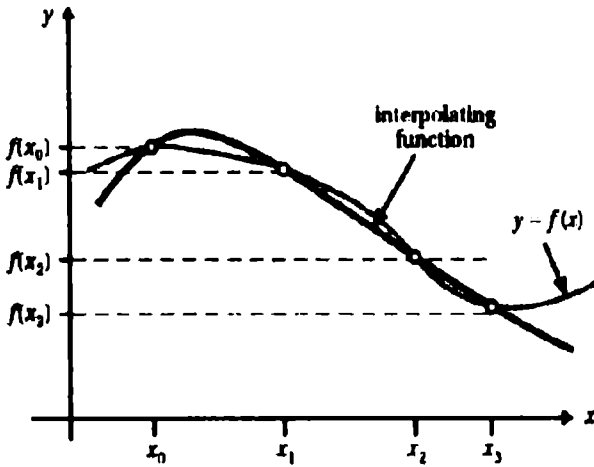
⁷⁷ واتا نازانین ئەو نرخە لە چ نەخشەیک بە دەست ھاتوو، نرخیکی بێ سەرپەرشتیار، ئیمە دین سەرپەرشتیارێک-بەختیارێک بۆ ئەو چەند نرخە دەدۆزینەو ھەبە دەستمان نەخشەیکە.

یه کیک له رینگاکان بو وهلامی پرسیاره که ئه وهیه: دۆزینه وهی راده دراریک به هۆی به کارهێسانی ئه زانیاریانهی هه مانه، واته له داتایه ی هه مانه، پاش ئه وهی ئه راده داره ده دۆزینه وه به هۆی ئه داتایه، ئه وه ده توانین نرخه هه خالیک بدۆزنه وهی که له ناو داتا که بوونی نییه، به لام به شیوه یه کی نزیکه یی.

ئه راده داره ی ده ی دۆزینه وه، په له که ی پشت به ژماره ی دراوه کانی داتا که ده به سه تیت، ئه گه ر داتا که مان $n+1$ دراو بییت، ئه وه راده داره که په له که ی بریتی ده بییت له n له گه ل $n+1$ کۆلکه. به م شیوه هه ده گه یه شیوه یه ک نه خشه بو داتا که مان. له سه ده ی هه ژده هه م بیرکاری زانی فهره نسێ "لاگرانج" میتۆدیک زۆر ناوازه ی دۆزیه وه بو ئه و با به ته ی باس مان کرد⁷⁸، واته نه خشه یه ک بو داتا که مان. میتۆده که ی لاگرانج، په یوه ندییه کی هه یه له گه ل زنجیره ی تایله ر (له با به ته ی پیشوو باس مان کر)، به لام هه ندیک له که م و کورپیش (Error) تیدایه، چونکه Interpolation زۆر ورد نییه، له به ره ئه وه ی له سه ر داتا نه خشه یه ک ده دۆزینه وه.

له وینه که ی خواره وه رۆشنه که که م و کورپیه که (Error) چیه. ئه و نه خشه ی به هۆی پیندراوه کان ده ی دۆزینه وه، پنی ده لین نه خشه ی تی ئاخراو. وه ک له وینه که ده بینین که نه خشه په سه نه که به به راورد به نه خشه تی ئاخراوه که، جیاوازییه کی هه یه.

⁷⁸ له قوناعی سه ی زانکو ئه و با به ته م له وانه ی 'Numerical analysis' خویند، به راستی ئیسته ش بیرى ئه و وانه یه ده که م.



لهم وینه پوونکردنه و بییه، چوار قال به زه قسی دیاره، که ههردوو
 چه ماوه که لهو خالانه به تهواوی به یه کترگه یشتوونه، نه مهش واتای
 نه وهیه، که نهو نهخشه تی ناخینراوهی ده دوزینه وه، ده بیت له گهل
 به هاکانی داتا که مان تهواوی به کبگریته وه، بۆ نمونه نه گهل له داتا که مان
 $x=3$ و له بهرامبهری $y=6$ ، نه وه نهو نهخشه ی دهیدوزینه وه، ده بیت بۆ
 $x=3$ نرخ ی لامان بداته وه که ده کاته 6. لیره بیرو که یه ک سه رئاو
 ده که ویت، نهویش: تا داتا که مان نرخ ی زیاتری تیدا بیت، نه وه نهو نهخشه
 تی ناخینراوهی دهیدوزینه وه، وردتر و باشتر ده بیت وه که له وهی
 داتا که مان بچوک بیت، به لام تا داتا که مان گوره تر بیت، دوزینه وهی
 نهخشه ی تی ناخینراو گرانتر ده بیت.

به‌رزترین و نزمترین

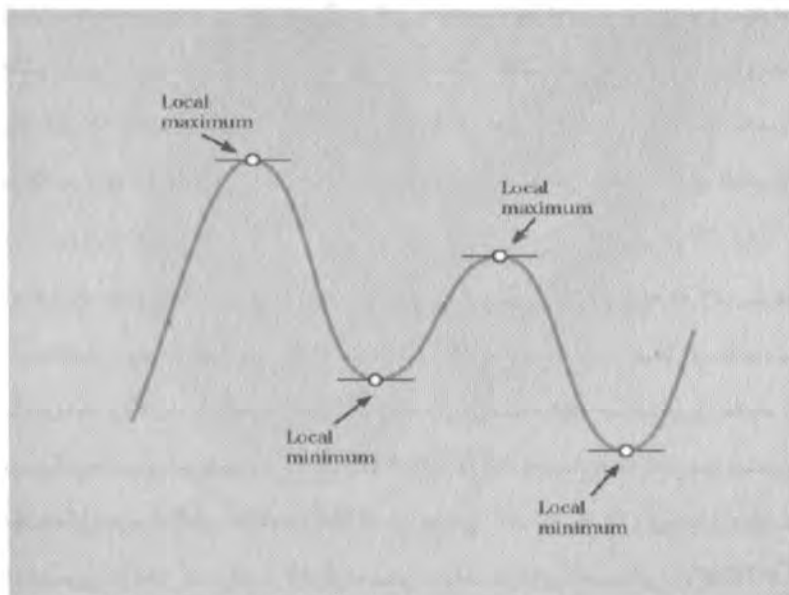
Maxima and minima

له بابته‌کانی پیشوو، باسی نه‌خشه و وینه‌ی نه‌خشه‌مان کرد. نه‌گر بیت و سه‌یری وینه‌ی نه‌خشه‌یه‌ک بکه‌ین، نه‌وه مومکینه بتوانین به‌رزترین شوینی وینه‌که و نزمترین شوینی وینه‌که دیاری بکه‌ین، واته که‌ران به‌ دوای به‌رزترین و نزمترین نرخ-به‌های نه‌خشه‌که، به‌م پروسه‌یه ده‌تریت: optimization.

نه‌خشه‌ی $f(x)$ له خالی C که‌وره‌ترین نرخ‌ی هیه نه‌گر بیت و $f(c) \geq f(x)$ بۆ هه‌موو نرخ‌یکی x . به‌هه‌مان شیوه نه‌خشه‌ی $f(x)$ بچوکتترین نرخ‌ی هیه له خالی d نه‌گر بیت و $f(d) \leq f(x)$ بۆ هه‌موو نرخ‌یکی x . لاری نه‌خشه‌که له هه‌ر یه‌ک له خالانه‌ی باسمان کرد، نه‌وه لاری بریتی ده‌بیت له راسته‌هیلکی ناسویی، وه‌ک له وینه‌که‌ش دا دیاره، بۆیه داتاشراوه‌که‌ی ده‌کاته سفر. بۆیه نه‌مه‌ش دوزینه‌وه‌ی به‌رزترین و نزمترین نه‌خشه‌که‌مان بۆ ناسان ده‌کات. له خالی C کاتیک داتاشراوه‌که له‌م خاله سفره، نه‌وه گشت راده هیلکی‌کانی زنجیره‌ی تایله‌ر بوونیان نامینیت، واته:

$$f(x) \approx f'(c) + \frac{1}{2} f''(c)(x - c)^2 + \text{higher order terms}$$

ئەگەر $f''(c) \neq 0$ ئەو وەتەن ئه‌وهیه شوێنه‌که وه‌ک بره‌گی هاوتای
 -چه‌ماوه‌ی کراوه‌ وایه، به‌رزترینه‌ ئه‌گەر داتاش‌راوه‌ی دووم نهرینه‌ی (-)
 بیت، نزمترینه، ئه‌گەر بیت و نهرینه‌ی (+) بیت. یان ئه‌گەر $f''(c) = 0$ ،
 ئەو موکینه خالی وینه‌دانه‌وه‌ بیت.

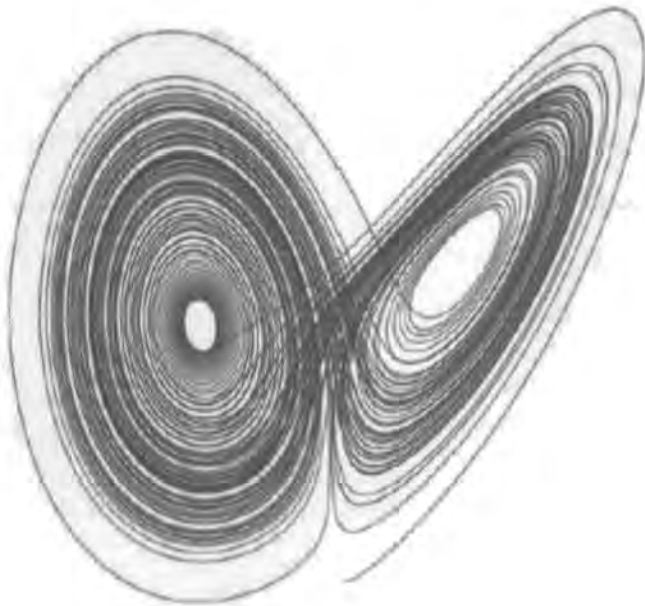


هاوکیشهی جیاکارانه

Differential equations

هاوکیشهی جیاکارانه، بریتیه له و هاوکیشه بیرکارییهی که تیدا نهخشهیهک و داتاشراوهی نهخشهکه لهخو دهگرنیت، واته پهپوهندییهکه له نیوان نهخشهیهک و داتاشراوی ئو نهخشهیه. هاوکیشهی جیاکارانه، بهکاربری هیه له بواری ئابوری، زانستی کیمیا و زیندهزانی، هروهها فیزیاش که تیدا کاتیک ریژهی گوران له بریک دههستیتوه بق همان برکه خوی، بۆنمونه ریژهی شیبوونهوهی مادهیهکی تیشکدهری کیمیایی هاوپرژه دهبیست لهگهله ژمارهی ئەتۆمهکانی نمونهکه، وهک له هاوکیشهیهک، ئهویش: $\frac{dN}{dt} = -aN$ کاتیک N بریتیه له ژمارهی ئەتۆمهکان، وه a بریتیه له و نهگۆرهی که پهپوهسته به نیوهی تهمهنی نمونهکه و، t بریتیه له کات. ئه هاوکیشهیهش شیکاری هیه، که شیکارهکهی بریتیه له $N(t) = N(0)e^{-at}$ ، دیاره که ئه دهبرینه یهکدهگریتوه لهگهله نهخشهیهک له شیوهی e^x ، که ئهههش پیمان دهلیت که شیبوونهکه توانیه. هاوکیشهی جیاکارانهی ئاسایی (Ordinary)، بریتیه له و هاوکیشهی که تیدا تهنیا یهک گۆراوی سهربهخوی تیدابه، وهک له و هاوکیشهی سهروهه که 'کات' گۆراوه سهربهخویهکهیه له نمونهکه. بهلام هاوکیشهکان زور جار مومکین نینه بق ئهوهی به وردی شیکارهکهی بدوزریتوه، زورجار شیکارهکهی به نزیکهیی دهبیست - میتودیکی نومریکالی دهبیست. له و نمونهی سهروهه

$N(t) = N(0)e^{-at}$ توانه که نهرینییه، چونکه شیپوونه وهی ماده یه کی تیشکده ره، واته تیشک بلاو ده کاته وه. نمونه یه کی بیرکاریانه له همبهر هاوکیشه ی جیاکارانه وهک : $f(x) - f'(x) = 0$.



ئهو شیپوهی سه ره وه، شیکاری هاوکیشه یه ک ده نوینیت به ناوی: هاوکیشه کانی لورینز (Lorenz equations)، که چه ماوه کان خویان دووباره ناکه نه وه له سه ره یه ک رهوت، که ئه مهش پیکهاته یه کی فراکتالی-له یه کبویی هه یه.

زنجیره‌ی فوریه

Fourier series

زنجیره‌ی فوریه⁷⁹ بریتیه له و نجیره‌ی که تیدا نه‌خشه‌که له سه‌ر شیوه‌ی کۆی ناکو‌تا راده دهنوسریت، که راده‌کانیش ساین و کۆساین ده‌گرنه خۆیان. له‌بەر ئه‌وه‌ی نه‌خشه‌کانی کۆساین و ساین نه‌خشه‌ی خولین (Period)، ئه‌وه واته زنجیره‌ی فوریه، بریتیه له نه‌خشه‌یه‌کی ده‌وری یاخود زنجیره‌یه‌کی خولی. ئه‌گەر بیت و نرخ‌ی x له نیوان 0 و 2π بیت، ئه‌وه ده‌تواندرین نه‌خشه‌یه‌کی وه‌ک: $f(x)$ له زنجیره‌ی فۆریه‌ر بنووسریت وه‌ک:

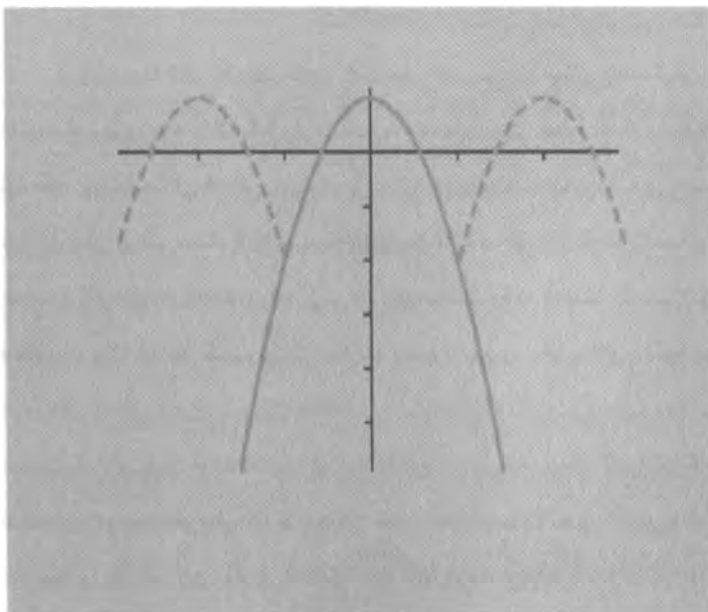
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

کاتیک که :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

⁷⁹ ژان باپتیست ژوزیف فوریه (21ی ئازاری 1768 - 16ی ئایاری 1830) زانای بیرکاری و فیزیای خه‌لکی فه‌رانسا بوو. به هۆی لیدوانه‌کانی له سه‌ر چۆنیه‌تی گواسته‌وه‌ی گهرمی ناسراوه. ئه‌م زنجیره‌یه‌یه‌کیکه له ده‌ستگه‌وته هه‌ره گرنگه‌کانی بواری زانست.

ئەگەر بێت و نەخشە پەسەنە کە مان خولی نە بێت، ئەو زنجیرە کە نەخشە کە له ماوه یەک ديارکراو نیشان دەدات.



ئەو وینەیه نەخشە ی $f(x) = 1 - x^2$ دەنوێنێت بە هۆی زنجیرە ی فوریی له ماوه ی $[-\pi, \pi]$

نەخشەى پتر له گۆراویک

Functions of more than one variable

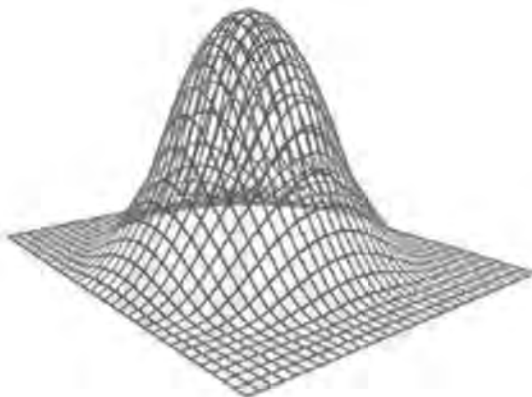
تا ئیستا ئەو نەخشانەى باسمان کردوون، یان باسکراون، گشتیان نەخشە بوون له یەگ گۆراودا. بۆیە نەخشەمان هەیه له گۆراویک زیاتری تێدایه. نەخشەش له گۆراویک زیاتر، بریتییە له پەیوهەندی نێوان چەند گۆراویکی لێک جیاواز (سەر بەخۆ). با بە نمونەیک ئەمە ئاسان بکەینەوه: عەسارەى شەربەتەکت له بیرە؟ لەو عەسارەیه تەنیا باسی میوهکانمان دەکرد، واتە لەوێ گۆراوهکە تەنیا میوه بوو، بەلام ئەوجارە دین لەگەڵ میوهکە شتی تری تێکەڵ دەکەین، بۆ نمونە که مۆز میوهیه، دین لەگەڵ مۆزەکه شیرى تێدەکەین! لێره مۆز میوهیه، وهک گۆراویک، وه شیر خواردنەوهیه، ئەوهش گۆراویکی تر، که ئیستا دوو گۆراو له ئارادایه. نمونەى نەخشەى پتر له گۆراویک وهک: $f(x,y) = x^2 + y^2$ که ئەمە نەخشەیهکە له دوو گۆراو، گۆراوهکانیش بریتین له x و y . ئیمه پێشتر له نەخشەى یەك گۆراو تەنیا نرخمان بە x دەدا، بەلام لێره دەبیت نرخ هەم بە x هەم بە y بدهین، واتە ئەگەر بێت و $y = 3$ و $x = 2$ ، پاشان له نەخشەکەى دا بنێنەوه، ئەوا: $f(2,3) = 2^2 + 3^2 = 13$. نەخشەى لەو شیوه ریگەمان دەدات که شتەکان (Objects) پێشانبەدین له بۆشایی سێ پەهەندی یان زیاتریش. نەخشەى زیاتر له گۆراویک، دەتواند ریت بە شیوه گشتییەکەى پێناسەى بکەین که: $f: R^2 \rightarrow R$ واتە بواری نەخشەکه بریتییە له تەوهرەى پۆتانى دوو پەهەندی R^2 و مەودای

نخشه که بریتیه له ژماره راستیهکان و اتا R . نخشه له یهک گورار وینهکهی بریتی بوو له چهماویهک (Curve)، بهلام نخشه له دوو گورار، وینهکهی بریتیه له پروهکان (Surfaces).

ئهو بیروکهی سهروه دهتواندریت گشتگیرتر بکریت بوو نخشه له

π گورای راستی، واته $f: R^n \rightarrow R$ ، وهک:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$$



جیاکاری به شی-هه ندهکی

Partial differentiation

جیاکاری به شی، بریتیه له گشتاندنیک بۆ جیاکاریکردنی نهخشه، نهگه بیت و نهو نهخشه به لهچهند گۆراویک بیت. وهک: نهخشه له بهک گۆراو، نهو جیاکاری هه لهسهه نهو گۆراوه دهکریت خۆ شتیکی ترمان نیه. وا دانیه ئیستا نهخشه به کمان هه به له دوو گۆراو پینکهاتوه، نهوانیش: X و y . واته $f(x,y) = z$. ئیستا نهگه بیت و باسی جیاکاری بهکین، بمانهوی داتاشراوه بۆ نهو نهخشه به بدۆزینهوه، نهو بهکسه دهبیت پرسیار بهکین: داتاشراوه به پنی کام گۆراو؟ به پنی گۆراوی X یان به پنی گۆراوی y ؟ باشه نهگه داتاشراوه به پنی گۆراوی X بیت نهو لاجیی بهسهه دیت؟ نهگه داتاشراوه به پنی X بیت، نهوهی نهوکات y وهک ژماره سههیر دهکریت، واته لهو کاته داتاشراوهی y دهکاته سفر. وه به پینچهوانهوه، نهگه داتاشراوهکه به پنی y بیت، نهوه X وهک ژماره- نهگۆر سههیر دهکریت و داتاشراوهکهی دهکاته سفر. داتاشراوهی به شی، بهو شیوه هینما دهکریت به پنی گۆراوی X : $\frac{\sigma f}{\sigma x}$ واته داتاشراوهی نهخشه f به پنی گۆراوی X ، بۆ داتاشراوه به پنی گۆراوی y : $\frac{\sigma f}{\sigma y}$.

نمونه نهگهه: $f(x,y) = x^2 + y^2$ ، نهوه داتاشراوه به پنی X واته $\frac{\sigma f}{\sigma x} = 2x$ بدۆزینهوه، نهوه دهکاته: $\frac{\sigma f}{\sigma x} = 2x$ و داتاشراوه به پنی y دهکاته: $\frac{\sigma f}{\sigma y} = 2y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

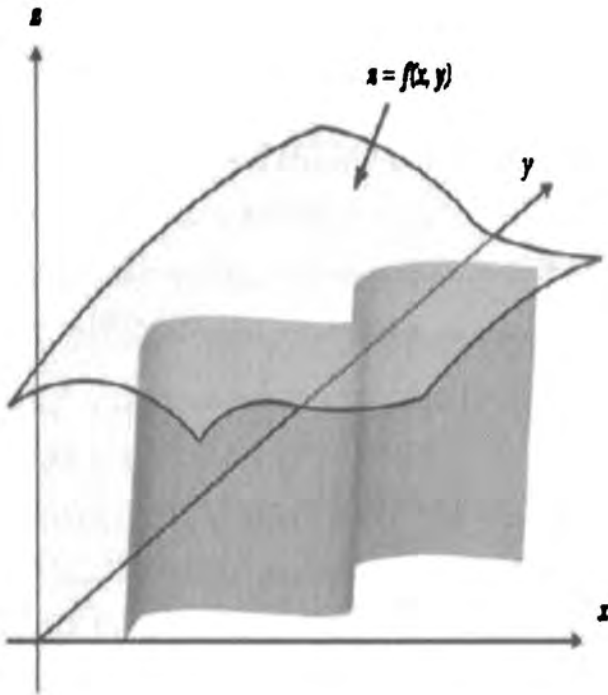
تەواوکاری لەسەر چهماوهیهک

Integration on a curve

دۆزینەوهی تەواوکاری لەسەر چهماوهیهک، هەر هەمان شیۆهی تەواوکارییە بۆ نەخشەیهک لە یەکتیک لە گۆراوهکانی، کاتیک ئەو نەخشەیه زیاتر لە گۆراویکی هەیە. لە بۆشایی دوو رەهەندیدا، نەخشە $f(x,y) = z$ وێنەکی بریتییه لە پرویک. وادانسی هەر هەمان نەخشە ئەگەر بێت و $z = 0$ ئەوه ئەوکاتە پروههکه وهک داپۆشهریک دەردهکهوێت که پهیرهندی به نەخشە $f(x,y) = z$ هەیە. ئەو شیۆهش ئاراستە هەیە؛ که ئەرینییه یان نەرینییه، بۆیه به تەواوکاری ئەو شیۆهیه زۆر جار دەوتریت: تەواوکاری هێلی (Line integral).

ئەگەر بێت و ئەو نەخشەیهی که لە دوو گۆراو پیکهاتوه، y به ژمارهیهک دابنن، ئەوه ئەوکات نەخشەکه دەبیتە نەخشەیهک تەنیا لە گۆراوی x وه به پینچهوانهوهش، ئەگەر بێت و x به ژمارهیهک دابنن، ئەوه ئەوکات نەخشەکه مان دەبیتە نەخشەیهک لە گۆراوی y . بۆیه ئەوکاتەش هەژمارکردنی تەواوکارییهکه ئاسان دەبیت که به پینی ئەو تەکنیکانه شیکار دهکریت که فیزی بوینه.

لەگەڵ ئەمەش، بیرۆکهی تەواوکاری به خێرای تهشهنهدهکات و فراوان دەبیت. لەم وێنەی خوارهوه دیاره که مەبهستمان چیه له شیۆهیهکی داپۆشهر کاتیک $z = 0$.



تەواوکاری لەسەر پوویک

Integration on a surface

هەموو ئەو تەواوکاریانەی نۆیمە له قوتابخانە دەیانخوینن، سەرچەمیان هەژمارکردنی پووبەرە، واتە تەنیا پشت بەستن بوو بە گۆراوی x بەلام ئەگەر بێت و پوویکمان هەبێت، ئەوەک ژێر چەماوەک، ئەو حەتمەن پووەکان پشت بە هەردوو گۆراوی x و y دەبەستن، واتە له پەهەندی بەرزتر، بۆیە کاتیک دین تەواوکاری بۆ ئەو پووە دەدۆزینەو، ئەوێ دەستمان دەکەوێت بریتییی نسیه له پووبەر، بەلکو بریتیه له قەبارە (volume).

وا دانسی ناوچەیه کمان هەیه به ناوی A له تەوهری پۆتـانی xy - و نەخشەیه کمان هـیه $z = f(x,y)$. بەهەمان شێوه چۆن له دۆزینەوه پووبەری ژێر چەماوەک هاتین لاکیشەى بچوک بچوکمان دروست کرد، پاشان پووبەری هەریه کەمان دۆزییه وه، گشتیمان کۆکردنەوه بۆ ئەوێ پووبەری ژێر چەماوەکە بدۆزینەوه، ئەوێ دووبارە له دۆزینەوهی قەبارە، هەمان شت ئەنجام دەدەینەوه، بەلام لێره ئەوێه که دەبیت پووهکه پارچه پارچه دهکەین، دواتر بەرزى و درىژبیهکەى دەپێوین، پاشان قەبارەى هەر یەک لهو پارچه بچوکانه دەپێوین، دواتر گشتیتان کۆ دهکەینەوه و قەبارەى پووهکەمان دەست دهکەوێت. بۆیه لەمەوه هەژمارکردنی تەواوکاری دووانی دیتە گۆرپی، تەواوکارییهک بۆ

گۆراوی X و تهواکارییهک بز گۆراوی Y کاتیک Z نهخشهیه که له X و Y که مه بهستیش له A بریتیه له پروه که.

$$\iint_A f(x,y) dx dy$$

ئهم تهواکارییهی سهروهه بز نهخشهی f له سهه A پنی دوتریت: تهواکاری دووهیند یان دهبل تهواکاری. دهشکریت تهواکاری بز نهخشهی فره گۆراویش پیناسه بکهین.

نمونهیهکی ساده دینینهوه بز ئهوهی بیرۆکه که روتتر بیت. وادانی تهرازوهکی زور ههستیار و بچوکهمان ههیه، که توانای پیوانی شتی زور بچوکی ههیه بهقهه دشله مهی چا (قهنده)، ئیمه سیونیکمان ههیه، چون دهتوانین ئهه سیوه بکیشین بهه تهرازوهه بچوکه که له راستیدا توانای کیشانی سیوی نییه؟ بیرۆکه که ئهوهیه سیوه که هه مووی پارچه پارچه ده کهین- پارچهی بچوک بچوک، دین کیشی گشت پارچهکان دانه به دانه ده پیوین، پاشان کیشی گشت پارچهکان کۆده کهینهوه له کوتایی کیشی سیوه که مان دهست ده که ویت.



تهواکاری دووانی له سهه ئهه پروهه ته نیشته، که پروههکی لاکیشهی سی رهههندی ده نوینیت، ئهوهی دهستان ده که ویت، قهبارهی ئهه تهنهیه.

بیردۆزی گرین

Green's theorem

بیردۆزی گرین⁸⁰ یه کیکه له بیردۆزه گرنگه کان له جیاکاری و تهواکاری پیشکتهوو. ئەم بیردۆزه په یوه نندییه که له نیوان تهواکاری هیل و تهواکاری دووانسی. واته ئیمه چهماوهیهکی داخراومان هیه، وه پووبه ریک هیه دهکه ویتته ناو ئەو چهماوه داخراوه، چهماوه که مان ناو لى ناوه Y و پووبه ره که مان ناو لى ناوه A له وینى بهرام بهر چاماوه که دیاره که چۆنه، بۆیه دۆزینه وهی تهواکاری هیل بۆ ئەو چهماوهیه کاریکی وه مانسان نییه، بۆیه بیردۆزی گرین کومه کمان دهکات له دۆزینه وهی تهواکاری هیل بۆ ئەو چهماوهیه، بۆیه له بهر ئەوهی ئەو چهماوهیه پووبه ریکی له ناو دایه، بیردۆزی گرین دیت له ریکه ی ئەو پووبه ره وه که که وتۆته ناو چهماوه که، تهواکاری هیل چهماوه که مان بۆ ده دۆزیتته وه. بهو په یوه نندییه خواره وه:

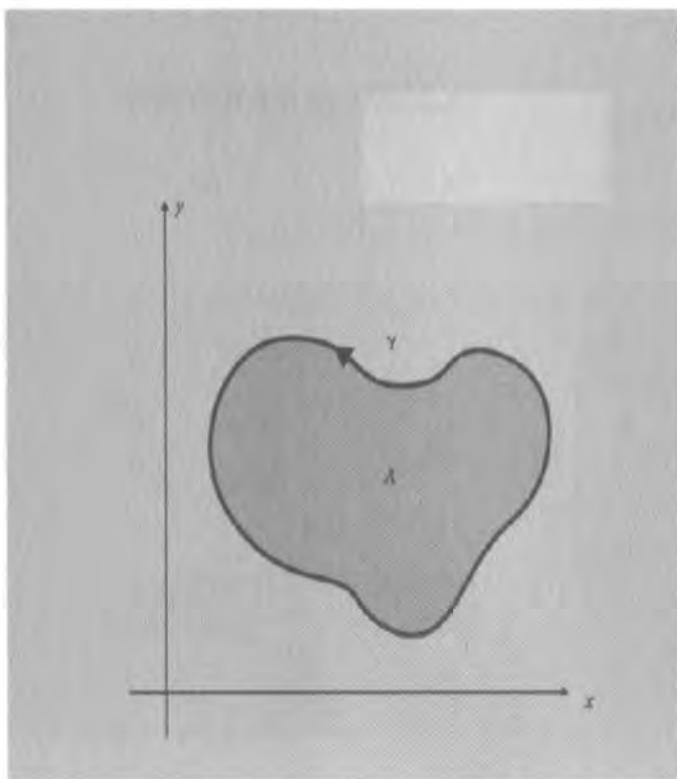
$$\int_Y f \, ds = \iint_A \left(\frac{\sigma f}{\sigma x} - \frac{\sigma f}{\sigma y} \right) dx \, dy$$

که ds ناماژهیه بۆ ئەو گۆرانه بچوکه تاک رهه ندهی که پروودهات به درێزایی ریکه ی Y . هاو کیشیهی له م شیوه په یوه نندییه په تیبیه که ی

⁸⁰ جورج گرین، بیرکاریزان و فیزیکزانیکى بهریتانییه له 1793 له دایک بووه، که له 1841 کچی دواى کردوه.

نیوان ته اووکاری و جیاکاری هه ندهکی ده گشتینیت، که نه مهش دهسته و تیکی گرنه بق جیاکاری و ته اووکاری.

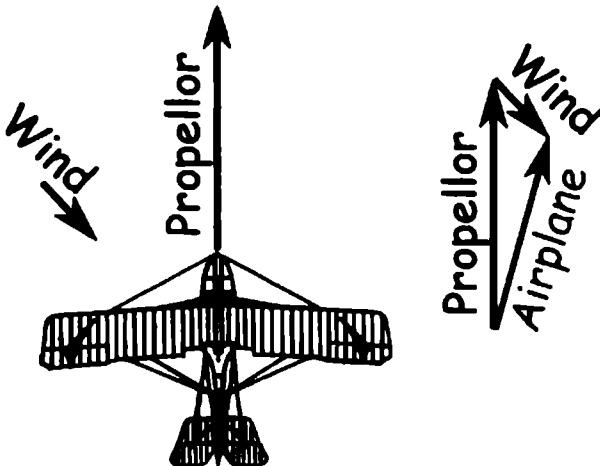
شتیکی تر له م پرۆسه که گرنه، نه وهیه که ناراسته ی چه ماوه که به پیچه وانیه میلی کاتزمیر بیت. که واته خاله سه رنج راکیشه که نه مهیه: په یوه ندی نیوان پروهک و چه ماوه یه ک' په کده خریت به هوی ته اووکاریه وه له نیوان دوو ره هندی جیاواز n و $n-1$.



بهشی چه و ته م

پوخته ی ناراسته بره کان

Introducing vectors

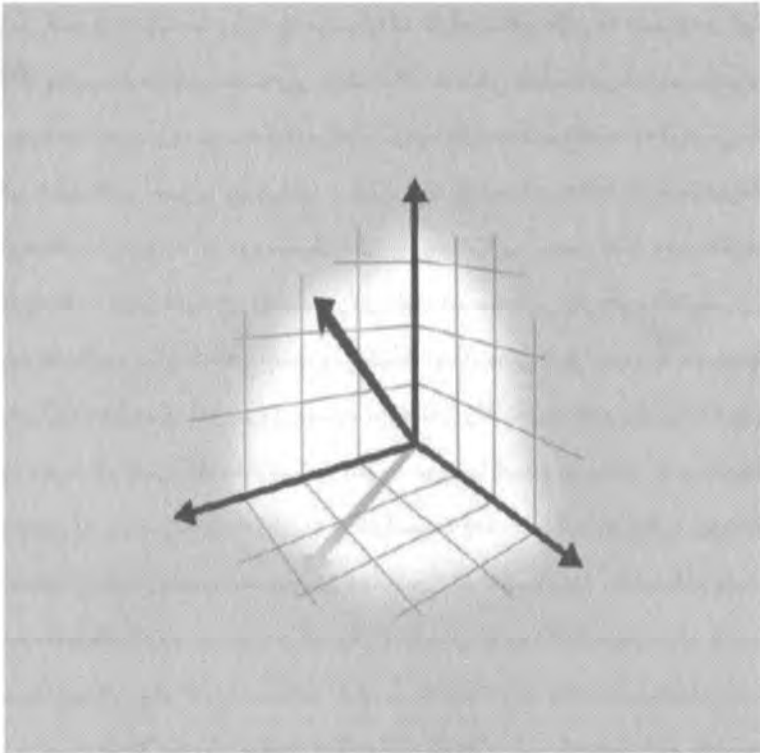


ئاراسته برهکان

Vectors

ئاراسته برهکان به کارده هیندریت بۆ پیشاندان-نواندنی بریکى بیرکاریانه یاخود فیزیکیانه، که بر-خیرایی، دریز و ئاراسته ی ههیه. وهک: با، که خیرایی و ئاراسته ی ههیه، وهک چون زور جار له سهه نهخشه ئاماژهیهک به کارده هیندریت بۆ پیشاندانی ئاراسته ی با، که چونه و بۆ کوئ دهچیت و، به چ خیرایهک. ئاراسته برهکان به شیوه ی تیر (Ray) پیشانده دریت. سهه ی تیرهکه، خالی کۆتایی ئاراسته برهکه دهنوینیت، دریزى تیرهکش، ئه اندازه ی ئاراسته برهکهیه. به لایه نى کهم خالی هاوبه شی نیوان بیرکاری و فیزیا، له ئاراسته برهکانه. ئاراسته برهکان به کارهتانیان زوره، له دروستکردنی یارییهکان، یان له دروستکردنی ریگاویانهکان و نهوانه ی پیشبرکنى نهجامدهدن به به له مهکانیان له روبرارهکان... یان نهگه ر بیت و یه کیک چاوه ریی تو بیت له شوینیک، توش کیلومه تریک له و دور بیت، نه وه نه و زانیارییه بهس نییه که پی بلی: وهه لام من کیلومه تریک له تو وه دورم! لیره پیوسته زانیارییهکی تریشی پی بدهی، نهوش به چ ئاراسته یهک ئه م کیلومه تره بیریت. ئاراسته برهکان رۆلی سهه کی دهگیرن له نه اندازه دا، نه اندازه به بی ئاراسته برهکان زور ئالوز و گران ده بوو، چونکه زوریک له پرسه نه اندازه یهکان هر له ریگه ی ئاراسته برهکانه وه چاره سهریان بۆ دهوزرینه وه، که بوونی چند ریگایهکی جیاواز بۆ گه یشن به و کیشه یه،

ئوه تیگیشتنی زیاترمان پی دهدات له هه مبهه پرسه که. به کومه له ی ئاراسته بره کانیسه دهوترین شاهوتیه ئاراسته بره کان (Vector space). که تیدا سه ده کیشنه زور لق و بواری بیرکاری، که پانتاییه کی زور له زاسته کانی تر داگیر ده کن و سود به خشن. دوایی دین، له ریگه ی ته و ره ی پوتانه وه باس له ئاراسته بره کان ده کین.

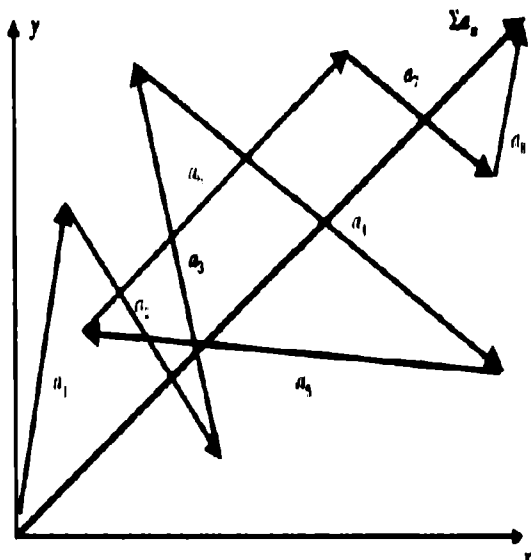


کوکردنه وه و لن دهرکردنی ناراسته بېرکان

Adding and subtracting vectors

دوو ناراسته بېر، کۆده کرینه وه به شیوه یه که، کۆتایی ناراسته بېری به که م بنوسیت به سه ره تایی ناراسته بېری دووهم، پاشان دروستکردنی ناراسته بېری نوی له خالی دهستیکی ناراسته بېری به که م بۆ خالی کۆتایی ناراسته بېری دووهم، هر وهک له وینه که نا دیاره. نو ناراسته بېره نوییه له وه وه دهستان ده که ویت، پنی ده وتریت: ناراسته بېری به رنه نجام (Resultant vector). ناراسته بېرکان ده تواندیریت له ته وه ره ی پۆتان نیشان بیدیریت و کرداره کانیا ن له سه ر جی به جی بکریت، واته بۆ هر جوته ریخراویک (x,y) له دووری خالی بنه رته وه بان هر خالیکی تر، ناراسته بېر دروست بکه یین. بۆ دۆزینه وه ی کۆی دوو ناراسته بېر، وادانی دوو ناراسته بېرمان هیه، نه وانیش $(0,1)$ و $(1,0)$. پاشان ده توانین نه دوو ناراسته بېره به و شیوه: $(1,0) = (1+0, 0+1)$ کۆبکریته وه. بۆ لیده رکردنی دوو ناراسته بېر هر هه مان شیواز. نه گهر هر هه مان ناراسته بېرانه له به کتر دهر بکه یین: $(1,-1) = (1-0, 0-1)$. له بهر نه وه ی هر به یک له y و x لایه کانی سینگوشه ی گوشه وه ستاو دهنوینن، نه وه به هۆی بیردۆزی فیساکورس ده توانین بېرکه یان یا مه و دایه که یان (Modulus) بدۆزینه وه، بۆ نمونه مه و دای ناراسته بېری $(1,1)$ ده کاته:

$$\sqrt{(1^2) + (1^2)} = \sqrt{2}$$



ههـوو ئهـو رینچکانهـی که له وینهـکهـدا ههـیه، دهـتوانـدریت
 سادهـبکریتهـوه بهـهـزی کۆکردنهـوهی گشت ئهـو ئاراستهـبرانهـ بۆ یهـک
 ئاراستهـبر، بۆ کۆکردنهـوهی گشت ئهـمانهـش ههـمای سیگما (\sum)
 بهـکار دینین، که ههـمایهـکی گریکیهـ.

به برلیکدان

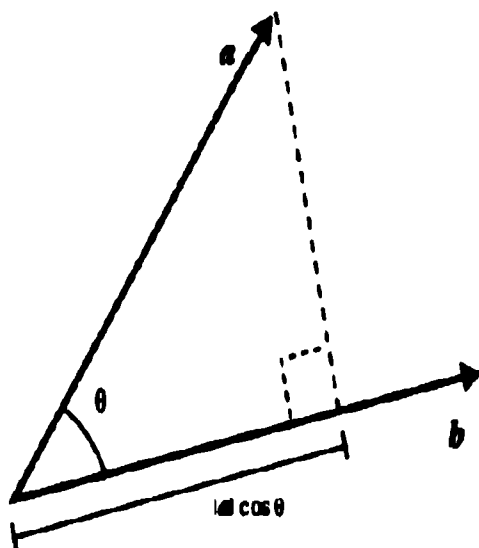
Scalar product

لهسهر ناراسته بیره کان، چه ندين كردارمان هه نه، يه كيكی تر له كرداركان بریقيیه له: به برلیكدانی ناراسته بیره کان. كه به كاردیت بؤ دروستكردنی ناراسته بریكي نوئ. به لام ئه وهی لیتره جیاوازه، ئه وه یه كه ئه و ناراسته بیره ی به برلیكدان دهستان ده كه ویت، هه لگری ناراسته ی هیچ یه ك له ئه و ناراسته بیره نه یه كه ئه و ناراسته بیره نویمان دروست كردووه، له یه ك بار ئه م شسته پرووده دات، ئه گه ر بیست و هه ردوو ناراسته بیره كه یه كسان بن، ئه وه به برلیكدانیشیان هه ر یه كسان ده بیست، به لام ئه مه باریکی جیگای سه رنج نیسه بؤیه باسی ناكهین. وا دانئ دوو ناراسته بیره مان هه یه، ئه وانیش: (1, 3) و (1, 2) به برلیكدانی ئه م دوانه ده كاته:

$$(1 \times 1) + (2 \times 3) = 7$$

لهسهر یه ك ئه ستون بن، ئه وه كۆسایینی كۆشهی نیوان ئه و دوو ناراسته بیره ده كاته سفر، هه ر بؤیه به برلیكدانی دوو ناراسته بیره لهسهر یه ك ئه ستون ده كاته سفر. بابته ی به برلیكدانی له بواری فیزیا گرنگیه کی زوری هه یه، وه ك لیثاوی موگناتیس، له پێگه ی به برلیكدانی ناراسته بیره كانی، لیكدانه وی بؤ ده كریست و تیان ده گه ین. ئه گه ر بیست و یه كیک له ناراسته بیره كان یه كی (unit vector) بیست و مه وداكه ی (Modulus) بكاته یه ك (1)، ئه وه راسته وخؤ به برلیكدانی ناراسته بیره ی

تر بهم ناراسته بیره، بهرته نجامه که ی دهکاته وه پیکهاته ی ناراسته بیره که ی تر، وهک: به برلیکدانی $(0,1)$ و $(2,3)$ که دهکاته وه 3.



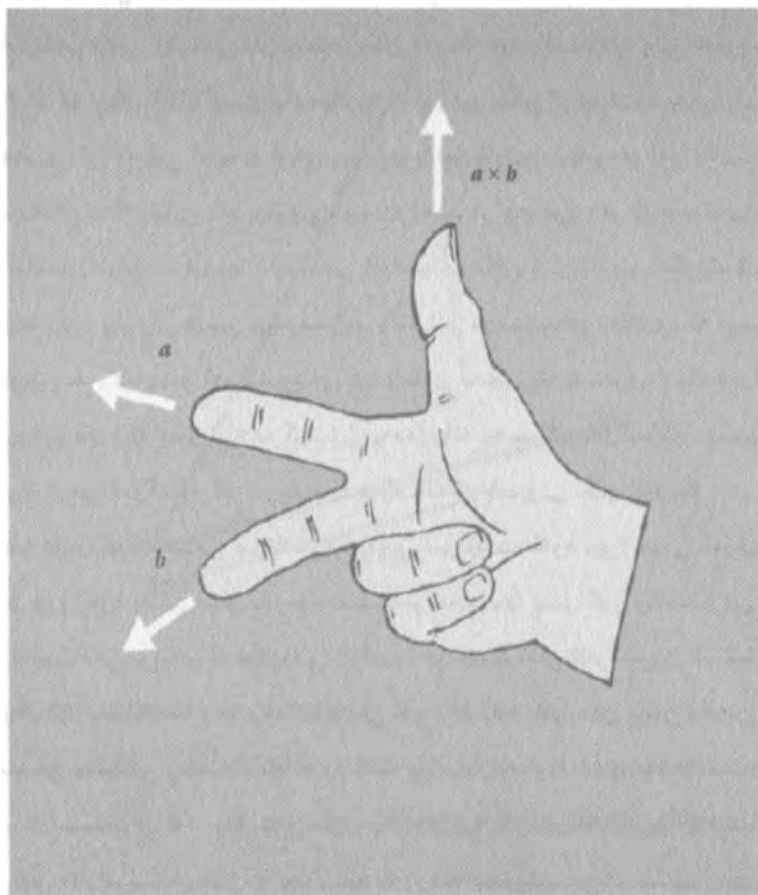
لهم وینه ی سه ره وه، $|a| \cos \theta$ بریتیه له ده ره او یژی a به ره و ناراسته ی b . بویه به برلیکدانی ته دووانه: $|a||b| \cos \theta$ دهکاته به برلیکدانی مه ودای ناراسته بیری b و ده ره او یژی a به ره و b .

لیکدانی ناراسته برهکان

Cross product

لیکدانی ناراسته برهکان، په کینکی تره له کرداره کان له سهه ناراسته برهکان. لیکدانی ناراسته برهکان بهو شینوه ناماژهی پی ده کریت: $a \times b$ ، که ریگایه که بو لیکدانی دوو ناراسته بر له بوشاییه کی سی ره هندی، که نهو نهجامه ی یاخود نهو ناراسته بره ی لهو لیکدانه ده ستمان ده که ویت، نه ستوون ده بیت له سهه هر دوو نهو ناراسته برانه ی که لیکمان دوان. له فیزیا، لیکدانی ناراسته برهکان گرنکه بو تیگه یشتن له په یوه ندی نیوان هیز و دریزی، واته نهو دریزیه ی ده که ویته نیوان شوینی خولانه وه و نهو شوینه ی هیزه که ی ده خریته سهری، وهک ده رگا، شوینی هیزه که بریتیه له کیلون یه ده، واته ده سکی ده رگا که، شوینی خولانه وه ی ده رگا که بریتیه له نه رماده که شوینی خولانه وه که، دیاره هه تا هیزه که له خالی خولانه وه که دوورتر بیت، نهوه جولاندنی ده رگا که بو ژوره وه یان بو ده ره وه ناسانتر ده بیت. بو گوزار شتکردن لهو بهر نه جامه نوییه ی له لیکدانی ناراسته بر ده ستمان که وتووه، شتیکمان هیه وهک یاسایه که بو وه سفکردنی نهو لیکدانه، نهویش پیی دهوتریت یاسای دهستی راست، که له وینه که پیشادراوه. په نجه ی یه که م ناماژه یه بو ناراسته بری a ، په نجه ی دووه م ناماژه یه بو ناراسته بری b ، لیکدانی نهو دوو ناراسته بره ش به په نجه که وره که دنویندریت. سوودی نه م یاسایه ش بو نهویه ناراسته ی هر یه که له مانه $a \times b$ و $b \times a$ بزانی،

بۆیه له م پرۆسه ی لیکدانی ئاراسته بپه کانه تاییه تمه ندی ئالوگۆری له بهرچاو دهگیریت، واته ئەم لیکدانه، وهک لیکدانی ئاسایی، سیفتهی ئالوگۆری نییه.

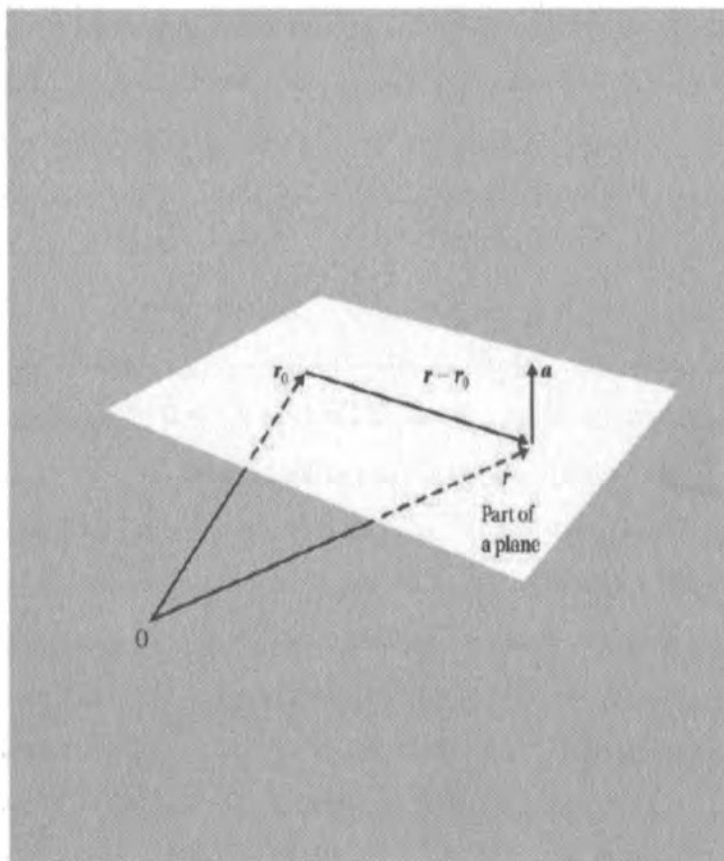


ئەندازەى ئاراستەبەر

Vector geometry

ئەندازەى ئاراستەبەرەکان، وەسفی بەکارهینانی ئاراستەبەرەکان دەکات له میانەى چارەسەرکردنى کیشە ئەندازەبیهکان. بەشیکی زۆرى بیروکهکانى ئەندازە ئاسانکراووتەوه له ڕینگەى ئاراستەبەرەکانەوه، بەتایبەت کاتیک ئیش لهگەل ئاھوتە سى ڕههەندى یاخود فرە ڕههەندەکان دەکەین. ئەگەر بیت و شوینی خالیک له ئاھوتەى سى ڕههەندى بە شیوہى ئاراستەبەر نیشاندرە $r = (x, y, z)$ که پىی دەوتریت پیگەى ئاراستەبەرەکه، له پاشان بۆشایى دوو ڕههەندى تەوهرەى پۆتان له خالیک، لهگەل شوینی- پیگەى ئاراستەبەرپیکی ئەرىنى r_0 ، فرەهەمدینیت بەهۆى شیکارى $a \cdot (r - r_0) = 0$ ، کاتیک a بىرتیبه له ئاراستە بىرک که ئەستونە لهگەل ڕووتەخت، وەک له وینەکه ڕوونکراووتەوه. ئەگەر بیت و ئیمە سى هاوکیشە بۆ تەورەکان بنووسین بە بەکارهینانى ئەو فورمولەى سەرەوه، ئەوه مەرجى یەکتەبرىنى هەرسى هاوکیشەکه بىرتیبه له هەبوونی سى هاوکیشەى هاوتە. نامانجى ئەوکارەش ئەوہیه که ئاسانتر دەردەکەویت بۆ ئەندازە، واتە تیگەیشتن له ڕینگەى ئەندازەوه ئاسانترە، بەلام شیکار و کارکردن لەم ڕینگەیه ڕۆشتترە، چونکه لەم بارەدا، ئەم سى هاوکیشەیه: شیکارىکى بى هاوتەى-تاقانە دەبیت، یان هیچ شیکارىکى نابیت، وه یاخود ناکوتە شیکارى دەبیت. بەلام لەم دۆخه یا شیکارىکى بى هاوتەى دەبیت، یانیش هیچ شیکارىکى نابیت. ئەگەر بیت و هەرسى

پووتهخته که وهک یهک بن، نهوه ناکوتا شیکاری ده بیت، یان هیچ شیکاریکی نابیت نه گهر بیت و به لایه نی که م دوو له و پووتهختانه هاوتیریب و یهکسان نه بن.



نخشه ناراسته برهکان

Vector functions

ناراسته برهکان که پارچه کانی-پیکهینه کانی نه خشن، و سلفی نه په یوه نښه مان بڼه ده که له نیوان دوو زیاتر له دوو گڼوډا هیه، نه وانیښ نه خشی ناراسته برهکانن که مه وداکانیان ناراسته بره. بڼه وهی سهر له په یوه نښه دهر بکه یڼ، نه وهیه که پیکهینه کانی ده تواندریت داتاشراوه و ته واکارییان بڼه ورگیریت وهک نه خسه ناساییه کان. جیاکاری خوشی ده کړیت له ریگی ئو په رته ری ناراسته برهکان گوزارشتی لی بکړیت. نه گهر $f(x,y)$ نه خسه یه کی راستی بیت له روتهخت، نه وه لاری (Gradient) نه خسه ی f پیناس کراوه له ریگی نه خسه ی ناراسته بری $(\frac{\sigma f}{\sigma x}, \frac{\sigma f}{\sigma y})$ که بهم شیوه ده نو سریت Δf ناراسته و بری نه ناراسته بره، شتیگمان بڼه ده خاته ږوو، نه ویش ناراسته ی گه ورته ترین ږیژه ی زیادبوون-زیادکردن له نه خسه ی f و ږیژه ی زیادبوونه که ش. نه م نیش گڼوډکینه (operator) ∇ پیڼی ده و تریت دیل (del)، که چندی تاییه تمندی جوانی هیه. دوو له ته واکارییه په یوه نښه مان به و دیله له وینه که خراوه ته ږوو. نمونه یه که هم بهر نه و بابه ته، گڼوډانی خیراییه که له دهر وهی سنوری ږوونیک، یه کسانه به نه خسه ناراسته بره بلاو بووه که له ناو ږووه که. نه م ش ږوونی ده کاته وه که چی رووده دات نه گهر بیت و تایه که پر بکړیت له ه و: له بهر نه وهی ږیژه و ته وژمی ه و له دهر وهی تایه که نه ریڼییه، نه وه

کشان و فراونبوونی ههوایه که له ناو تایه که دیسانه وه نهرینییه. به واتایه کی تر، پهستینراوه.

Divergence theorem:

$$\iiint_V (\nabla \cdot F) dV = \iint_{\partial V} F \cdot n dS$$

Stokes' theorem:

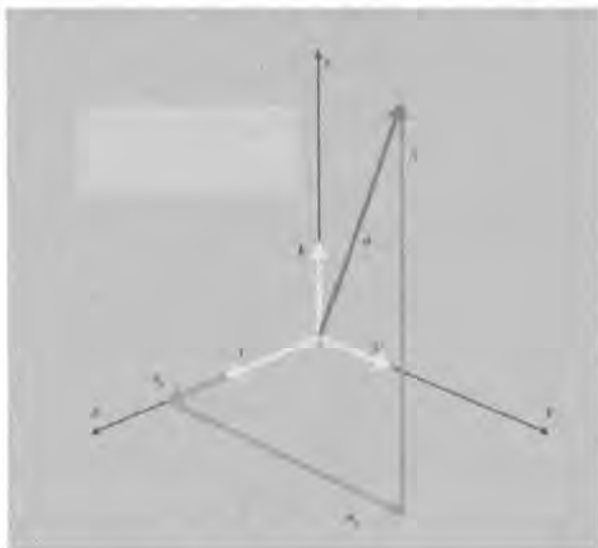
$$\iint_A (\nabla \times F) \cdot n dS = \oint_{\partial A} F \cdot dr$$

رههندهکان و سهربهخوایی به هیل

Dimensions and linear independent

کاتیك له باره‌ی شیوه‌ی تهنیک یان هر شتیک ددوین، نهوه له رووی قه‌باره‌یه‌که‌وه ددوین، ئایا چند دووری هیه، نهک هر بۆ شته‌کان، تهنانت بۆ ئاهووته‌ش (Space). بۆ نمونه ئه‌و بۆشایه‌ی له بابته‌یکى ماتماتیک کارى له‌سه‌ر ده‌کین ره‌هه‌ندى هیه، نه‌گه‌ر هه‌یه‌تى چند ره‌هه‌نده؟ له ئەندازه‌ی ئیقلیدی و له ئاهووته ئاساییه‌کى ، بازنه، یه‌ک ره‌هه‌ندییه؛ دیسک‌پۆپکه، دوو ره‌هه‌ندییه؛ گۆ، سى ره‌هه‌ندییه. جیاوازی نیوان بازنه و دیسک نه‌وه‌یه که بازنه چه‌قیکی هیه تهنیا بۆخووی و زیاتر نا، به‌لام له دیسک چه‌قیکه‌کان هیه که ده‌بیته چه‌ق بۆ ناکووتا بازنه‌ی تر. بۆیه له دوو ره‌هه‌ندی و سى ره‌هه‌ندی، له‌وه تیده‌گه‌یه‌ن که چند ئاراسته‌یه‌که‌مان هیه، سه‌ره‌وه، خواریه، تهنشته‌کان: واته دریزى و پانی و به‌رزى. ئەمه‌ش باسى لى‌وه‌که‌راوه به شیوه‌یه‌کى بیرکاریانه به به‌کاره‌ینای بیروکى سهربه‌خۆ. کۆمه‌له‌یه‌ک له ئاراسته‌بهره‌کان پێان ده‌وتریت سهربه‌خۆی به‌هیل، نه‌گه‌ر بیته و هیه‌چ یه‌ک له ئاراسته‌بهره‌کانى کۆمه‌له‌که، نه‌تواندريت له‌کۆى دوو ئاراسته‌بهرى ناو کۆمه‌له‌که بنوسريت. واته نه‌گه‌ر دوو ئاراسته‌بهر له کۆمه‌له‌که کۆپکه‌ینه‌وه، نه‌وه نایبته ئه‌و به‌ره‌نجامه‌ی ده‌ستمان ده‌که‌ویت له ناو کۆمه‌له‌که بیته. هر کۆمه‌له‌یه‌ک له n ئاراسته‌بهرى سهربه‌خۆی به‌هیل، پێى ده‌وترین بنچه (basis) بۆ ئاهووته‌یه‌کى n ره‌هه‌ندی. هر ئاراسته‌بهریک له‌و ئاهووته‌یه ، ده‌تواندريت

به شیوهی پیکهاتهی هیلی بنوسریت له بنجهی-Base ئاراسته بره کان. له ئاهووتهی سنی رهه نیددا، بنجهی-Base ئاهووتهی دیکارتی بریتییه له سنی ئاراسته بر، ئه وانیش: $(0,0,1)$ وه $(0,1,0)$ ، $(1,0,0)$ که ئه مانه ش تاییه تمه ندییه کی ناوازه یان ههیه، که هه ریه که یان ئه ستون ده بیت له سهه ئهوی تریان. به لام هه ر سنی له ئاراسته بری سه ره خۆی به هیل، شیاره ی ئه وهن که ببه بنجه بۆ ئاهووتهی سنی رهه ندی.



ئاراسته بری a ده توان ددریت به هۆی پیکه نهری هیلی (Linear combination) بنوسریت له بنجه ئاراسته بره کانی k و i ، j بهم شیوه: $a = a_x i + a_y j + a_z k$ (به وردی سه بری وینه که بکه).

جیگورکیه هیلپهکان

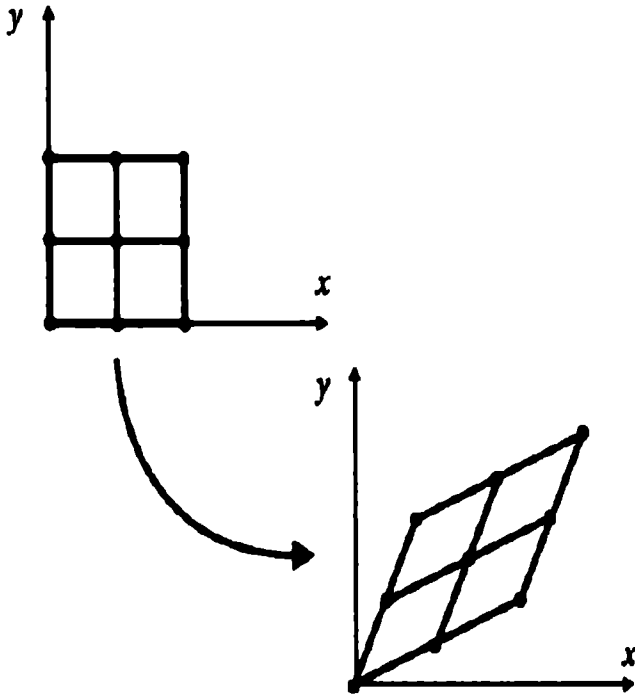
Linear transformation

جیگورکیه هیلپهکان، بریتییه له نهخشهیهک، که ههلهدهستیت به گورپینی ئاراستهبریک بۆ ئاراستهبریکی تر، ئهویش له ژیر پووشنایی یاساکانی پیکهینهری هیلپی (Linear combination). ئهگه دوو ئاراستهبرمان هه بییت و کویان بکهینهوه، پاشان جیگورکی بهو ئهجامه بکهین که دهستمان کهوتوو، ئهوه ده بییت هه مان بهرئهجامی هه بییت ئهگه بییت و، پشیش کۆکردنهوهی ئه دوو ئاراستهبره، هه رهکه یان به جیا جیگورکییان پین بکهین، پاشان کویان بکهینهوه.

ئهگه a و b دوو ژماره بن، وه u و v دوو ئاراستهبر بن، ئهوه جیگورکی هیلپی L ده بییت له سه ره ئه م یاسایه جی به جی بییت:

$$L(au + bv) = a(Lu) + b(Lv)$$

لیکدانهوهی ئه ندازه بیان ههیه که سیفهتی کشان و سوراندن (rotation) دهگرنه خویان. هه ره بۆیه زمانی جیگورکیه هیلپهکان، توانای چۆنییهتی تهفسیرکردنی کرداره ئاساییه ئه ندازه بیه کانهمان پش ده دات. ته ناتهت ئه مه له کالکیله سیش ده ره که ویت، له راستیدا داتاشراوهکان زیاتر نین له جیگورکیه هیلپهکان له سه ره نهخشهکان، بۆیه لیکۆلینهوه و کارکردن له گه ل جیگورکیه هیلپهکان، به گه رتنیکه له دوو لاره، ئه وانیش ئه ندازه کالیکله س.



کرداره ئەندازه بیهکان له سەر شینوهکان، دهکریت به هۆی جینگۆرکتی
هێلی وهسفکرین، وهک ئەم شینوهی سه ره وه.

ریزکراوه‌کان

Matrices

ریزکراوه‌کان، بریتین له کۆمه‌له‌یه‌ک له ریز و ستون، ئه‌و ریز و ستونانه به شیوه‌یه‌کی ریک دانراون. هه‌ر یه‌ک له‌و ریز و ستونانه ژماره‌ ده‌گرنه‌ خۆیان. ریزکراوه‌کان له‌ ناو‌که‌وانه‌یه‌ک ده‌نوسریت، وه‌ک:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ یان } \begin{pmatrix} a & b & a \\ c & a & c \end{pmatrix}.$$

ئه‌مانه‌ سود‌که‌ئیکیان هه‌یه‌ له‌ زۆر بواردا، به‌تایبه‌تی کاتی ده‌مانه‌وی کاریه‌ری جیگۆرکینه‌کی هیلێ بزاین. ئه‌گه‌ر بیت و جووته‌ ریکخراویکمان هه‌بیت (x,y) ، ئه‌وه‌ جیگۆرکینی هیلێ به‌ شیوه‌یه‌کی گشتی ئه‌و شیوه‌یه‌ وه‌رده‌گریت: $(ax + by, cx + dy)$ ، ئه‌م پرۆسه‌یه‌ش ناسراوه‌ به‌ لیکدانی ریزاکراو. ئه‌و شیوه‌یه‌ی نوسیومانه، ده‌توانین به‌ $M\Gamma$ ده‌ری بیه‌رین. کاتی‌ک M بریتیه‌ له‌ ریزکراوه‌که:

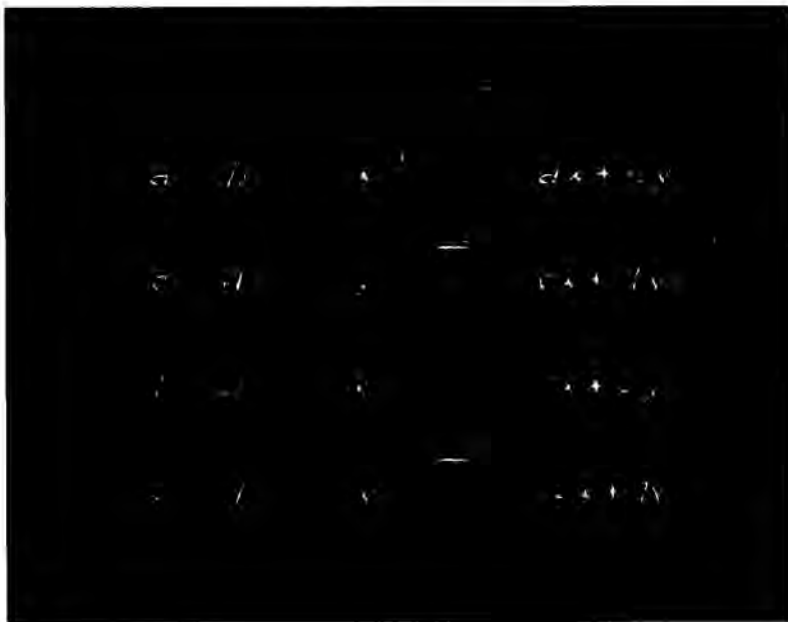
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

و Γ بریتیه‌ له‌ شوینی ئاراسه‌ته‌به‌که‌ (x,y) ، کاری ریزکراوه‌که‌ لێره‌ بریتیه‌ له‌ نواندنی جوله‌ی جیگۆرکینه‌ هیلێیه‌که. ئه‌و ریزکراوه‌ی سه‌ره‌وه‌ دوو به‌ دووه، واته‌: 2×2 ، ده‌کریت بۆ $n \times n$ ریزکراو دروست بکه‌ین، ئه‌و دوو ژماره‌یه‌ ده‌بیت له‌ یه‌ک گه‌وره‌تر بیت و له‌ ژماره‌ سروشتیه‌کان بیت، چونکه‌ یه‌کیکیان ئاماژه‌یه‌ بۆ ژماره‌ی ریزه‌کان، ئه‌وه‌ی تر ئاماژه‌یه‌ بۆ ژماره‌ی ستونه‌کان. ریزکراویک هه‌یه‌ پنی ده‌وترین ریزکراوی بی‌ لایه‌ن (identity matrix)، وه‌ک چۆن له‌ کۆکردنه‌وه‌ی ئاسایی 0 دانه‌ی بی‌ لایه‌نه، به‌و شیوه‌ش له‌ ریزکراوه‌کان، ریزکراوی بی‌ لایه‌نمان هه‌یه‌ و به‌ I هیتا ده‌کریت، ئه‌و ریزکراوه‌ تیره

سه‌ره‌کیه‌که‌ی (Diagonal) گشتی بریتییه له ژماره یه‌ک (1) و دانه‌کانی

تری گشتیان بریتین له (0)، سه‌یری ئه‌و نمونه‌یه بکه: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ واته

هه‌ر ریزکراویک جارانئ ئه‌و ریزکراوه‌ی بکه‌ین، ئه‌وه ده‌کاته‌وه ریزکراوه‌که خۆی، وه‌ک چۆن 3 جارانئ 1 هه‌ر ده‌کاته‌وه 3. هه‌ر دانه‌یه‌کی (Entry) ناو ریزکراو ناو‌نیشنیکی (Adress) هه‌یه، که شوینه‌که‌ی له ناو ریزکراوه‌که نیشانده‌دات. سه‌ره‌رای ئه‌مه‌ش، ریزکراوه‌کان ره‌هه‌ندیان هه‌یه. ئه‌و نمونه‌ی سه‌ره‌وه ریزکراویکی 3×3 ، که ئسی به‌سی ده‌خوینه‌دریته‌وه. ریزکراوه‌کان بو‌نواندنئ شت و مه‌ک-که‌ل و په‌ل به‌کار دیت و، له‌که‌ل به‌رواری به‌سه‌رچوونی ئه‌و شتانه... هتد.



شیکارکردنی هاوکیشهی ریزکراوهکان

Solving matrix equations

هاوکیشهی ریزکراوه، هاوکیشهی یهکی بیرکارییانهیه که نه زانراوهکانی بریتین له ریزکراوه. یه کیک له سوودهکانی ئه م هاوکیشانهش هه له ناو پانتایی بیرکاری، به کاردیت بۆ شیکارکردنی سیستمه هیلیهکان و لیکولینهوه له مه ر جیگورکییه هیلیهکان.

وا دانسی که Mr وهسفی ئه و کاریگریه دهکات که بهسه ر ئاراسته بپیک r داهاتوهه له کاتی جیگورکی هیلیه، واته پرۆسه ی جیگورکی هیلیمان بهسه ر ئاراسته بپیک r نهجامداوه و Mr وهسفی ئه و جیگورکییه دهکات که چونه. دواتر له پیکه ی ئه و جیگورکییه هیلیه، دیسانه وه ئاراسته بپیک تر دیته کایه وه، ئه ویش ناوی ده نین b . لیره ده مانه ویت ئه وه بدوزینه وه که ئه و r که ئاراسته بپیکه، چی بووه (چ شیوه یه کی هه بووه) که ئه و جیگورکییه هیلیه ی بهسه ردا هاتوه، واته شیکاری ئه و هاوکیشه یه $Mr = b$ ، واته نرخ r چیه؟ خوینهری هینژا رهنگه بلیت چون خۆمان له و M ده رباز بکه ین؟ مومکینه بلیی هه ردوولای هاوکیشه که لای دابه شی M ده که ین! وه لامیکی ژیرانه یه، به لام هه له یه. ئیمه ناتوانین هه ردوولای هاوکیشه که دابه شی M بکه ین، چونکه M بریتی نییه له تاقه ژماره یه ک، به لکو M بریتییه له ریزکراویک که چهند ریز و ستونیک تیدابه له ژماره. ئیمه له بیرکاری شتیگمان هه یه، ئه ویش، هه ر شتیگ جارانی هه لگه راوه که ی (Inversr) بکه ین،

ئەنجامەکەى دەکاتە دانەى بى لایەن بە گوێزەى سىستەمەکە (پیزکراوێهە لێرە)، دانەى بى لایەن لە کردارى جاراندن، واتە $\frac{1}{2} \times 2 = 1$. لە

پیزکراو، دانەى بى لایەن ئەمەیه: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ بۆ پیزکراوێكى سى بە

سى. نىستا بۆ ئەوێ شىکاری ھاوکیشەکە بدۆزینەو، دەبیت هەلگەپاوەى پیزکراوێکە بدۆزینەو، ئەگەر بوونى هەبیت!

هەلگەپاوەى هەر پیزکراوێک بەو شێوێ دەردەبردریت M^{-1} ، بۆیه، هەر دوو لای ھاوکیشەکە جارانی هەلگەپاوەى پیزکراوێ M دەکەین، بۆیه $M^{-1}Me = M^{-1}b$ و لەبەر ئەوێ $M^{-1}M = I$ ، بۆیه لەمەوێ دەکەین: $Ir = M^{-1}b$ ، پاشان لەبەر ئەوێ دانەى بى لایەن؛ جارانی هەر پریک دەکاتەوێ بپرەکە بپرەکە خۆى، واتە $Ir = r$ بۆیه شىکاری ھاوکیشەکە واتە پیزکراوێ r دەکاتە $r = M^{-1}b$. لێرە شتىک هەیه پيوسته بيزانين، ئەویش ئایا هەردەم هەلگەپاوەى پیزکراوێک بوونى هەیه، وە ئەگەر بوونى هەبیت چۆن چۆنى دەدۆزیتەو؟

دۆزینەوێ هەلگەپاوەى پیزکراوێ تا گەرەتر بیت، تۆزیک گرانتر دەبیت و تەکنیکی تری ئەوێت، بۆیه لێرە لەسەر نمونەیهکی (دوو بە دوو) باسى لى وە دەکەین. وادانى ئەو پیزکراوێمان هەیه بە شێوێهەکی گشتى $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ بۆیه هەلگەپاوەى ئەو پیزکراوێهە بە شێوێهەکی گشتى دەکاتە: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ بەو مەرجەى کە $ad - bc \neq 0$. ئەگەر بىر لە پۆتانى ئەو ھاوکیشەیه بکەینەو، ئەوێ لە راستیدا بریتیه لە

کومه لیک هاوکیتشه ی هیلی پیکه وه په یوه ست، واته سیسته میکی هیلی، بویه
 نه سلی بابه ته که نه وه په که، دوزینه وه ی شیکاری هاوبه شی سی
 پروتخت، هاوشیوه ی شیکارکردنی سیسته مینکه که سی هاوکیتشه ی هیلی
 په یوه ست به یه که وه به هوی نواندنی ناراسته بره کان له پروتختدا،
 هروها هاوشیوه به له گه ل شیکارکردنی هاوکیتشه ی ریزکراوه.

هه لگه راوه ی ریزکراوه، نه وه مان بؤ درده خات که کاتن پروتخت
 وه ک هیلیک رهفتار ده کات له بوشایی دوو رهه ندی، نه وه نه و دوو پروه
 تخسته که وه ک هیل رهفتار ده کاتن به کتر ده برن، بویه له م باره دا؛
 په کتر برینه که تنیا له یه ک خاله، واته بن هاوتایه و یه ک شیکاری بوونی
 هیه، نه ویش به پشت بهستن به $ad - bc$ که نه کاته سفر. نه گه ر
 بیت و بکاته سفر، نه وه یان هیچ شیکاریکی نییه، وه یان ناکوتا شیکاری
 هیه. نه و بره $ad - bc$: پئی دهوتریت سنورده ری ریزکراوه که
 (Determinate of the matrix)

له رهه ندی زیاتر، واته پتر له دوو رهه ندی، پرۆسه که توزیک ئالوز
 ده بیت، به لام شیوازی و ته کنیکی جیاواز هه ن بؤ نه وه ی له وانیش
 تیکه یه ن و لیکولینه وه نه انجام بده یه ن.

ناهووته پوچه‌کان

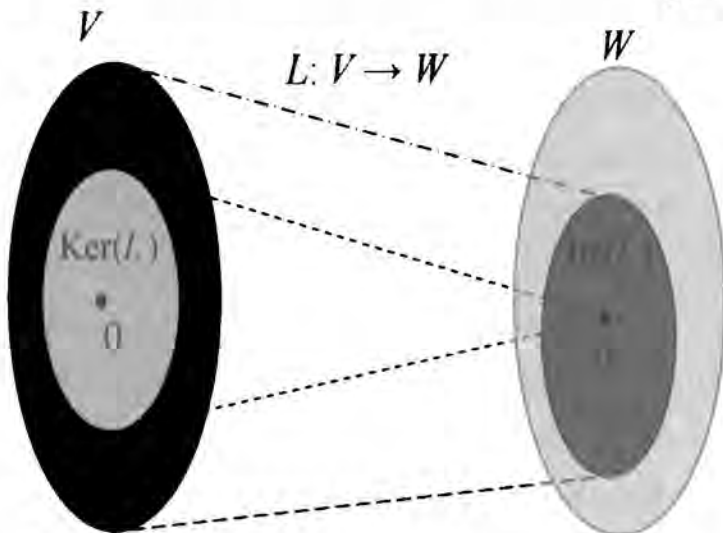
Null spaces

ناهووته‌ی پوچ یان کیرنه‌لی (kernel) ی ریزکراوه‌شی پی ده‌لین. ناهووته‌ی پوچ، بریتیه له کۆمه‌له‌ی هه‌موو ئه‌و ئاراسته‌برانه‌ی که نه‌خشه‌که‌ی (mapping) ده‌چیت بۆ ئاراسته‌بریکی سفری (zero vector) به‌هۆی جیگۆرکی هیلیه‌وه (linear transformation). ئه‌گه‌ربیت و M ریزکراوینک بیت، کاتیک $M\mathbf{r}$ وه‌سفی ئه‌و کاریه‌گه‌رییه‌ی جیگۆرکیه‌ی هیلیه‌ ده‌کات له‌سه‌ر ئاراسته‌بریک \mathbf{r} هاتیت، نیستا ناهووته‌ی پوچ N بریتیه له کۆمه‌له‌ی هه‌موو ئه‌و خالانه‌ی که ده‌بیته‌ هۆی ئه‌وه‌ی $M\mathbf{r}=0$. وه‌ ره‌ه‌ندی ئه‌و ناهووته‌ پوچه، پیی ده‌وترین: راده‌ی پوچیتی (Nullity).

بۆ زانینی ره‌ه‌ندی یان قه‌باره‌ی ئه‌و ئاراسته‌بره‌ی که جیگۆرکی هیلیه‌ پیکراوه، پیوسته‌ سه‌رنجی ناهووته‌ی وینه‌ بده‌ین (image space). که به‌ بیرکاریانه به $Im(M)$ ئا‌ما‌ژه‌ی پی ده‌کریت. ناهووته‌ی وینه، بریتیه له کۆمه‌له‌ی هه‌موو ئه‌و خالانه‌ b که $M\mathbf{r} = b$ بۆ ئه‌و نرخانه‌ی \mathbf{r} که b به‌ره‌م دینیت. ره‌ه‌ندی ناهووته‌ی وینه‌ی، پیی ده‌وتریت: پله‌-پایه (Rank). ئه‌گه‌ر بیت و $M\mathbf{r} = b$ یه‌ک شیکاری هه‌بیت به‌گۆیری دراوی b ، ئه‌وه ناهووته‌ک له‌ شیکار هه‌یه، که ده‌کاته ره‌ه‌ندی N ، که وتمان N بریتیه له کۆمه‌له‌ی هه‌موو ئه‌و خالانه‌ی که $M\mathbf{r} = 0$. نامانه‌ویت زیاتر به‌و شیوه‌ وشکه له‌سه‌ر بابته‌که به‌رده‌وام بین، بۆیه

ئوهی له سهروهه نووسراوه پوختهی ئاهووته پوچهکانه. به نمونهیهکی ژبانی روژنه بیروکه که شیدهکینهوه. وا دانسی شهریکهیهک-کارگه که بنیشتی ناو قوتوو بهرهم دینت، پیش ئوهی ئه و قوتوه بنیشتانه بکریته پاکهتوه و بنیردریته بازار، پشکنینیکی بو دهکریت له لایهن دهزگایهکوه، بو ئوهی بزاندییت ئه و قوتوو بهتاله یان نا، ئهگه بهتال بیت ئهوه لایببات بو لایهک. لیتره قوتوو بهنیشهکان ناراستهبرهکانن، دهزگایهک بو جیاکردنهوهی قوتوو بهتالهکان جیگورکینه هیلویهکیه. قوتوو بهتالهکان دهخرینه ناو شوینیکی تاییهت، ئه و شوینه تاییهت که ئه و قوتوو بهتالانهی تیدایه، پنی دهوتریت ئاهووتهی پوچ.

گهلی له کیشه بیرکاریهکان، وهک له هاوکیشه جیاکاریهکان، دهکریت بههزی ئه و زمانه بیرکاریهوه بنویندریت، وه له پانتایی بیرکاری به گشتی.



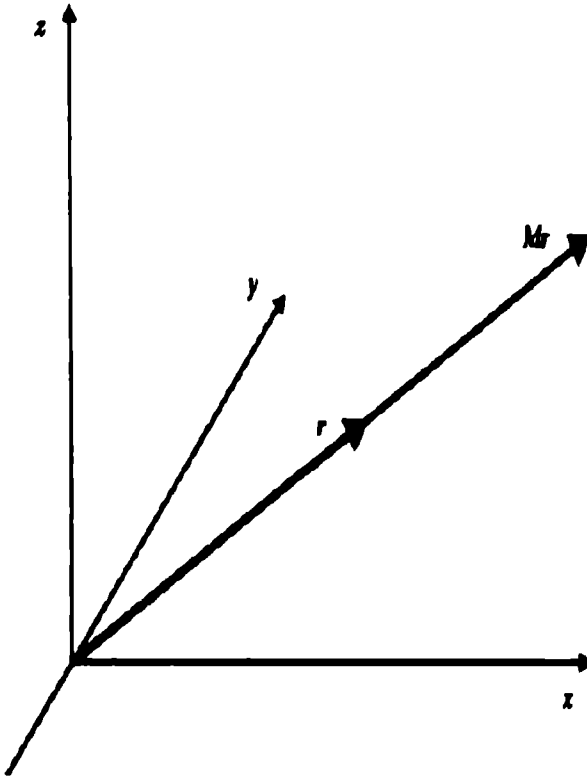
به‌ها تایبه‌تیبه‌کان و ئاراسته‌بره تایبه‌تیبه‌کان

Eigenvalues and eigenvectors

به‌ها تایبه‌تیبه‌کان و ئاراسته‌بره تایبه‌تیبه‌کان، بریتین له کۆمه‌له‌یه‌کی شان؛ له بره‌کان و ئاراسته‌بره‌کان، ئه‌ویش به‌هۆی په‌یره‌نئیدییه‌که‌وه به ریزکراویک. وشه‌ی Eigen له زمانی ئه‌لمانیه‌وه هاتوه، که به مانای سه‌یر یان تایبه‌ت دیت. ئه‌گه‌ر بیت و ریزکراویکی چوارگۆشه‌یمان هه‌بیت، واته $n \times n$ بیت، ناوی لی بنین M ، له‌گه‌ل به‌هاتی تایبه‌تی λ هاوتایه له‌گه‌ل ئاراسته‌بری تایبه‌تی r ، پاشان $Mr = \lambda r$. له فیزیادا، ئاراسته‌بره تایبه‌تیبه‌کان واتای ئه‌وه‌یه که ئاراسته‌کانیان به‌ه‌گۆری ده‌مینیته‌وه به‌هۆی کاریگه‌ری ریزکراوه‌که‌وه M ، وه λ وه‌سفی ئه‌وه‌مان بو ده‌کات که چۆن دوورییه‌کان ده‌گۆرین له‌و ئاراسته‌ی هه‌یه‌تی له‌گه‌ل به‌های تایبه‌ته‌ نه‌رئینییه‌کی.

ئه‌گه‌ر بیت و هه‌ول بده‌ین ئه‌م هاوکیشه‌یه شیکار بکه‌ن $Mr = \lambda r$ ، ئه‌وه ده‌توانین هاوکیشه‌که به‌و شیه‌یه بنوسینه‌وه $(M - \lambda I)r = 0$ ، دیاره ئه‌م هاوکیشه‌یه شیکاری هه‌یه، ته‌نیا ئه‌گه‌ر بیت و $(M - \lambda I)$ ئاهوته‌یه‌کی پوچی به‌رده‌ری هه‌بیت (Non Trivial null space)، ئه‌مه‌ش واتا ناگریت r لیره شیکاری ئه‌و هاوکیشه‌یه بیت، واته نرخسی $r \neq 0$ ، ئه‌مه‌ش واتا $M - \lambda I = 0$ ، بۆیه سنورده‌ری ریزکراوه‌که (determinante) که n به n ، لیره ده‌گه‌ین بو پاده‌داریکی پله n له λ کیشه‌ی و پرسسی نرخه تایبه‌تیبه‌کان زۆر باون، له‌به‌ر

ئوهی ئەمانه زانیاری گرنکمان بۆ دەست دەخەن له هەمبەر جیگۆرکیه
هیلیهکان.



له م وینهیه باشتر له و نووسنه‌ی سه‌ره‌وه تێده‌گه‌ین. ئاراسته‌بری r
ئاراسته‌بریکی تایبته‌ به بۆ ریزکراوه‌ی M ته‌گه‌ر ئەم دووانه، r و Mr پوو
له هه‌مان ئاراسته‌ بن!

به شی هشتهم

جهری پوخت - روت

Abstract algebra

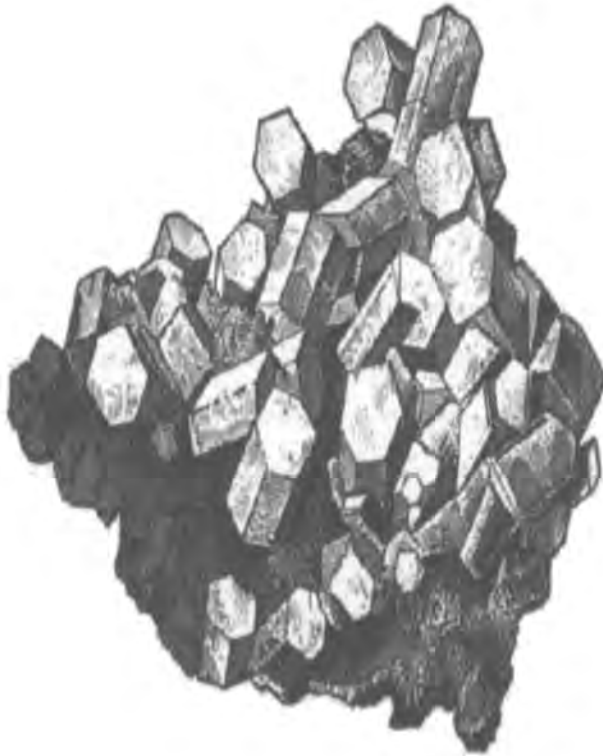


جهبری پوخت (پهتی)

Abstract algebra

جهبری پوخت-پهتی، په کیکه له لقه هره سه ره کیه کانی بیرکاری. جهبری پوخت چند پیکهاته گه لیک له خو ده گریت، وه کو تیوری گروپ، تیوری نه لقه، تیوری مهیدان (Field)، وه ناووتهی ناراسته بره کان...، که تیدا هر په که یان به موی چند یاسایه کی جیاوازه وه دانه کانی دهسته- کومه له یه ک پیکه دهین له ژیر روشنایی نه یاسایانه که پتان ده لین به لگه نه ویست- نه کزوم. دواتر له م سونگه یه وه ده لکین به کومه له یه ک. کاری نه پیکه اته نش هم موی کرداره ناسایه کانی وه ک کوزدنه وه، که مکردنه وه، جار انکردن... ده گرنه خویان، له گه ل ژماره کان. وه ک: ناووتهی ناراسته بره کان که په کیکه له پیکه اته کانی جهبری پوخت که کومه له یه ک له ناراسته بر ده گریته وه له گه ل یاسا و تایبه تمه ندیه په یوه ندیداره کانی نیوانیان. نه م یاسایانه ش وه سفی چونیبه تی پیکه اتانی نه و شتانه ده که ن له میانه ی رفتهاری بابه ته که، دواتر ده گریت بخریته ناو چارچیوه یه ک وه ک کومه له یه ک له تایبه تمه ندیه کانی نه و شته. له ناووتهی ناراسته بره کان، یاساکان وه سفی کوزدنه وه و به برلیکدانی ناراسته بره کان ده که ن. به دوورکه وتنه وه و به لاهه نانی گرنگی و به کارهینانیا ن له ناووتهی راستی به ره و کومه له ی جهبری په تی تر، واته گرنگی نه وانه له جیهانی په تی، نه وه ده بنه سروشتی نه و ریگایه ی که بیرکاری زانه کان تیدا بیروکه کانیا ن گه شه پی ده دن و به ره و پتشیان

دهبەن. سەرباری پووتاندن و سنوردارکردن، پیکهاته ناوازهکەیان
 ئەنجام و دەرئەنجامی گرنگی ههیه له زور بواری تردا، بۆ نمونه له
 پیکهتانی توپۆلوجی.



تیۆری گروپ پۆلینکی سەرەکی دەگێڕیت له تیگەیشتن له پیکهاتهی
 کریستالهکان.

تیوری گروپ

Group theory

گروپ، بریتییه له بونیادیکی بیرکاریانه، که پیکدیت له کومه له یهک (Set) له گه ل کردار-ئۆپه ره ییشنیکی دووانی، که ده کریت ئه و ئۆپه ره ییشنه (کرداره) وه کو کۆکردنه وه یا خود لیکدان سهیر بکریت. به لام به شیوه یه کی گشتی کرداره که به م شیوه * هیتا ده کریت.

بۆ هر کومه له یه کی وه کو G و هر سنی دانه یه ک له م کومه له یه a, b, c ، مه رجه که ئه م چوار به لگه نه ویسته ی خواره وه ی لی بیته جی، بۆ ئه وه ی پنی بوتری گروپ:

(1) به سـتراو (Closed): گـهر هـاتوو هـه ریه کـه

له a, b له ناو G بن ئه وه ده بیت $a * b$ له ناو G بیت.

(2) یه کتر به سـتن (Associativity): مه رجه کـه:

$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

(3) دانه ی بی لایه ن (Identity element): مه رجه کـه

دانه یه کی وه کو e هه بیت له ناو G دا که $a * e = e * a = a$

a بۆ هه موو دانه یه کی ناو G ، که پنی ده وتریت: دانه ی بی لایه ن.

(4) هه لگه پراوه (Inverse): بۆ هه موو دانه یه کی

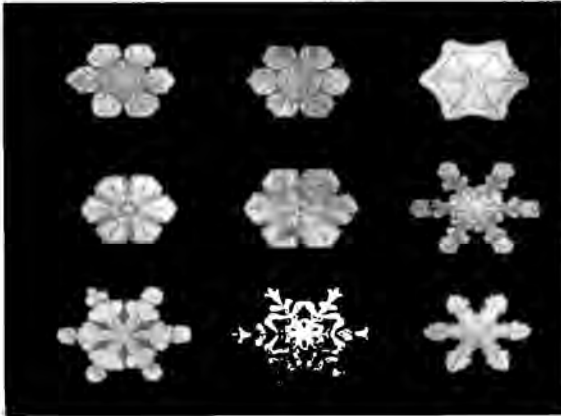
وه کو a له ناو G مه رجه دانه یه کی تر هه بیت که به دژ ناوی

ده به ن و به م جۆره هیتای ده که یین a^{-1} که:

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

سادهترین نمونه لهسهر گرووپ، بریتیه له ژماره ته وارهکان لهگهل کرداری کۆکردنه وه واته $(\mathbb{Z}, +)$. روونه دهییت دانهی بیلابین بکاته سفر، چونکه تهنها سفره لهگهل هه ژمارهیهکی تردا کویکهینه وه نهجام دهکاته ژماره که خویی.

گرووپ گرنگی و جیبه جیکردنی زوری ههیه، چونکه دهکریت نهه خاسیهت و بهلگه نهویستانه وهکو خاسیهتی فیزیایی ته ماشابکریت، دهکریت گرووپ لهسهر چهندلا (Polygon) پیناسه بکهین و دواتر ته وه رهکانی هاوجیبوون دهوری دانسهکانی کومه له که دهبینین، واته ژماره مان نیه لهه کومه لهیه، بهلکو کومه لیک خاسیهتی فیزیایی (جیومهتری) مان ههیه، نمونهی تر که دهکریت سود له بیروکهی گرووپ وهرگرین بو تیگه یشتن لییان. وهک، کلوه بهفر، نهمانه هه موو کومه لیک بونیادی فیزیایی، که دهکریت وهکو نمونهی گرووپ ته ماشا بکرین.

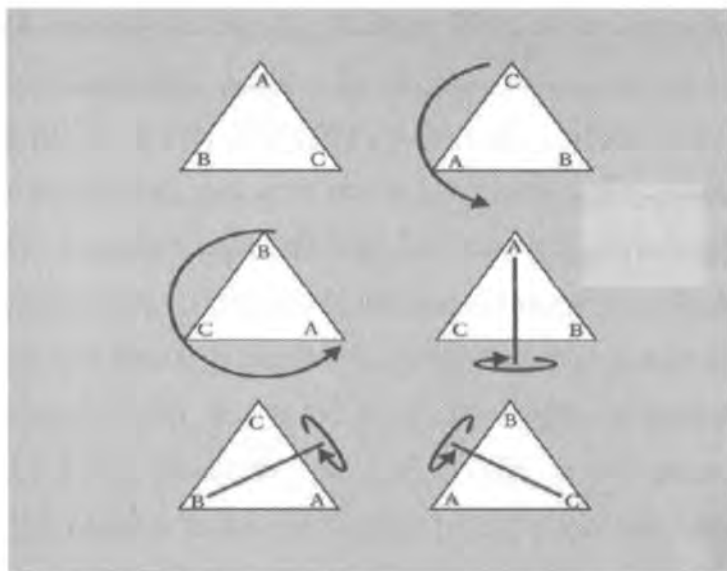


گروپه هاوجیهکان

Symmetry groups

وادانسی سینگوشه یه کی سسی لا یه کسانمان هیه، نهگه بیت نهو سینگوشه یه به ناراسته ی میلی کاتزمیر 120 پله بیخولیننه وه، نهو ده بنین هیچ شتیکی جیاواز پووی نه داوه، چونکه سه ره تا سینگوشه که چون دانربوو، دوا ی نهو که به 120 پله سوپاندمان. هر همان شیوه ی سه ره تای وهرده گریتته وه. یان کاتیک سینگوشه که پووی وهرده گیرین، ده بنین دووباره هیچ شتیک ناگوریت. بویه گروپی هاوجی؛ نهو گروپه یه که به چند ریگایه کی جیاواز، نواندن هیه له زیر جیگورپکیدا، که هیچ جیاوازه ییه کی نابیت له که ل شیوه یان سیفته به نه پره تییه که ی، واته دوا ی گورپان و پیش گورپان همان سیفته و تایه تمندی ده بیت به به راورد به شیوه به پره تییه که ی. نهگه بیت وا دانین a مه به ست لینی سوپاندن بیت، وه b مه به ست لینی روو وهرگیران بیت، نهو ده توانین کرداری جارانکردن به کاربنین بؤ ئاویته کردنی نهو دوو سیفته a و b . بویه نهگه بیلن a^2b ، نهو مه به ستمانه بلین: سینگوشه که دوو جار به گوشه ی 120 بیخولینه وه، جاریکیش پووی وهرگیره. له پاستیدا 6 ریگه ی جیاواز هان بؤ به ره م هینانی جیگورپکی له رووکاری نهو شته ی هه مانه (وهک له وینه که دا دیاره)، نهوانیش a^2b وه a^2, b, ab و e . به ده ره له نهگه رانه، نهگه بیر له شتی تربکه یته وه، له نهجامدا هر شیوه یه یه کیک له مانه ی سه ره وه وهرده گریت و هاوتای نهوانه ده بیت. مه به ست له

e بریتیه له دانهای بی لاین له و گرووپه، واته ئەو سینگۆشه په سه نهی
 یه که مجار هه مانه. ئەگه ر بیت و سه یه بگه یه b^2 یان a^3 یه کسان ده بن به
 e، واته دانهای بی لاین.



له م وینهی سه ره وه، هه ر 6 دانه کێ؛ گرووپه ی هاوجیه سینگۆشه ی
 سه ی لا یه کسان خراوته روو به شیوه ی ئەندازه یی.

بنه گروپه کان و بهرکوته گروپه کان

Subgroups and quotient groups

بنه- به شه گروپ (Subgroup) به شیکه له گروپ، واته به شه کۆمه له به له گروپیکه تر که هه موو مه رجه کانی گروپ جی به جی ده کات. له بهر نه وهی دانهی بی لایهن {e} خۆی به تهنیا ده بیته گروپ، بۆیه هه میشه بۆ هه موو گروپیک به لایهنی که م بنه گروپیک هه یه، واته هه یچ گروپیک نییه بنه گروپیکه نه بیته.

له بابتهی پێشوو باسی گروپی هاو جیمان کرد له سه ر سینگۆشه ی سنی لایه کسان، که دانه کانی ناو گروپه که بریتین له $\{e.a.a^2.b.ab.a^2b\}$ کاتیک a بریتیه له سوپاندن به پله ی 120 وه b بریتیه له وه رگیرانی روو. بۆیه نه م گروپه، دوو بنه گروپه ی به رده ری ⁸¹ (Non-trivial) هه یه، نه وانیش $\{e.a.a^2\}$ که سوپاندنه، $\{e.b\}$ که روو وه رگیرانه. هه ر یه که له م دوو بنه گروپه، پێان دهوترین گروپی به پات-خولی (دهوری)، که هه میشه له بنه گروپه کان، دانهی بی لایهنی تهنیا به $\{e\}$ ، چونکه بی دانهی بی لایهن، گروپ و بنه گروپ دروست نایته.

⁸¹ دۆزینده وهی وشه یه کی گونجاو بۆ نه م چه مکه زۆر هه لاکه ی کردم. وشه ی 'به رده ر و بی به ر' زۆر به کاردیت له زمانه ی کوردیدا، به تابه ته له چینی جوتیاران، کاتیک دره ختیک به ره مه سی نییه، نه وه پێی ده لین دره ختیکه بی به ره، نه گه ر به ره مه میشه هه بیته. پێی ده لین نه مه دره ختیکه به رده ره به به ره.

ئەگەر بیت و H بنه گروپ بیت له G و، ghg^{-1} بوونی هه بیت له ناو H بۆ هه موو h یک له H و g له G . ئەوه H پێی دهوتریت بنه گروپیی یاسادار (Normal subgroup). بنه گروپیی یاسادار، پێگهخۆشکهره بۆ دروستکردنی گروپیکیی نوێ له پێگهی گروپه کۆنهکوه، ئەوهی سهههتا هه مان بوو.

بهرکهوته گروپ، بریتیه لهو گروپهیی که له پێگهی دانهکانی گروپهکه له گهڵ یه کیک له بنه گروپه یاسادارهکان دروست دهکریت. بۆ ئەوهی بهرکهوته گروپیک بدۆزینهوه له ژیر پۆشنایی گروپیک، ئەوه پێوسته ئەو گروپه بنه گروپیی یاساداری هه بیت. ئەگەر بیت و H بنه گروپیی یاسادار بیت له گروپیی G ، ئەوه بۆ هه دوو دانه a و b له G ، ئەوه یه کیک له م دووانه:

$$aH = Ha \quad (1)$$

هه موو ئەو خالانەیی که شیوهی xh هه یه بۆ

هه ندیك له h له H .

$$(2) \quad \text{وهیان ئەو دوو کۆمهلهیه هیچ دانیهکی}$$

هاوبهشیان نه بیت.

له مانهوهش گروپیکیی نویمان دهستدهکهویت به ناوی بهرکهوته گروپ. ئەمهش واتای ئەوهیه که دهتوانین بیر لهو کۆمهلانه بکهینهوه وهک

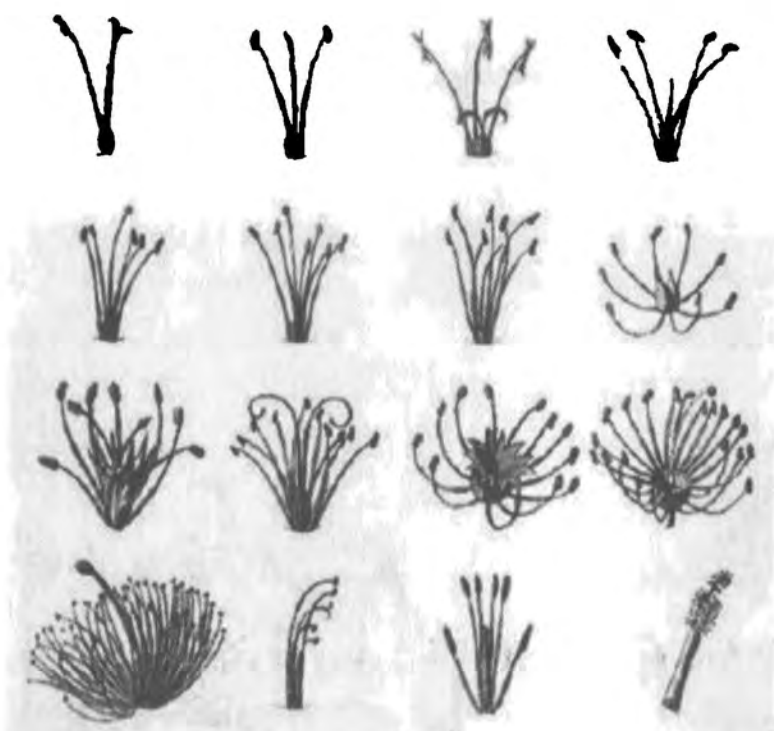
دانه کانی کۆمه له یه کی نوئ، که له گه ل یاسای ئاسایی پیکهانان
 $(aH)(bH) = abH$. بهرکه وته گرووپ به G/H هیتا ده کریت.

بهرکه وته گرووپ و بنه گرووپی یاسادار، ئه ومان بۆ پوونده که نه وه
 که چون گرووپه کان ده کریت وهک هۆکار به ندییه ک بیت بۆ گرووپی
 بچو کتر له G ، که ئه مهش یارمه تی تیگه یشتمان ده دات له گرووپه
 ره سه نه که ی خۆمان. ئه م بنه گرووپانه وهک بناغه یه ک کار ده که ن و گرنگن
 بۆ گرووپه ره سه نه که، وهک چون به هه مان شیوه پیکهاته ی ژماره کان له
 ریگه ی ژماره خۆبه شه کانه وه وه سف ده کرین، که له بابته کانی پیشووتر
 باسمان کرد. بۆیه له بابته ی گرووپ، ژماره خۆبه شه کان تاییه تمه ندییه کی
 ناوازه یان هه یه، ئه ویش ئه وه یه که جگه له خۆیان، بنه گرووپی به رده ریان
 نییه، ته نیا بنه گرووپی بی به رییان (trivial) هه یه، واته وهک چون ژماره ی
 خۆبه شه کان ناتوانین لیکیان هه لپوه شینینه وه، به و چه شنه ش ئه و
 گرووپانه ی له سه ر ژماره خۆبه شه کان داده مه زریین، بنه گرووپی
 به رده ریان لی نا که ویتته وه.

گروپه ساده کان

Simple groups

گروپه سانا-ساده کان، نو گروپه پانه ن که هیچ بهرکه و ته گروپینکی بهر دهرییان نییه. که بنه گروپه کانیشی ته نیا بریتیه له دانهی بی لایه نه که ی، یان گروپه په سه نه که خوی. نه مهش ریک وهک تایه تمه ندییه ی ژماره خۆبه شه کان وایه، که نه وان جگه له خویان و ژماره 1 به شدار بووی تریان نییه. وهک ژماره خۆبه شه کان، که چۆن ناکوتا ژماره ی خۆبه شمان هیه، بهم چه شنهش ناکوتا گروپه ساده مان هیه، به لام جیاواز له ژماره خۆبه شه کان، گروپه ساده کان ده کریت به شیوازیکی ورد و ریک پۆلین بکریت. پۆلینکر دنه کهش له سالی 2004 یه کیک بووه له گه وره ترین ده سته که و ته بیرکاریه کان له 50 سالی پابردوو. گروپه خولییه کان (دهوری-Cyclic) و خیزانی گروپه جیگره وه کان (Alternating groups)، نه مانه هه ردوکیان له گروپه ساده کانن. نو گروپه پانهش به هوی-له کاتی لیکۆلینه وه له مه ر کۆمه له کوتاداره کان په ی داده بن. هه روه ها 16 خیزانی دیکه هه ن له گروپه ساده کان، یه کیک له وانه پینان ده وتریت: جۆره گروپه کانی لای (Lie groups). خیزانینکی تر که شاز و جیاکراوه ن، پینان ده وتریت گروپه پچر پچه ره کان (Sporadic groups)، وه گروپه شی وه له بان-دپرنده (Monster group)، نه وانسی تریش ناسراون به: نه ویسته کان (Pariahs).



‘کارل فون لینه’ سیستمی تاکسونومیک بایولوژیکی دانا بؤ
 پۆلینکردنی پوهه کاکان به پیی شیوه و پیکهاته کانیا، که ئەم کاره
 هاوشیوهی پۆلینکردنی گرووپه بیرکارییه کانه.

گروپی شهوله بان-ئه ژدیها

The Monster Group

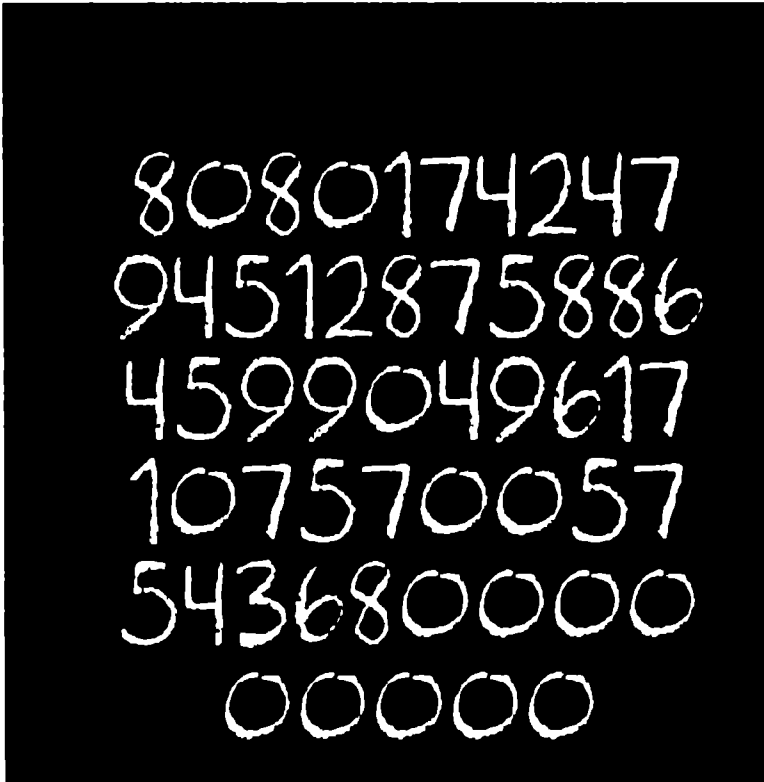
گروپی شهوله بان⁸² یان ئه ژدیها، یه کیکه له گه وره ترین گروپه نویسته ساده کان و گرنگیه کی زوری ههیه له پۆلینکردنی گروپه کوتاداره کان. ئەم گروپه ش ههچ بنه گروپیتیکی بهردهری نییه، شهوشی ههیه تی گروپه خۆی و له گه ل دانهی بی لاین، که ئەمانه ش بنه گروپوسی بهردهر نین. له سالی 1970 پرسیاریک له مه پ گروپوسی درنده هاته ئاراهه، دواتر له سالی 1982 له لاین 'رۆبیرت کریسی' یه کلابزوه و شیکاره کهشی له چند په پریک بلاو کردهوه به ناوی ئه ژدیهای هاورپیانه - the friendly monster که تیدا له:

808017424794512875886459904961710757005754368000000000

دانه پینکه اتبوو، واته (نزیکی 8×10^{53}). که به شیوهی ریزکراوه نووسرابوو، وه (196,196 x 883,883) ریز و ستوونی پیوست بووه. قهبارهی گروپوسی لهو شیوه کاتیکی زور دهبات بو شهوهی دلنیا بین که

⁸² خه لکی ههولیر زور جار له گیرانه وهی چیرۆک بو منداله کانیا، وشه ی 'شهوله بان' به کاردین.

دهشیت بو هموو گرووپه پچر پچره کان پوونبکرتنه وه. هر چنده
 نه مانه له سه ره تای سده ی نوزده هم دوزرانه وه، به لام به شیوه یه که ی
 ته او ته فسیر و لیکدانه وه یان بو کرا له سه ره تاکانی سده ی بیستم.



گروپەکانی لای

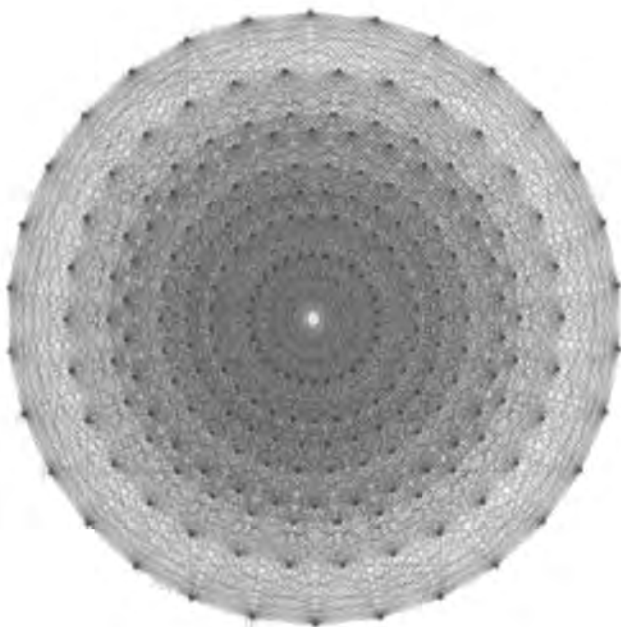
Lie groups

گروپەکانی لای⁸³ کۆمەڵە گروپینن لە ناو خیزانێک، که گرنجیەکی زۆریان هەیە، که دانەکانی پشت بە گۆراوە بەردەوامەکان دەبەستن، که بە پێچەوانەی پیکهاتە گروپی شەولەبان و گروپە هاوجییەکان لە مەر چەند لایەکان. بۆنمونه، ئەگەر بیت و سەرنجی هاوجییەتی بازە بەدەین، دەبینین که سووراندن بە هەرگۆشەیهک بە نەزبەت چەقەکەیهوه، هەر دەکاتەوه بازەکه خۆی، واتە بی هیچ گۆرانکارییهک، بۆیه گروپی هاوجی لە مەر بازە ناتواندین وهک گروپە هاوجییەکانی تر لە مەر چەند لایەکان پۆلین بکریت، بۆ نمونه لهگەل سنی لایەکی ریک که 6 دانە جیاوازی هەیە. گروپی هاوجییەتی بازە، یەکیکه له گروپەکانی لای.

تیۆری گروپە بەردەوامەکان زۆر ئالۆزتره به بەراورد لهگەل گروپە پچر پچرەکان، لهگەل ئەمەش، گروپەکانی لای باشترینە بۆ تیگەیشتن لهمانه. مومکینه ئەمانه تهفسیر بکرین تهنیا بههۆی سروشتی پارامیتهرهکانیانهوه، بهلام ئەمانه شتانیکی زۆر زیاتریان بۆ دەمینیتهوه وهک له پیکهاتە بەردەوامەکانیان. ئەمە دهکریت به شیوهیهکی ساف

⁸³ ناوی ئەو کەسە به که گروپەکهی دۆزیوهتهوه.

(smooth) یان جیاکارانه، یا فره یی بیندریت، که جوری تاییه تین له ناهوته ی توپولوجیانه.



نواندنی به کیک له گرووپه کانی لای E8.

تیوری نلقه

Ring theory

تیوری نلقه، بریتیه له پیکهاته یه کی په تی بیرکاریانه که کومه له یه که دانه به یه که وه له خۆده گریت له گه له جووته کرداریکی دووانی. له مه و پیش گرووپمان باس کرد، که تنیا له یه که کرداری دووانی له خۆ ده گریت له گه له کومه له یه که له دانه کان. له تیوری نلقه کان، کرداره کانی وه که همیشه، به (+) کۆکردنه وه و (X) جاراندن بانگده کرین، وه که چون له گه له گرووپه کان کاتیک له ژیر پۆشنایی له یه کیک له کرداره کان، نه گه دوو دانه مان به سه ریدا جیه جی کردبا، ده بوو ئه و نه جامه ی به ده ستمان ده که ویت له هه مان تووخمی ئه و دوو دانه به بوایه، نه مه بۆ نلقه ش هر وایه. به لام جیاواز له گرووپ، کاتیک له گرووپ شتیکمان نه بوو به ناوی سیفته ی نالۆگوری، بۆیه کرداری کۆکردنه وه له تیوری نلقه پیوسته سیفته ی نالۆگوری (Commutative) هه بیته. به واتایه کی تر، بۆ هر دوو دانه a و b نه وه ده بیته $a + b = b + a$. که ده بیته له و پرۆسه یه دانه ی بی لایه ن (Identity) و هه لگه پاره (Inverse) بۆ دانه کان بوونی هه بیته، بۆیه ده بیته له کرداری جاراندنیش سیفته ی یه کتر به ستنی هه بیته. به کورتی، دوو ریسا که که ده بیته پروبدات و بیته جی له کاتی پیکه وه کۆبوونه وه ی کرداره کانی کۆکردنه وه و جاراندن، نه وانیش یاسای یه کتر به ستن (Associative) به سه ر کۆکردنه وه، واته پیکه وه به ستانی جاران و کۆکردنه وه به یه که وه:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \text{ و } (a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

کۆمهلهی ژماره سروشتیهکان، ریژهیهکان و راستیهکان ئه مانه کشتی ئه لقه ن. له گه له ئه مهش، ئه لقه یه کی گشتی چند تاییه ته ندییه کی هیه، ئه گه ر بیت و $a \neq 0$ ، کاتیک 0 بریتیه له دانیه بی لاین له کرداری کۆکردنه وه، کاتیکیش ئه و ژماره یه له گه له ژماره ی تر ده گه نه به کتر له کاتی به کارهینانی کرداری کۆکردنه وه، ئه وه ئه و ژماره ی له گه لی دیت وه ک خۆی ده میتیه وه: $1 + 0 = 1$ ، به لام ئه گه ر $a \times b = 0$ ، ئه وه ناتوانین بریار بدهین که کامه یان ده بیت سفر بیت، ئه گه ر چیه زور پوونیش دیاره بق ژماره ریژهیهکان و تهواوه کات یان راستیهکان. سه ره پای ئه مانهش، تیوری ئه لقه به شیوه یه کی سروشتیه سئوردار ده کریت له پانتایی بیرکاریدا، به تاییه تی به په یوه ندی له گه له تیوری گروپ، سئوردار کردنیش وه ک ریگه دان به لابر دن و سپینه وه له کرداری جار انکردن، وه ک له و هاوکیش هیه: $a \times b = a \times c$ لیره ده کریت a لابر دیت (Cancellation). بویه ئیستا دین به شیوه یه کی رسمی پیناسه ی ئه لقه ده که ی ن: ئه لقه یه ک R بریتیه له کۆمه له یه ک (Set) له گه له جووته کرداریکی دووانی (Two binary operation) ئه وانیش (+) و (.) ئه گه ر هاتوو ئه و چند مرجه ی خواره وه ی تیدا بیته دی:

- i. پئوسته $(R, +)$ ئه بیلینه گروپ بیت (Abelian).
- ii. بۆ هه موو دوو دانه $a, b \in R$ به هه مان شیوه ده بیت
 $a \cdot b \in R$
- iii. سیفته یه کتر به ست، $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ بۆ هه موو
 سی دانه یه ک $a, b, c \in R$
- iv. سیفته یه بشینه وه له ناو R ، که بۆ هه موو سی دانه یه ک
 $a, b, c \in R$ ده بیت

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ و } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

تییینی: مه به ست له 'ئه بیلینه گروپ' سی شته، ئه وانیش:

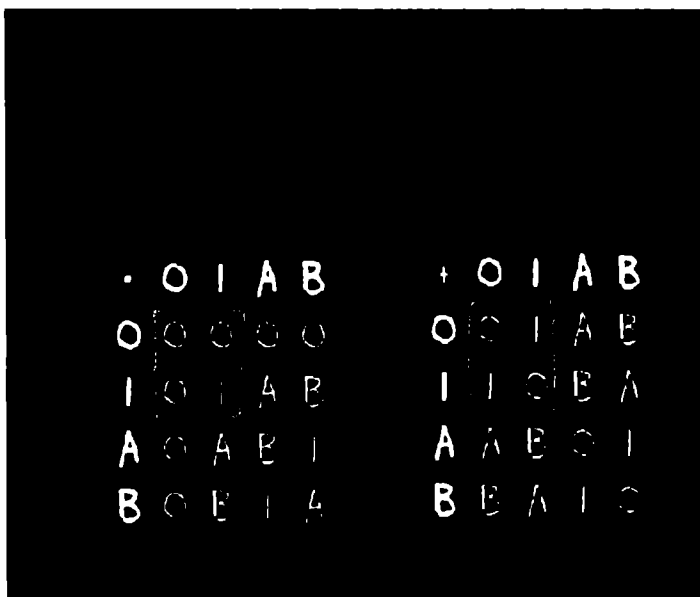
- i. $(R, *)$ سیفته یه ئالوگوری هه بیت (Commutative)
- ii. (R, o) نیوه گروپ بیت (Semigroup)
- iii. سیفته یه ئالوگوری بیته دی.

مەيدانەكان

Fields

مەيدانەكان، بریتین لە بونیاتیکی جەبری پەتی که دوو جووتە کردار لەخۆی دەگریت. ھەر وەك تیۆری ئەلقە، ئەو کردارانەش بریتین لە جارانی کردن و كۆکردنەو، وە بەھەمان شیوہ سیفەتی ئالوگۆی بۆ ھاتۆتە سەر بە ھەمان فۆرمی تیۆری گرووپ که پیشتر باسمان کرد. تیۆری مەيدان ھەر لە دەفەری تیۆری ئەلقە دروست دەبیت، چونکە ھەر ئەلقە یەك ئەگەر ھاتوو: (1) ھەلگری سیفەتی ئالوگۆی بۆو لەگەل ھەبوونی دانەي بیلايەن. (2) بۆ ھەر دانە يەك، ھەلگەراوہەكەي بۆونی ھەبیت. ئەوہ بە ھاتنەجینی ئەو دوو مەرجە، تیۆری مەيدان دروست دەبیت. بۆیە بۆ ھەر دوو دانە يەك a و b ، ئەوہ: $a \times b = b \times a$ ، وە چگە لە بۆونی دانەي بۆ لایەن لە کرداری جارانیکردن وەك لە تیۆری گرووپ و، ھەر وەھا سیفەتی یەكتر بەستن که لە ئەقلەش دەھاتە دی. پیناسەي مەيدان دەلێت: مەيدان بریتییە لە ئەلقە يەكەي ھەلگری سیفەتی ئالوگۆر (Commutative ring) لەگەل دانەي بۆ لایەن بە نەزبەت کرداری جارانی، وە بۆ ھەر دانە يەك که سفر نەبیت، ھەلگەراوہەكەي وجودی ھەبیت. ئەمەش واتای ئەوہیە دابەشکاری لە مەيدان مومکینە بۆ ھەموو دانەكان بیجگە لە دانەي بۆ لایەن لە کرداری كۆکردنەو. ئەوہش واتە، بە پیچەوانەي ئەلقە، ئەگەر $a \times b = a \times c$ و $a \neq 0$ ، ئەوہ $b = c$. بۆیە تیۆری مەيدان داناسقەترە وەك لە تیۆری ئەلقە. ژمارە تەواوہەكان،

ریژه ییبه کان و ژماره راستییبه کان گشتیان ده بن به میدان، وهک چون ده شبنه ئه لقه، واته گشت مهیدانیک ده بیته ئه لقه، به لام پیچه وانه که ی راست نییه. نمونه یه کی تر له هه مبه ر مهیدان، بریتیه له کومه له ی ئه و ژمارانه ی که ئه و فورمه یان هه یه $a + b\sqrt{2}$ کاتی a, b ژماره ی ریژه یین.



ئهم دوو خشته یه دوو ئوپه ریشن-کردار ده نوینن له مهیدانیکه ی ساده و ساکار بۆ چوار دانه O و A, B, I که I بریتیه له دانه ی بی لایه ن له کرداری جاران، O بریتیه له دانه ی بی لایه ن له کرداری کوکردنه وه که.

تیۆری گالوا

Galois Theory

گالوا، شۆرپشگپرنکی فەرهنسی له زانست ((کهسیکی بی پروانامه))، یه کم کهس بوو که بهردی بناغهی تیۆری گروپهکانی دانا و توئینهوهکانی شۆرپشگی له چهبردا بهرپا کرد، که به بیردۆزی گالوا ناسراوه. بیردۆزی گالوا دهرگایهک بوو بۆ شیکارکردنی چهندین پرسی بیرکاری، یه کینک لهو نهجامانهی له بیردۆزهکی ئهوه کهوتهوه، ئهوه بوو که شیکاریکی گشتی بۆ هاوکیشهی سهروو پله 4 بوونی نییه. گالوا کۆماریخواریکی توندپهرو بوو، بهو هۆیهوهش ماویهک له بهندیخانه بوو. [گالوا لهسهه کچیک بریندار بوو و کوژرا].

گالوا، توانی شتانیک بدۆزیتهوه، که تا دونیای ماتماتیک ماوه ئهوه ههر باسی لینهوه دهکریت و ههر به نهمری دهمنیتهوه. تیۆری گالوا، بریتیه له تیۆرییهک که له نیوان تیۆری گروپ و تیۆری مهیدان (مهیدان) پهیههندییهک دروست دهکات، ههروهها پیکهوه بهستانی تیۆری گروپ و شیکاری زۆر رادهدارهکان. بههۆی تیۆری گالواوه دهتواندریت ههندی له کیشهکانی تیۆری فیلد له تیۆری گروپ قسهی لینهوبکهین و باشتتر لینی تیبکهین، واته پوختکردنهوهی کیشهکان له تیۆری مهیدان بۆ تیۆری گروپ، واته له پیکهه ئهه تیۆرییهوه قسه لهسهه فیلد دهکین بههۆی تیۆری گروپ له ژیر ههندیک مهرج. شیکاری گشتی بۆ رادهدارهکانی پله: 2 و 3، له کۆتاییهکانی سهدهی شازدهم دۆزرانهوه، بهلام بۆ پلهی

بهرزتر، نه تواندرا شیکاریکی گشتیان بو بدوززیرتهوه. گالوا توانی پیشانی بدات که تیوری گرووپ ده توانیت نهوه ده برخات که که ی راده داریک شیوهیهکی گشتی بو شیکاره که ی هیه، واته فزومیکی داخراو که له چند کرداریکی جبری پیک دیت. بویهش نهو راستیهی دوزیهوه که هه بوونی فزومی شیکاره داخراوه کانی هاوکیشهکان په یوهندی هیه به سیفتهی ئالوگزیی گرووپه که. تنیا چوار گرووپی سه رهتا که توانای شیکارکردنیا هیه؛ گالوا بونیادی نان هر چواریان سیفتهی ئالوگزیییان هه بوو. هه مووی نهوهی ئیستا ده یزانین، راده دارهکان تنیا تا پلهی چوار ده تواندريت شیکاریکريت و شیکاره که ی بدوززیرتهوه به شیوهیهکی گشتی له چند رادهیهکی جبری ساده و نه خشه ی جبری، هر له پیکه ی تیوری گالواوه، نهوه پوون بزووه که هندی کیشه ناتواندريت شیکاریکرین، بو نمونه: دوو هینده کردنی شهش پالو، دوو جارکردنی بازنه...



تیوری گالوا که رهستهیهک بوو بو دوزینهوهی (هه بوون یان نه بوون) شیکاری گشتی راده دارهکان، وک راده داری پله 6 که له سه رهوه نیشانداروه، که دوزینهوهی شیکاره که ی مه حاله.

تیۆری بهرق

Moonshine theory

له بیرکاریدا، تیۆری بهرق⁸⁴ دهرخستی په یوه نډیبه که له دوو دهقهری جیاوازه پانتای بیړکاری، نهوانیش گروپی شهوله بان (Monster group) و جۆریک له نهخشه ی شیکاره یی-نه لاتیک (Modular functions) له ژماره نالوزه کسان، که له لاین دوو بیړکاریزانی بهریتانی (Simon Norton - John Conway) پیشنیارکرا سوو، که پاش نهوه ی (John Kay) له سیمناریک گونجاندنیکي نوازه ی باس کرد له سالی 1978. که ی (Kay) سهرنجی دا که کۆلکه یه که له فراوانبوونی نهخشه کان پیناسه کراوه له تیۆری ژماره کان له لاین (Felix Klein) که کۆلکه ی بریتبوو له 884,196، که نه مهش ته نیا له یک شماره-ره نووس له گه ل قه باره ی گروپی شهوله بان جیاوازه له فۆرمی پیزکراوه دا.

دواتر پرسیاریک هاته ناراوه، که بۆچی نه م دوو پانتاییه، نه م تیۆریه سه رئاو دهخن؟ بۆ وه لامی نه و پرسیاره، ریچارد بۆرچیدس (Richard Borcherds) له سالی 1992 پیشانی دا، که په یوه نډیبه

⁸⁴ 'بهرق' واته گورزه ی پروناکی مانگ. وه ک محوی شاعیر له شعریک دهلیت: نه گه ر که سی شیتانه بهردم تیگریت، نه وه من بهرقی تیده گم.

توله که ی نیوان ئەم دوانه چیه ، بهم کارهشی خهلاتی فیلدزی⁸⁵ بیرکاری وه رگرت. له گه له مهش، چهن دین زانیاری له هه مبه ر ئەم په یوه ندییه له نیوان، تیوری کوانتەم، جه بر، توپۆلۆجی شوینناسی و تیوری ژماره کان به نه زانراوی ماوه ته وه، واته تا هه نووکه لیان تینه گه یشتووینه.

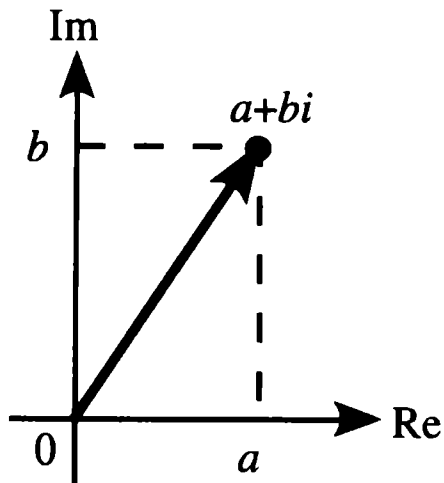


⁸⁵ خهلاتی فیلدز خهلاتیکه تاییه ته به بیرکاری، که هاوتای نۆبله. بیرکاریزانی کورد (کوچەر بیرکار) که براوه ی ئەو خهلاتیه.

بهشی نۆیه م

ژماره ئالۆزه کان-ئاویته کان

Complex numbers



ژماره ئاویته کان

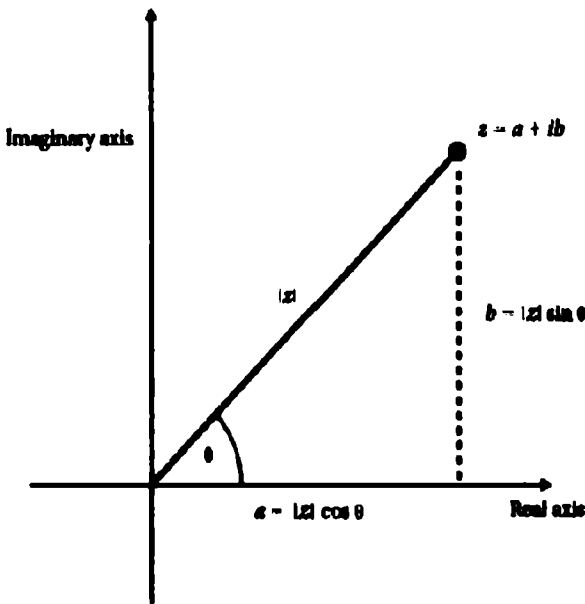
Complex numbers

دهتوانین بلین: ژماره راستیه کان؛ ئه وانیش هر ژماره ئاویته کان، له بهرته وهی هه موو ژماره یه کی راستی ده کړیت به شیوهی ژماره ئاویته کان لئی بنوړین، ئه ویش کاتیک به شه خه یالییه که ی سفره. له بابته کانی رابردوو باسی ئه وه مان کرد که ئه و هؤکاره چی بوو که وای کرد ژماره خه یالییه کان په یدا بن، ئه ویش: ئایا شیکاری هاوکیشه ی له م شیوه یه: $x^2 + 1 = 0$ چیه؟ هر ژماره یه کی ئاویته Z ده تاندریت له سه ره شیوه ی $a + ib$ بنووسریت، کاتیک a و b دوو ژماره ی راستین و، i بریتیه له ره گی دوو جای: -1 ، واته $i^2 = -1$. وتمان b و a دوو ژماره ی راستین، به a دهوتریت به شی راستی Z (Real part)، و ه b دهوتریت به شه خه یالییه که ی Z (Imaginary part).

ئه گه ر بیر له پیکهاته ی ژماره ی ئاویته کان (a, b) بکه ی نه وه وه ک دوو ژماره ی راستی له پۆتانی دیکارتی، ئه وه ده تانین ئه اندازه یه ک بۆ ژماره ئالۆزه کان بدوزینه وه، وه ک له وینه که دا دیاره. ئه م وینه یه ناسراوه به وینه ی روونکردنه وه یی ئارگاننت (Argant). هر خالییک له پروته خسته که دا، واته هر ژماره یه کی ئاویته له پروته ختدا-پروته ختسی ئاویته (Complex plane)، دووریه کی هه یه له خالی بنه پرت، که پییی دهوتریت به های پروتی ژماره ی ئاویته ی Z (Absolute value) که به $|Z|$ هیمه ده کړیت. به پشت به ستن به بیردۆزی فیساکورس، ده تاندریت

$|z|$ به پێی دوو پێکهێنەرەکی (Components) بنووسـریت واتە:
 $|z|^2 = a^2 + b^2$ هەروەها هەر ژمارەیهکی ئاوێتە گوشەیهکی هیه، که
 په‌وه‌ندی به توهری X هوه هیه، که پێی دهوتریت جه‌سه‌ری ژماره‌ی
 ئاوێتە (Argument of complex number). به‌م هۆیه‌وه ده‌توانین
 ژماره ئاوێتە‌کان له پێکه‌وه به‌ستانی گوشه‌کی و مه‌وداکی بنووسین،
 ئه‌ویش به‌هۆی:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$



The Argand diagram

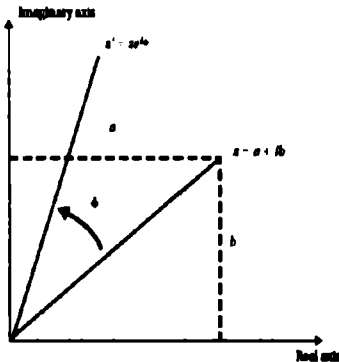
ئەندازەى ژمارە ئاویتەکان

Geometry of complex numbers

له بابەتى پښتوو تر باسى پروتەختى دیکاریتیمان کرد، ههروهه باسى ژماره ئاویتەکانمان کرد. ئەوهى ماوه، ئەوهیه ئەندازەى ژماره ئاویتەکان چۆنه و له کوی دهکریت پښانبدریت؟ له راستیدا ئه پروتەختى پښتر خویندومانه، که تیدا مەبەستمان پروتەختى دیکارتیه، هه هه مان پروتەخت بۆ ژماره ئالۆزهکان به کاردیت، تەنیا ئەوه نەبیت که توهههه x دهبیت بهشى راستى ژمارهکه، توهههه y دهبیت بهشى خهيالى ژمارهکه. له پروتەختى ژماره ئاویتەکان (Complex plane) دوو شت به زهقى جیادهکریتوه کاتى ژماره ئاویتەکان دهخوینن، ئەویش ئاوهلى ژماره ئاویتەکان (Conjugate number) و لاسهنگه سیکوشهه (Triangle inequality). وا دانى که: $z = a + ib$ هه ژمارهههكى ئاوتیه بیهت، ئەوه ئاوهلى (Conjugate) ئەو ژمارهه به \bar{z} یان z^* ههه دهکریت و بریتیه له: $a - ib$ ، واته ئەگه z و \bar{z} له سههه پروتەختى ژماره ئالۆزهکان بنوینن، ئەوه \bar{z} دهبیته وینه دانهوهى z به دهورى توهههه ژماره راستیهکان. له ریگه چهند ههنگاوێک و ههژمارکردنێک دهبنین که $|z|^2 = zz^*$. ههروهه دهکریت هههه که له بهشه راستى و خهيالییهههه ژمارهههكى ئاوتیه به جیا بنوسریت، $a = \frac{z+z^*}{2}$ ، $b = \frac{z-z^*}{2i}$ ، ئەمانهش کارناسانیمان بۆ دهکن له مهه خویندن و لیکولینهوه سهبارهت

به ژماره ئالۆزه کان و داتاشینی بیردۆزه کان⁸⁶. لاسهنگه ی سینگۆشه یی (Triangle inequality) بریتییه له لاسهنگه یه کی بیرکارییه نه له نیهوان لایه دریزه که ی سینگۆشه یه ک و لایه کانی تر، که به ستانه وه یان به هۆی ئامرازه کانی به راوردکردنی ژماره کان. ده قسی لاسهنگه که ئه وه یه: لایه دریزه که ی سینگۆشه یه ک، بچو کتر یان به کسان ده بیست به کۆی دوو لایه که ی تری. بۆیه کۆی دوو ژماره ی ئاویته به ئه ندازه ییانه وه ک کۆی دوو ی ئاراسته بر وایه، له کاتیک به شه کانی ژماره ئاویته که بریتییه له به شه خه یالییه که ی و به شه راستیه که ی. بۆیه ئه گه ر بیست دوو ژماره ی ئاویته مان هه بیست z و w ، ئه وایه:

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$



⁸⁶ له قۆناغی چواری زانکۆ، له وانیه ی شیکردنه وه ی ئاویته (Complex analysis)، له تاقیکردنه وه پرسیاریکم شیکارکرد به هۆی به کارهینانی ئه و دوو ده رهاویشته ی ژماره ئاویته کان، به م هۆیه به ریز (د. فریاد حوسین) خوشحالی خۆی ده ربهری بۆ شیکاره که م، که وه ک هاندانیک بوو تا زیاتر هه ول بده م، لیزه وه سوپاسی ده کم.

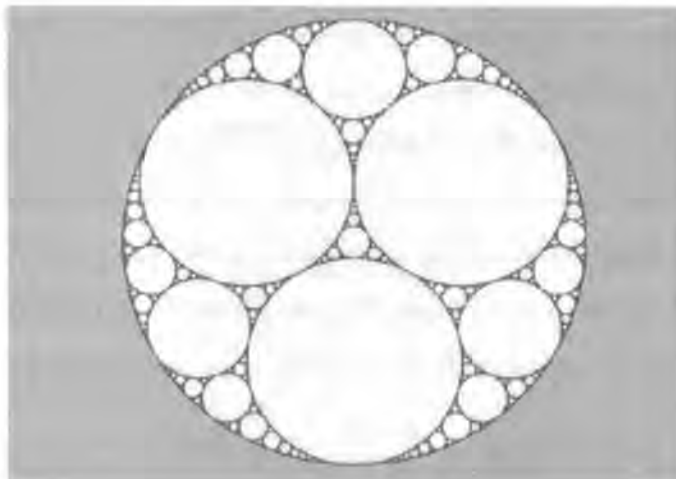
جینگورکی موبیوس

Möbius transformation

جینگورکی موبیوس⁸⁷ بریتیه له نهخشه یه کی ریژه یی له پروته ختی ژماره ناوخته کان که تیدا؛ راسته هیل شیوه گورکی پی ده کریت بؤ بازنه، یان بازنه شیوه گورکی پیده کریت بؤ راسته هیل، یانیش راسته هیل هر بؤ راسته هیل و بازنه هر بؤ بازنه به لام به گورانکاری، که ئویش له ریگه ی ئه و فورمه یه: $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ کاتیک $ad - bc \neq 0$ ، و a, b, c & d گشتیان ژماره ی ناوخته ن و Z بریتیه له گوراپویکی ناوخته (Complex variable). جینگورکی یان شیوه گورکی موبیوس، له فیزیا کرنییه کی زوری هیه، هندی پرس ه ن چاره سه رکردنیان زه حمته له و ناووته یه که ی که تیدایه، بویه له ریگه ی شیوه گورکی موبیوس کیشه که ساده تر دهرده که ویست و چاره سه رکردنی ئاسنتره، دوا ی ئه وه ی که چاره سه رکرا، ئه وه ده که پیندریته وه بؤ شیوه ره سه نه که ی خوی. بؤ نمونه ئه کهر قوماشیکی 10 مه تری بته ویست بیکه یته دوو پارچه، ئه وه قوماشه که دهنوشتینینه وه بؤ سه ر یه کتر ده بیته 5 مه تر، پاشان ده یکه ینه دوو

⁸⁷ موبیوس، بریتیه له و ئه اندازه یی یان ئه و شیوه ئه اندازه یی که تهنیا یه ک پروی هیه. وه ک لی سیمولین له چاوپنکه و تینکدا ده لیت: گهردون تهنیکی شیوه مه حاله. ناوه وه ی هیه به لام دهره وه ی نییه، دراویکی تاک پرویه. ئه م ته لارسازییه موبیوسه ناله نگارییه کی تاقانه ده خاته به رده م گهردوونناسان، ئه وانه ی که خویان له پنگه یه کی نابه جیدا دهنوزنه وه؛ گبربوون له ناو ئه و سیستمه دا که هه ولی لی تیگه یشتی دهن. (په یچی فیزیک بؤ کورد).

پارچه، که کرمانه دوو پارچه، قوماشه که هله دهینه وه، شیوه گورکیش بیرۆکه که بی به شیوه یه یه، هه ندیک کومه له ی ریزکراوی ئاویته 2×2 ده تاندریت به هوی جیگورکینی مویوسه وه شتی جوان و سه رنج راکیشی لیه وه به ده سه ته بیه ندریت، وهک ئه و وینه ی له خواره وه پیشاندراره که فراکتالیکه - له یه کبوه ⁸⁸ پینی ده لین: Apollonian gasket چونییه تی دروستکردنی له ریکه ی جیگورکینی - شیوه گورکینی مویوسه وه دروست ده بیت، ئه ویش له سه ره تا له سه ی بازنه هاوچه شن - یه کسان ده ست پی ده کات، دواتر هه رچی که لین هه یه، به بازنه ی بچتر پرده کریته وه، تا ئه و شیوه یه وه رده گریت.



⁸⁸ له یه کبوه کسان (Fractal) پیکه اته یه کی نه ندازه ییه، که له گوره کردنه وه و دووباره کردنه وه ی شیوه نه ندازه ییه کانی لیکه ووی شیوه به ره تیه که پهیدا ده بیت. به ده سه ته واژه یه کی تر فراکتال به پیکه اته یه ک ده و تریت که هه ر به شیکی هاوشیوه ی شیوه گشتیه که یه، فراکتال له دور و له نزیکه وه یه کسان ده بیه ندریت، به م تابه ته مندیه ی فراکتال ده لین له خوچووی (self-similar).

زنجیره ی توانی ئاویته

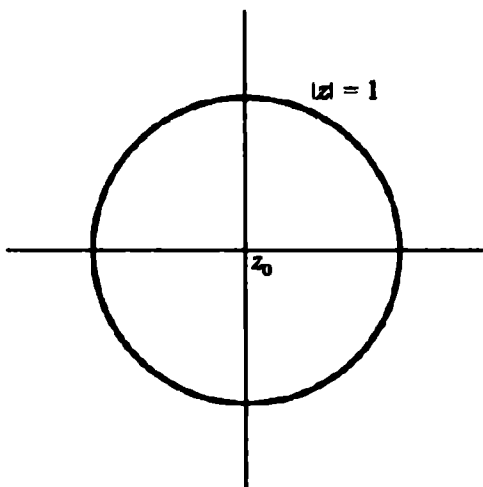
Complex power series

زنجیره ی ئاویته یی یان زنجیره ی تایله ری ئاویته، بریتیه له زنجیره یه کی ناگوتا له راده له سه شتیه ی:

$$a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

کاتیک کۆلکه کانی a_k گشتیان ژماره ی ئاویته ن. به شتیه یه کی گشتی ده تواندریت له شوینی Z دا، $(z - z_0)$ دابنیز به پنی ژماره یه کی دیارکراو z_0 له ژماره ئاویته کان. زنجیره توانیه کان له چارچیه ی ژماره راستیه کان بابه تی نزیکبووه یان دووکه وتوهه چه قی بابه ته که بوو. یه کیک له پنگاکان بۆ پۆنانی نزکیبوونه وه یی، بریتیه له بهرواردکاری له مه ودا ی هه ر راده یه کی $|a_0| + |a_1 z| + |a_2 z^2| + \dots$ له گه له زنجیره ی نه اندازه یی $1 + r + r^2 + r^3 \dots$ به و شتیه یه. نه گه ر بیت و نه و زنجیره یه لیکنزیکبووه بیت بۆ هه ر نرخیکسی Z نه وه نه خشه یه ک له پنگه ی نه و زنجیره وه بنایاد ده ندریت و پنی ده لیت به حال (به جی-Entire). نه خشه ی به جی، بریتیه له و نه خشه یه ی که راده داریکه له گۆراوی ئاویته و، نه خشه ی توانی له گۆراوی ئاویته له خۆده گریت. نه گه ر بیت و زنجیره توانیه که لیکنزیکبووه بیت بۆ نرخیک، کاتیک Z له z_0 نزیک ده که وینه وه، نه وه نیوه تیره ی لیکنزیکبووه که به گۆیره ی زنجیره که ده کاته گه وره ترین r به و مه رجه ی که زنجیره که لیکنزیکبووه

بیت بۆ هه موو Z نیک له ناوه وهی بازنه یه ک که نیوه تیره که ی r و چه که شی بریتی بیت له Z_0 .



مه و دای زنجیره یه کسێ توانی ئالۆز، که لیک دور که وتنه وه پیشان ده دات له هه ندی خالدا و نیوه تیره ی لیکنزی کبوه له ده ور به ری خالیکی دراو که بریتییه له: Z_0 .

توانیه ئاویتته کان

Complex exponentials

له بابته کانی رابردوو باسی نهخشه ی توانیمان کرد له سه ژماره راستیه کان، به هه مان شیوه ده توانین قسه له سه نهخشه توانیه کان بکین له هه مبهر توانی ژماره ئالۆزه کان کاتیک بنچینه ی نهخشه یه ک ژماره یه.

ئه گه ر بیت و $z = x + iy$ ئه وه ده توانین تـوانه که بگـۆرین بـۆ ژماره یه کی ئاویتته، واته e^{x+iy} . وه ک ده زانین به e دهوتریت ژماره ی ئۆیله. ئیمه لیتره ده توانین به شه راستیه که و به شه خه یالییه که ی ژماره ئاویتته که جیابکه ی نه وه و به جیا بیانوسین، که به e^x دهوتریت توانی به شی راستی هه ئه وه ی له ژماره راستیه کان هه مان بوو، به e^{iy} دهوتریت به شی توانی خه یالی. هه ئه جیا کردنه وه یه ده مانبات بۆ شتیکی تر، ئه ویش ئه وه یه که ی به شه خه یالییه که، ده تواند ریت به هـۆی زنجیره وه بنوسریت، هه ر بۆیه ئه وه ی ده ستمان ده که ویت ئه وه یه: $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ ، له و هاوکیش ه یه بۆمان ده رده که ویت که نهخشه سیگۆشه ییه کان ته نیا په یه ونده ی به ئه ندازه و ژماره راستیه کان نییه، به لکو ئه وه ته ئه و نهخشانه دینه ناو ژماره ئاویتته کان و به شداری گرنگ ده که ن له داتاشینی یاساکان.

نخشه توانییه کان پیتشتر باسی به کارهینانیمان کردوه، به لام له مهر ژماره ئالۆزه کان دیسانه وه گرنگی و به کارهینانی زوری ههیه له بواری ئەندازیاری و فیزیا... بۆ نمونه له فیزیا به کار دیتهندریت بۆ وهسفی ئەگه‌ری پروداویک له کوانتەم میکانیک. په یوه‌ندی نیتوان نەخشە‌ی توانی ئالۆز و له‌گه‌ل نەخشە سینگۆشە‌یه‌یه‌کانی وه‌ک ساین و کۆساین، ده‌مانگه‌یه‌نیتە هاوکیشە‌کی زۆر جوان که پیتی ده‌لین هاوکیشە‌ی ئۆیلەر بیان هاوئەنجامی ئۆیلەر، که هاوکیشە‌که‌ش بریتیه له: $e^{i\pi} + 1 = 0$ ، له‌به‌ر ئەوه‌ی 5 هه‌ره گرنگترین زارشته‌کانی ماتماتیکی تیدا کۆبوته‌وه، ئەوانیش: 1 که دانە‌ی بی لایه‌ن له کرداری جاراندکردن. 0: دانە‌ی بی لایه‌ن له کرداری کۆکردنه‌وه. θ : نه‌گۆپی ئۆیلەر. i : ژماره‌ی خه‌یالی و نه‌گۆپی π . ئەو نەخشە‌یه کاتیک دروست ده‌ییت که $y = \pi$ ، چونکه $\sin \pi = 0$ ، $\cos \pi = -1$ ، واته: $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$ ، له‌مه‌وه‌ش ده‌گه‌ینه:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

یه‌کیکی تر له‌و ده‌رئەنجامه‌ هاوشیوانه‌ی ده‌ستمان که‌وتوه ئەوه‌یه: له‌به‌ر ئەوه‌ی ده‌توانین $z = x + iy$ به‌هۆی مه‌وداوه بنوسین: $|z| = r$ کاتیک r بریتیه له مه‌ودای ژماره ئاویتە‌که، وه گۆشه‌که‌مان θ . ئەوه واته $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، له‌مه‌وه‌ش ده‌گه‌ینه‌وه ئەوه‌ی که ژماره ئاویتە‌کان ده‌توانین به‌و شیوه‌یه‌ش بنوسین $z = r e^{i\theta}$.

نخشه ئاویتەکان

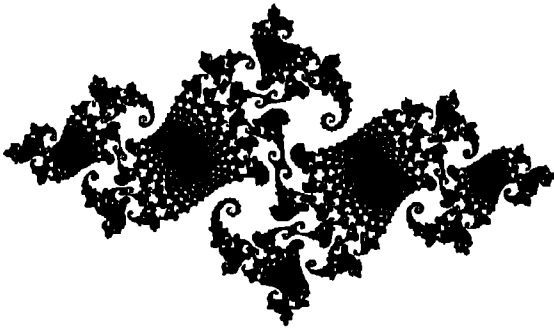
Complex functions

نخشه ئاویتەکان $f(z)$ هەر نخشه یه، به لام له ژماره ئاویتەکان، واته بواره که ی بریتیه له ژماره ئاویتەکان کاتیک $z = x + iy$ له بهر ئه وهی نخشه که ده بیته نخشه یه کی ئاویتە، وه ژماره ئاویتەکان به شی راستی و به شی خه یالیان هه یه، که واته نخشه که ش به هه مان شیوه به شی راستی و به شی خه یالی ده بیت وه به م شیوه ده نووسریت:

$$f(z) = u + iv$$

دیاره که u بریتیه له به شه راستیه که و v بریتیه له به شه خه یالییه که. له راستیدا تیوری نخشه ئالۆزه کان سه رسوره یته ره، له بونیاتتانی هه موو ئه نجامیک که تایبه ته منده به جیهانی شیکردنه وهی ئاویتە. ئه مهش له بهر ئه وه یه که نخشه له ژماره ئالۆزه کان Z زۆر سنورداره، که نخشه که پتوسته به ده ر له به کاره ی تانی ئاو لهی ژماره که بنووسریت z^* ، بۆیه به شه راستیه که ی نخشه ئالۆزه کان به شیک نییه له نخشه ئالۆزه که. ئه وه ی پتوسته بیزانین، ئه وه یه که هەر ژماره یه کی ئاویتە بۆ پیشاندانیان به شیوه ی ئه ندازه یی، پتوستی به پووته خته (له بابه تی پیشتر باسمانکرد)، واته ژماره ئاویتەکان له ئاهووته ی دووره هه ندی پیشانده دریت، له کاتیک گشت ژماره راستیه کان ته نیا له سه ر هیلیک واته ئاهوته یه کی یه ک ره هه ندی ویناده کرین. نخشه له

ژماره راستییهکان مهودایه که ی دیسانه وه ژماره یه کی راستی بوو، به لام لیره نهخشه له ژماره ناویتهکان جگه له وهی بواره که ی له ئاهووتهی دوو رههندی وینا دهکریت، نه وه مهودا که ی وا به ئاسانی وینه نا کریت، چونکه به شیکی خیالی هه یه که پیوستی به ئاهووته یه کی دوو رههندی هه یه، وه به شه راستییه که ی ئویش پیوستی به ئاهووته یه کی دوو رههندی هه یه! یه کیک له و پیکهاته هه ره جوانانه ی به هزی نهخشه ناویتهکان دروس تکراره: $c + z^2$ که له وینه که نیشان دراوه، که خشه ته یه که له ژماره پیشانده دات که ژماره کانیش دواماتونه، نه وه به و شیوه یه دهوترین کومه له ی جولیا یان ژولیا- Julia set .



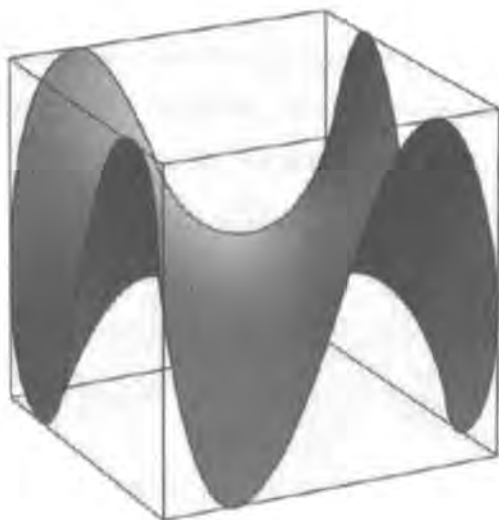
جیاکاری ئاویتە

Complex differentiation

له بابەتی نەخشە له ژمارە راستییەکان باسی چۆنییەتی دۆزینەوهی داتاشراوهی نەخشەمان کرد، ئیستا که نەخشەمان هەیه له ژمارە ئاویتەکان، بەهەمان شیوه داتاشراوهمان بۆ ئەوانیش هەیه، چۆنییەتی دۆزینەوهی داتاشراوهی نەخشە ئاویتەکان هەر بە هەمان شیوازی دۆزینەوهی داتاشراوهیه له نەخشە له ژمارە راستییەکان. بەلام لەبەر ئەوهی وتیمان بوازی نەخشە ئاویتەکان ئاهووتەیهکی دوو پەهەندییه، ئەوه جێبەجێکردنی پیناسەیی داتاشراوه تۆزیک گۆرانیکاری بەسەر دیت، هەر بۆیه لەمەڕ ئەم پرسە چەند بیردۆزیک هەن که ئاسانکاریمان بۆ دەکەن که ئایا نەخشەیهکی ئاویتە کهی جیاکاری لەسەر دەکریت، ئەویش بەهۆی بیردۆزی کۆشی-ریمان (Cauchy-Riemann). واتە ئەگەر بیت و نەخشەیهک توانای داتاشراوهی هەبیت، ئەوه ئەگەر و تەنیا ئەگەر یاسای کۆشی-ریمان جیب جی بکات. بۆ نمونە ئەگەر $z = x + iy$ و $f(z) = u + iv$ ئەوه دەبیت $\frac{\sigma u}{\sigma x} = \frac{\sigma v}{\sigma y}$ و $\frac{\sigma u}{\sigma y} = -\frac{\sigma v}{\sigma x}$ بیستە دی. لەمەوهش دەگەینە ئەوهی که u و v دوو نەخشەیی هارمۆنین که ئەمە جی بەجی دەکەن:

$$\frac{\sigma^2 u}{\sigma x^2} + \frac{\sigma^2 v}{\sigma y^2} = 0$$

ئەمەش ھاوکیشەیی لاپلاسه که خۆی له زۆر ھاوکیشەیی فیزیایی
بیرکاریانە دەبینیتەوه. بۆ نمونە ئەگەر $f(z) = z^2$ ، ئەوه داتاشراووی
ئەو نەخشە ئالۆزە دەکاتە $f'(z) = 2z$. هەلبەتە ئەم بیردۆز، له
پیناسە سەرەکیهکی سەر ئاوکهتووه.

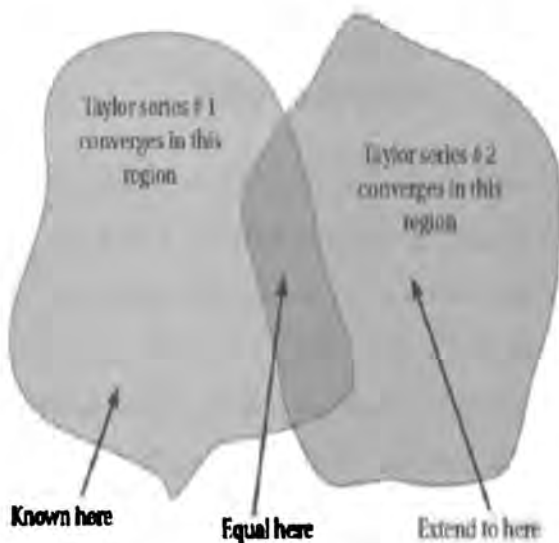


نخشه‌ی شیکاری

Analytic function

نخشه‌ی سه‌لیقه‌دار-شیکاری، بریتیه له و نخشه ئاویتیه که توانای داتاشراوی هیه (چونکه له هموو خالیک و له هموو نایبه‌ره‌ودیک-ده‌وروبه‌ری خاله‌کان بهره‌وامه و کیشیه‌ی نییه)، بز ئه‌وه‌شی که له هموو خالیک داتاشراوه‌که‌ی بوونی هه‌بیت، ئه‌وه پیوسته نخشه ئاویتیه‌که پاسه‌دانی هاوکیشیه‌ی لاپلاس بکات، وه نخشه‌که‌ش ده‌بیت پتر له داتاشراویکی بوونی هه‌بیت، واته تنیا داتاشراوه‌ی یه‌که‌م کافی نییه. به‌لام له راستیدا له نخشه ئاویتیه‌کان نه‌گه‌ر هاتوو نخشه‌یه‌ک داتاشراوی یه‌که‌می هه‌بوو، ئه‌وه مەرج نییه داتاشراوه دووه‌می هه‌بیت.

ئێستا وا دانی دوو نخشه‌ی ئاویتیه‌مان هه‌یه، ئه‌وانیش f و g که دوو نخشه‌ی ئاویتیه‌ی شیکارین، هه‌ریه‌که‌یان له زنجیره‌یی تایله‌ر لیکنزیکی‌بونه‌ون له ناوچه‌یه‌ک له پروته‌ختی ژماره ئاویتیه‌کان، نه‌گه‌ر بیت و ناوچه‌کان تیکه‌ل به‌یه‌کین و $f(z) = g(z)$ له ناو ئه‌و ناوچه‌یه‌ی که تیکه‌لی یه‌ک بوونه، ئه‌وه‌ی دیست $f(z) = g(z)$ پرووده‌دات له هه‌رشوێنیکێ تر. ئه‌م ته‌کنیکه‌ی بهره‌وامی شیکاری؛ به‌کاردیست له شیکردنه‌وه‌ی نخشه‌ی زیتای ریمان (Riemann zeta function).



به‌رده‌وامبوونی شیکاری: ئەم وینەئێ سەرەوه دوو هەریم-ناوچه‌ی پیکداچوو-تیکه‌ل دهنوینیت له‌ رووتەختی ژماره‌ ئاویتەکان. ئەگەر بیت و زنجیره‌ی تایله‌ری نه‌خشه‌یه‌ک لیکنزیکیبوه بیت له‌ یه‌کیک له‌ ناوچه‌کان، وه‌ زنجیره‌ی تایله‌ری نه‌خشه‌یه‌کی تر به‌ هه‌مان شێوه‌ لیکنزیکیبوه بیت له‌ ناوچه‌که‌ی تر، به‌لام ئەگەر دیترا‌ئو دوو نه‌خشه‌یه‌ له‌ ناوچه‌ پیکداچوو-تیکه‌له‌که‌ یه‌کسان بوون، ئەوه‌ هه‌ردوو نه‌خشه‌که، نه‌خشه‌ی تایله‌ر ده‌بن له‌ سەر هه‌مان نه‌خشه‌ی شیکاری.

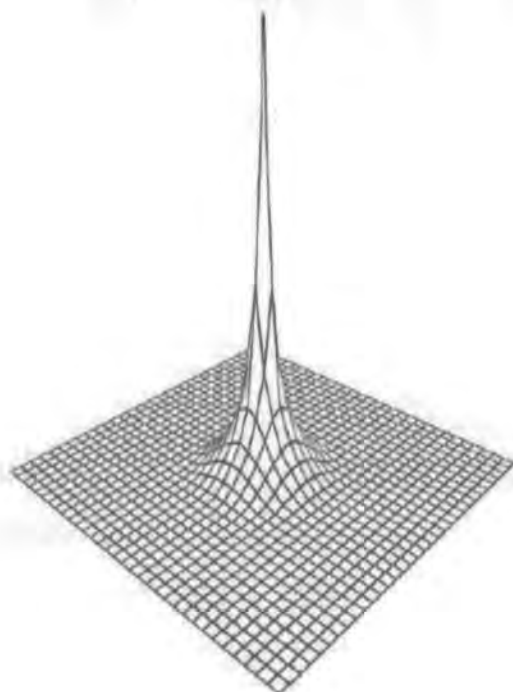
خالی ته پایی

Singular points

خالی ته پایی-ته کانه، ئه و خاله یه که نه خشه یه کی ئاویتته تیدا پیناسنه کراوه. خالی ته پایی ته گهر هات و له نه خشه یه ک بوونی هه بیت، ئه وه ده تواندریت لابدریت و کیشه که چاره سهر بکریت، نه گهر هاتوو ئه و خالانه چاره سهر کران به هوی به کارهینان و نووسینی نه خشه که به هوی زنجیره ی لورنت (Laurent expansion)، ئه وه ئه وکات نه خشه ئاویتته کیشه ی تیدانامینیت و ده بیته نه خشه یه کی شیکاریی. زنجیره ی لورنت به کاردیت بۆ ده برین و نووسینی ئه و نه خشه ئاویتانه ی که شیکاره یی (Analytic) نین، واته ئه و نه خشه ئاویتانه ی که ناتواندیت به هوی زنجیره ی تایله ر بنوسریت، جوریکی خالی ته پایی پیی ده وتریت جه مسه ری (Pole) نه گهر بیت ئه م شیوه ی هه بیت $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ کاتیک $n > 0$ ، بویه به شیوه یه کی بنچینه یی بۆ له و خاله ی که نه خشه ئاویتته که کیشه ی هه یه، مه به ستمان جور ی Pole، ئه وه زنجیره ی لورنت له ناکوتا راده ی توانی نه ریتی ده گریته خوی. زنجیره ی لورنتیش بۆ ئه و جوره خاله ئه وه یه:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_1 + a_1(z-z_0)$$

به کورتی و پوختی: زنجیره‌ی لورنت بقو نه و نه‌خشه ئاوتانه به‌کادریت که نه‌خشه‌یه‌کی شیکاره‌یی نینه، واته که ناتواندرین به زنجیره باوه‌که‌ی تایله‌ر بنووسریت، چونکه له خالیک یان چند خالیک کتشی تیده‌که‌ویت. شه‌مه‌ش به‌کادریت بقو دروستکردنی شتیکی نوی، که ناسراوه به پوه‌کانی ریمان (Riemann surface).



پووهکانی ریمان

Riemann surfaces

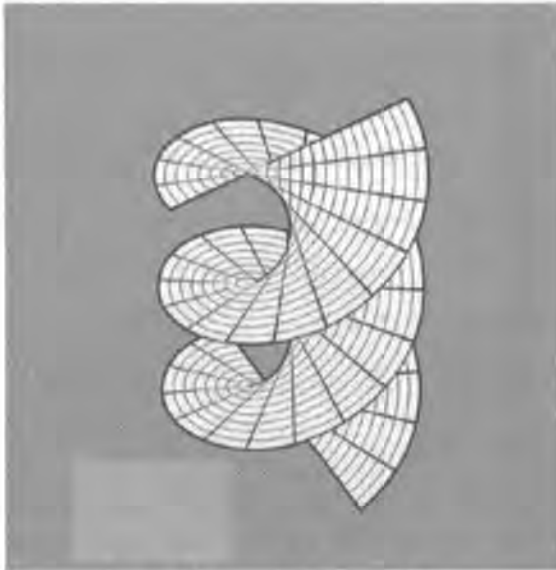
پووهکانی ریمان، پووینکن کاتیک نهخشه یه کی فره به ها له پووتهختی ئاویتته ده بیته نهخشه یه کی تاک به های له سه ر پووهک. واته ئه نهخشه یه ی که بق هر خالیک له بواری نهخشه که، به چند خالیک تری مه وای نهخشه که به ستراره ته وه، له کاتیک نهخشه ی تاک به ها بق هر خالیک له بواری، ته نیا به یه ک خال به ستراره ته وه له مه ودا. لۆگاریتمی سروشتی، $\ln(z)$ ، له ژماره ئاویتته کان، کاتیک $z = |z|e^{i\theta}$ بریتیه له: $\ln(|z|) + i\theta$ ، جۆریکه له نهخشه فره به ها کان:

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i\theta$$

به لام له بهر ئه وه ی $e^{2i\pi} = 1$ ، به به کارهینانی هاوئه نجامی ئۆیلەر، ئه وه $a = |z|e^{i(\theta+2\pi)}$ ، بۆیه له مه وهش ده گه یه نه $e^{2ki\pi} = 1$ به هه موو $\ln(z) = \ln(|z|) + i(\theta + 2\pi)$ له راستیدا، بۆیه $\ln(z) = \ln(|z|) + i(\theta + 2k\pi)$ ، بۆیه k ژماره یه کی ته وای k پووده دات، ئه وهش نهخشه یه کی فره به های ئاویتته یه (Multivalued function). نمونه یه کی تر جیاواز له مه، بریتیه له ره کی دوو جای Z : \sqrt{z}

یه کینک له پووهکانی ریمان که له م وینه ی خواره وه نیشاندراره، نهخشه فره به هایه که ی؛ لۆگاریتمی سروشتیه، که فره به ها

سروشستییه کانی سپردراوه ته وه به هوی جیاکردنه وهی لقه جیاوازه کانی لۆگاریتمه که. ئەگەر بیت و به دەوری ستونی ناوه نده که یه وه بجولین به یه کفره-خول، واته 2π ، ئەوه ناگه پینه وه هه مان شوینی خۆمان، واته ئەو شوینی لێیه وه دهستان به جووله کرد، وهک چون له پرووتهخت دهگهینه وه هه مان شوینی خۆمان، بۆیه ئەمه وا له لۆگاریتم دهکات بیته نهخشه یه کی تاک به ها له سه ر پوهه ک. تیۆریه گشتیه که ی پوهه کانی پیمان پیشانی دهات که چون نمونه ی زیاتر و ئالۆزتر دروسته کریت له سه ر پرووتهختی ژماره ئاویته کان بۆ دروستکردنی نهخشه تاک به ها لێکجیاوازه کان.



نواندنی یه کیک له پوهه کانی پیمان

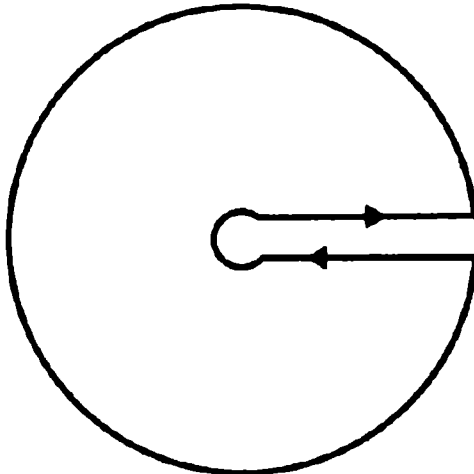
تهواوکاری ئاویته

Complex integration

وهک چۆن داتاشراوه مان هه بوو له مهه نهخشه ئاویتهکان، به هه مان شیوه تهواوکاریشمان ههیه له هه مبهه نهخشه ئاویتهکان. تهواوکاری نهخشه ئاویتهکان به دریزیایی پیرهوی - path له پووتهختی ژماره ئاویتهکان له گهه تهواوکاری هیلای پیکدهچن، بهلام له باری ئاهووتهی دوو په هندی. تهواوکاری نهخشه ئاویتهکان ئهجامی سه رسورهینه زمان ده داتی کاتیک تهواوکاری له هه مبهه چه ماوهیهکی داخراو ده دۆزینه وه.

بۆ نمونه، تهواوکاری نهخشه ی شیکارهیی ئاویتهکان (Analytic function)، واته ئه وه نهخشانهی له هه موو پووتهختی ژماره ئاویتهکان توانای داتاشراوی ههیه و بهره وامن، ئهوا تهواوکارییه کهی دهکاته سفر له دهوری چه ماوهیهکی داخراو (به هزی بیردۆزی کۆشییه وه). ههروهها دهتوانین تهواوکاری بۆ ئه وه نهخشانهش بدۆزینیه وه که به هزی زنجیره ی لورنت نووسراون، واته ئه وه نهخشانهی له خالیک یان له چند خالیک کیشه یان ههیه، بۆیه له و زنجیره ی تهواوکاری سه رجه م به شه شیکارییهکان دهکاته سفر، بهلام جگه له وه به شه ی که ئه وه خاله ی له خۆگرتوه که کیشه ی بۆ نهخشه بنه رتهیه که دروستکردوه pole واته Z^{-1} . بۆ چاره سه ری ئه مهش ئه وهیه که تهواوکاری ئه وه پادهیه دهکاته $\ln(z)$. گۆرانیکاری له $\ln(z)$ به دهوری چه ماوهیهکی داخراو کاتیک

گۆشه که به 2π دهجولیندریت، ئه وه دهکاته $2\pi i$ ، بۆیه ئه وهی دهستمان دهکاویت بریتییه له $a_{-1} 2\pi i$. ئه و کۆلکه یه a_{-1} ، پیسی دهوتریت نیشتوو-کتن (residue)، بۆیه تهواوکاری نهخشه ئاویتکه به دهوری چهماوه داخراوه که دهکاته: $2\pi i$ لیکدانی کۆی نیشتوووه کانی نهخشه که به هۆی چهماوه داخراوه که.



چهماوه یه کی نمونه یی له تهواوکاری نهخشه ئاویتکه کان له پرووتهختی ژماره ئاویتکه کان، بۆ هه ژمارکردنی تهواوکاری نهخشه یه کی راستی به هۆی میتودی تهواوکاری ژماره ئاویتکه کانه وه ده نوینیت.

کۆمهلهی ماندیلبرۆت

The Mandelbrot set

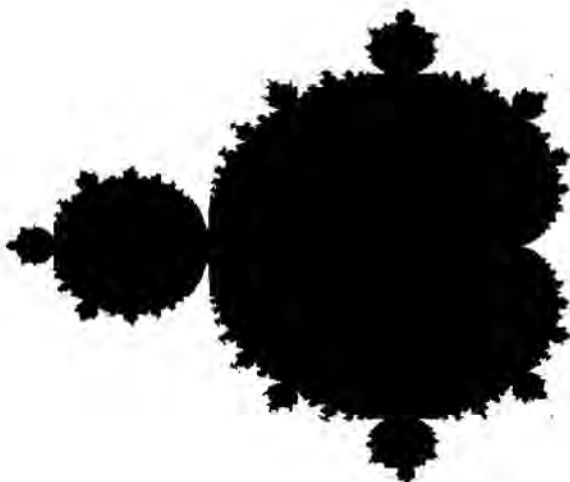
کۆمهلهی ماندیلبرۆت⁸⁹ بریتییە لە کۆمهلهیهک لە ژماره ئاویتەکان که لە ئەنجامی لیکۆلینهوهی سیستههه جوله‌داره‌کان (Dynamical system) سه‌ره‌له‌دات. ئەو کۆمهله‌یه‌ش فرکتالیک پکیده‌کێن. کۆمهله‌ی ماندیلبرۆت له‌گه‌ل ئەوه‌ی زۆر جوان و سه‌رنج پراکیشه‌، به‌لام پیکهاته‌یه‌کی زۆر قوول و ئالۆزی هه‌یه. وتمانه‌ ئەو کۆمهله‌یه‌ بریتییە له ژماره ئالۆزه‌کان C کاتیک له‌ خالی بنه‌رته‌ $z_0 = 0$ نه‌خشه‌ی $z_{n+1} = C + z_n^2$ لیکدوورکه‌وه‌ نه‌ییت (Diverge) کاتیک ئەو نه‌خشه‌یه‌ دووباره‌ و دووباره‌ ده‌کرێته‌وه‌ به‌ جیگرکردنی نرخیک $z_1 = c$ و به‌گۆرانی Z له‌ نه‌خشه‌که‌. ژماره‌یه‌کی ئالۆز له‌ ژیر کۆمهله‌ی ماندیلبرۆت، زانیاریمان ده‌داتن له‌ هه‌مبهر کۆمهله‌ جولیاکه‌ی. وینه‌ی کۆمهله‌ی ماندیلبرۆت که له‌ خواره‌وه‌ نیشانده‌راوه‌، وینه‌یه‌کی دروستکراوی ژماره‌یه‌ به‌هۆی پیدانی چه‌ندین نرخ به‌ C . سنوره‌کانی کۆمهله‌ی ماندیلبرۆت، وه‌کوو چه‌ماوه‌یه‌کی داخراوه‌، که پروکاره‌که‌ی فراکتاله‌. کۆمهله‌ی ماندیلبرۆت یه‌که‌م جار له‌لایه‌ن ماتماتیکزانیک به‌ ناوی "پیتز فاقو" که له‌ بواری شیکاری ئاویتەدا کاری ده‌کرد له‌ سالی 1905 پیتاسه‌ کرا.

⁸⁹ بیئۆیت ماندیلبرۆت (1924 – 2010) ماتماتیکناسیکی داهینه‌ر بوو که له‌ کۆمهله‌ی ناوی بی ئیم زانا بوو، به‌ بابی جیۆمه‌تری فراکتال ناسراوه‌. ئیستا ئەم زانسته‌ ماتماتیکیه‌ له‌ بواره‌کانی ئابوری، بۆرسه‌، ئەسترونۆمی و کۆمپیوتەریدا به‌کارده‌یت. (شیرکو ره‌شید قادر).

هاوکات ماتماتیکزانیکي تر به ناوی 'ژولیا' فانکشنه ریژه بیه کانی له سه ر رووتهختی ناویته دا تاوتوی ده کرد. نه مروکه کومه له کانی ژولیا-جولیا له فراکتاله هره ناسراوه کانی. نه م تووژینه وانه به شیوه بیه کی پرش و بلاو له نارادابون هه تا سالی 1979 . که 'بینویت ماندیلبروت' له وتاریکدا:

(Fractals: Form, chance and dimension)

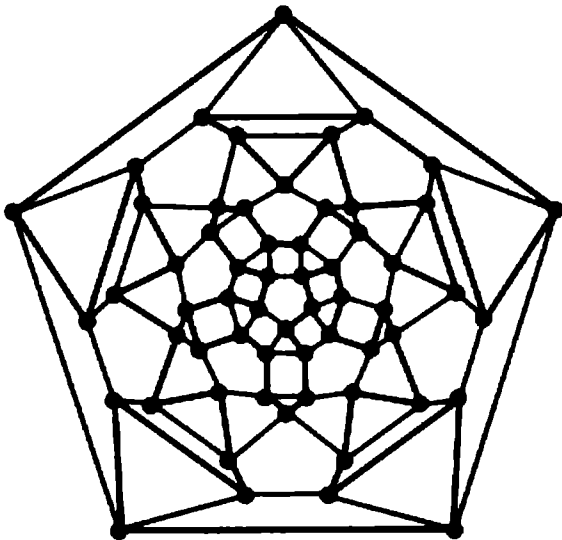
نه م چه مکانه ی له گهل زور بابه تی تر له ژیر ناوی نه اندازه ی فراکتال پیشکش کرد.



به‌شبی ده‌یهم

سازان

Combinatorics



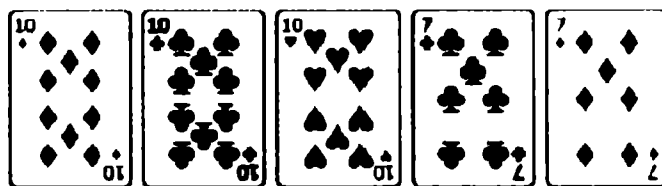
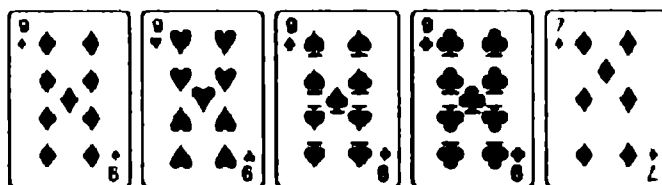
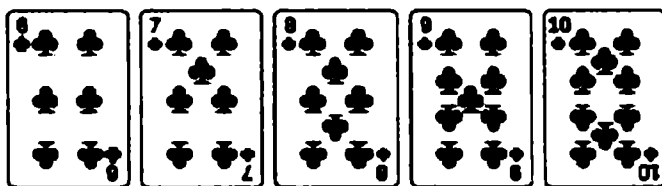
تیۆری سازان

Combinatorics theory

تیۆری سازان، یه کیکه له لقهکانی بیرکاری که مامه له گه له ژماردن دهکات. وهک یاریزانهکانی یاری پۆکه، که به هزریانه نهگه رهکان لیکهده نهوه بۆ یاریزانهکانی بهرامبهریان که ئایا دهکریت نهو کاخهزهی له ناو دهستیتی؛ چیی بیت. تیۆری سازان دهبارهی دۆزینهوهی ژمارهیی شتهکانه (objects)، وه یان نهگه ری پوودانی پووداوینک، به بی هه بوونی خشتهی هه موو ده ره نهجامه جیاوازهکان.

سازان بابهتیکی گرنه و بگره به دلی زۆریک له بابهتی گرنهی وهک: تیۆری نهگه، ئۆپتیمازیهشن و تیۆری ژمارهکان ناسراوه. واته نهمه زیاتر وهک هونهریک وایه، ههروهها نهگۆر و ژمارهیی ئۆپله ریش دهگریته خۆی له هه ندیک پوهوه. دهست و پهنجهیی 'کارل گاوسی' لهو لقهی بیرکاری شوینی ههیه، که بهم دوایانهش پۆل ئیدروارس (Paul Erdős) کاری تیدا کردوه.

له کۆندا تیۆری سازان وهسف دهکرا وهک نیزامیک به بی بوونی تیۆرییهک، واته ته نیا رهنگدانهوهی چەند تهکنیک و میتۆدیک بوو، بهلام دواتر گۆرانی به سهرداهاتوو و پیشکوت، تا گه یشته نهوهی که نیستا ههیه.

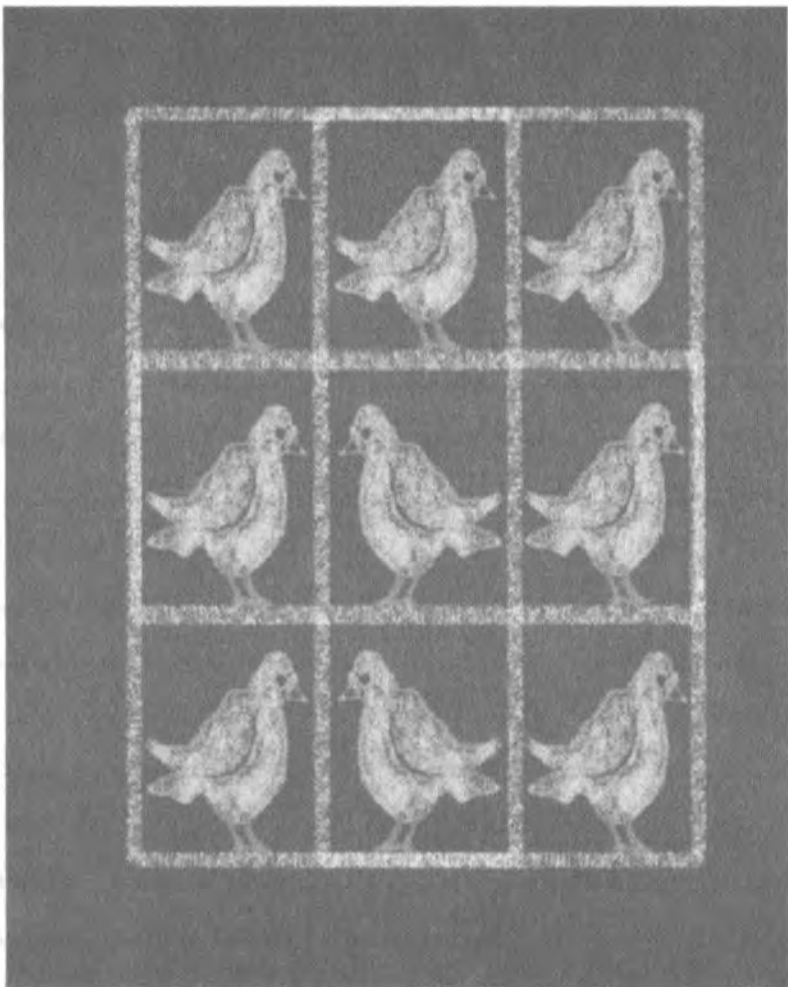


رێسای هیلانهی کۆتر

The pigeonhole principle

رێسای هیلانهی کۆتر؛ بیرۆکهیهکی ساده، بهلام گرنگیهکی زۆر له زۆر بوارد. وا بینه پیش چاوت که 101 کۆترت هیه، ئەگەر بیت و تهنیا 100 هیلانته ههبيت بۆ ئهوهی هەر کۆتر و له هیلانهیهک دابنێی، ئهوه دیاره دهبيت په کیک لهو هیلانانه دوو کۆتری تیدا دابنێی! واته ئەگەر هات و ژمارهی کۆترهکان له ژمارهی هیلانهکان زیاتر بوو، ئهوه به لایهنی کهم هیلانهیهک ههیه که دوو کۆتر لهخۆ دهگریت، به زمانه بیرکارییهکه، ئەگەر بیت و n خانهت ههبيت و m شتت ههبيت، کاتیک $m > n$ ، ئهوه به لایهنی کهم خانهیهک زیاتر له شتیک دهگریته خوی. ئهو رێسایه دهگریته له زۆر بارودۆخ به کاربیت و جیبهجی بگریته. بۆ نمونه ئەگریته به هۆی ئهو رێسایه شتیک به لایهنیته ئهویش، ئەگەر شاریک 1,000,000 کهسی نا-کهچهل ههبن، ئهوه به لایهنی کهم دووکهس ههت که ههمان ژمارهی تاله مووی سهریان ههیه، واته ژمارهی تاله مووهکانی دووکهسی ئهو شاره وهک پهکن. راستی ئهمهش لهوهوه سهراچاوی دهگریته که کهسیکی ئاسایی نزیکه 150,000 تاله مووی لهسهاری ههیه، وا دانن کهسیکی ئەگەر مووهکانی سهاری زۆر زۆرهکهی 900,000 بیت، بۆیه ئیستا 1,000,000 کهسمان (شتت) ههیه m ، وه 900,000 ئەگهاری تاله مووهکانی سهاری کهسیکه (خانه) بۆیه دهبینن که $m > n$ واته ژمارهی دانیشتوانه که زیاتره له ژمارهی مووهکانی سهاری کهسیکی ئاسایی، بۆیه

له ریگای ئەم ریتسایهوه دهگهینه شهوی که دوو کەس هەن بە دلتیایی ژماره‌ی تاله مووه‌کانی سه‌ریان هینده‌ی یه‌که.



بیردۆزی گرین-تاو

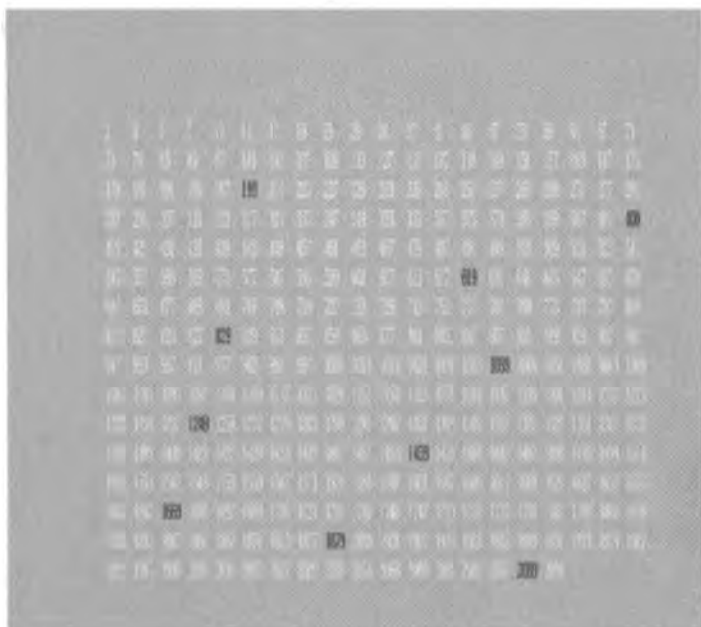
The Green-Tao theorem

بیردۆزی گرین-تاو، سەر به تیۆری ژماره‌کانه که له لایین هاردوو بیرکاریزان 'گرین و تاو' له سالی 2004 سهلمیندار. ده‌قی بیردۆزه‌که ده‌لیت: له ناو کۆمه‌له‌ی ژماره‌ خۆبه‌شه‌کان، ده‌کریت ده‌سته-هه‌هه‌یه‌که‌وه‌ی ژماره‌یه‌کی خۆبه‌شه‌ی یه‌که‌به‌دوای یه‌که‌به‌دوای (progressions) بدۆزیته‌وه، که مه‌رجیش نییه‌ ئه‌و ده‌سته ژماره‌ خۆبه‌شه‌ به‌ دوای یه‌که‌وه‌ بن. واته ئیستا بۆ ژماره‌کانی 3,5,7 دیاره ئه‌م سێ ژماره‌یه‌ که خۆبه‌شن و جیاوازی نیوان ته‌نیا دوو یه‌که‌یه، واته ئه‌و سێ ژماره‌یه‌ به‌یه‌که‌وه‌ ریسایه‌کیان هه‌یه (یه‌که‌به‌دوای یه‌کیکیان هه‌یه). بۆ ژماره‌کانی تری وه‌ک: 5,11,17,23,29 بۆ ئه‌و چهند خۆبه‌شه، دیسانه‌وه ریسایه‌کی تر هه‌یه، که ئه‌م ریسایه‌ ته‌نیا بۆ ئه‌و چهند ژماره‌یه‌ له‌باره، ریساکه‌ش ئه‌وه‌یه‌ که له 5 ده‌ست پیده‌کات، دواتر ژماره‌ی به‌ده‌ست هاتو له‌گه‌ل 6 کۆده‌کریته‌وه، به‌م شیوه‌یه:

$$5.5 + 6 = 11.11 + 6 = 17.17 + 6 = 23.23 + 6 = 29$$

لیره‌وه ئه‌م ریسایه زیاتر کارناکات. بۆیه ئه‌و یه‌که‌به‌دوای یه‌که‌ کورتانه له ناو ژماره‌ خۆبه‌شه‌کان له میژه زانراوه، به‌لام پێشتر ته‌نیا

کۆنجیکته‌ریک⁹⁰ بووه، تا 'گرین و تیۆ' سه‌رکه‌وتوانه ئهم پرسه‌یان له 2004 یه‌کلا کردوه له ده‌قهری سیستمه جوله‌داره‌کان و تیۆری ژماره‌کان.



⁹⁰ کۆنجیکته‌ر ده‌قیکه، بونی راستی لیدیت، به‌لام له‌گه‌ل ئه‌وه‌ش هیچ سه‌لماندنیک راستی پرسه‌گه‌ی یه‌کلا نه‌کردوته‌وه. کۆنجیکته‌ر که سه‌لمیندرا، ده‌بیته بیردۆز.

پرده کانی کونینگسبرگ

The bridges of Königsberg

یه کینک له کیشه هر گوره کانی سه ده کانی رابردوو، بریتیبوو له کیشه ی حوت پرده کای کونینگسبرگ. نهو کیشه یه بووه هوی نهوه ی که لقیکی نوی له بیرکاری سه رئاو بکه ویت به ناوی تیوری هیلکاری - Graph theory. له سه ده ی هه شه ده هم، له شاروچکه ی کونینگسبرگ له بروسیا که ده کاته کالینینگرادی ئیستای پرووسیا، حوت دانه پرد له نزیک یه کتر هه بوون، که نهو پردانه چوار پارچه ی نهو ناوچه یان به یه کده گه یانند، که به هوی پروبار له نیوان نهو پارچه خاکانه، نهو 7 پرده دروستکرا بوون. پرسیاره که نهوه بوو: ده کړیت به سه ر هر حوت پرده که برؤیت، به لام دوو جار به سه ر هیچ پردیک نه برؤیته وه؟ به واتایه کی: نه گه ر هر پردیک بؤت هه بیت یه کجار به سه ریدا برؤیت، نهوه ده توانی هر حوت پرده که ببریت؟ ئیتر ده توانی و ناتوانی مقومقوی زور و تاقیکردنه وه ی زور نه بووه هوی نهوه ی نهو پرسیاره به شیوه یه کی ورد وه لام بدریته وه، وه بیرکردنه وه ی لی ئاسان نه بوو، به لام تا سالی 1735 بیرکاریزان لیونارد ئویله ر (Leonhard Euler) سه لماندی که نهوه مهاله! واته ناتوانی هر حوت پرده که ببریت بی نهوه ی هیچ پردیک دووباره نه که یته وه. به شیوه ی په تی (Abstract) ده کړیت بلین، هر یه کینک له پارچه خاکه کان بریتین له سه ریک (Vertex) یان خالیک (Point)، نهو خالانه به هوی راسته هیله وه - لیوار به یه ک به سه تراونه ته وه (Edge)، که پرده کان ده نویتن،

واته ئیستا پارچه خاکه کان بریتین له چند سه ریک و پرده کان بریتین له راسته هیلێ نیوان خاله کان، به لام لیسه دووری (Distance) کارمان پیسی نییه و گرنگی پینادهین. بۆیه بیروکهی نهخشه و GPS له سه ر ئه م لقه ی بیرکاری دامه زراوه، که شوینی تو له نهخشه که به خالیک پیشانده دریت، که نه و شوینه ی تو ده ته ویت بۆی بچیت به راسته هیل یان به چه ماوه (Curve) پیشان ده دریت، جگه له مهش له دیزاین کردنی تو پره کانی ناو و کاره با و دروستکردنی خهریته ی ئامیره کان، گشتیان سوود له تیوری هیلکاری-گراف وهرده گرن.

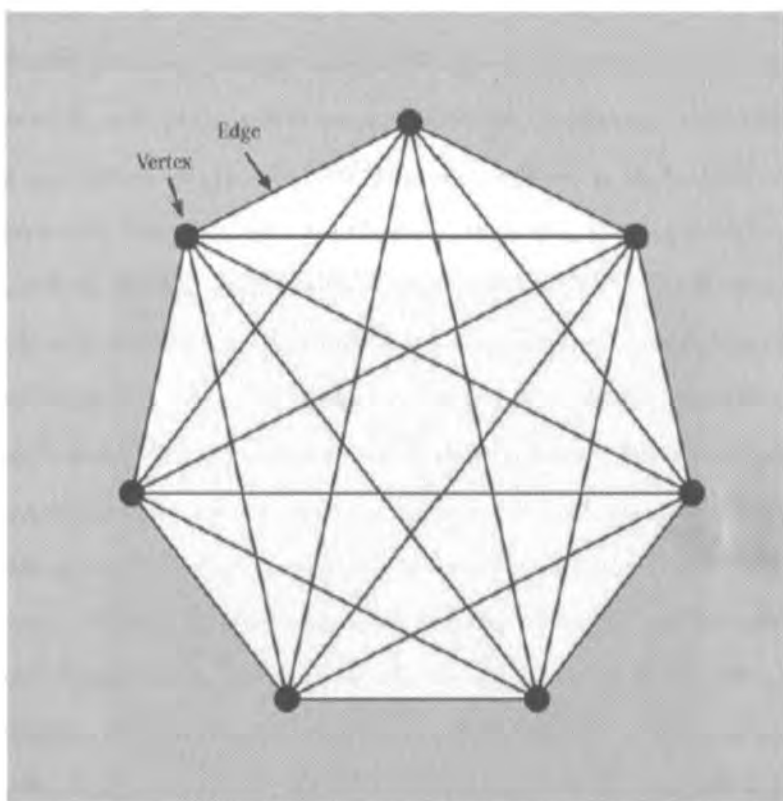


تیوری هیلکاری-گراف

Graph theory

تیوری هیلکاری، بریتیه له لیکولینه وه له هممبهر پیکه یانندن (بهستنه وه). به پیچه وانه ی هیلکاری نه خشه کان که پیشتر باسمان کردووه، لیره هیلکاریه کان له کومه لیک خال-سر (Vertex) و هیل (Edge) پیکه اتون، که هیله کان خاله کان به یه که وه ده بهستنه وه. چند سهریکی به کبه دوا یه که که به هزی هیله کانه وه به یه که وه به ستراونه توه، پیی دهوتریت پچکه (Path). تیوری هیلکاری ده رگایه که بو چاره سهرکردنی زور کیشه، وهک چون له بابته ی پیشوو که کیشه ی پرده کان به هزی تیوری هیلکاریه وه چاره سهرکرا. هه ندیک جوری هیلکاری بنه هیلکاری (Subgraph) له خزی ده گریت، بنه هیلکاریش هه هیلکاریه که له ناو هیلکاریه کی تر. هه له تیوری هیلکاریه وه ده که یه ده رته نجامی زور سهرسورپه نهر، وهک یاسای ئویله له هممبهر چند پوه کان، که نه م پرسیایه په یوه هندییه کی توکمه له نیوان تیوری هیلکاری و لقیکی تری بیرکاری ده رده خات، نه ویش شوینناسی (Topology). تیوری هیلکاری کومه لیک جوری لی ده بیته وه، که ده تواندریت کرداره کانی وهک: ئاویته کردن، یه کگرتن... ئه مانه له خق بگریت، بو نمونه نه گه ر دوو هیلکاری یه ک بگرن چی به سهر دیت، وه یان نه گه ر دوو هیلکاری ئاویته ی یه کتر بگرین چیان به سهر دیت. نه م لقه ته نیا بیرکاریه کان پیی ئاشنا نین، به لکو فیزیکزانه کان، کیمازانه کان، زینده وه رناسه کان نه وانیش ئاشنا ی نه م

تیورییهن، چونکه له فیزیا و کیمیا، بۆ نواندنن بهنده ئایونییهکانی مادهیهک بهکار دیت، که ئەمانه گشتیان به هۆی تیوری هیلکارییهوه لیان تیندهکهین. نمونهی دیکه؛ ئیتتهرنیت و بلاوبوونهوهی به نیو شار و شاروچکهکان، ئەمانه گشتیان له ڕینگهی ئەم تیورییهوه گهشهی پێدهدریت.



بیردۆزی چوار رهنگه‌که

The four-color theorem

بیردۆزی چوار رهنگه‌که، یه‌کیکه له بیردۆزه هه‌ره جوانه‌کانی بیرکاری کلاسیکی. که ده‌قی بیردۆزه‌که ده‌لیت: که‌ترین ژماره‌ی رهنگ که پێوسته بۆ رهنگردنی نه‌خشه‌یه‌که، به‌و مه‌جه‌ی هیچ دوو ناوچه‌یه‌کی ته‌نیشت یه‌ک هه‌مان رهنگ وه‌رنه‌گرن، ئه‌وه به‌لایه‌نی که‌م چوار رهنگمان پێوسته. واته‌ ئه‌گه‌ر بیت و بمانه‌وئ که‌په‌که‌کانی شاری هه‌ولیر له‌سه‌ر نه‌خشه‌ ته‌نیا به‌ رهنگ لیکیان جیا‌به‌جیا‌یه‌وه و هیچ دوو که‌په‌کیکی ته‌نیشت یه‌ک هه‌مان رهنگ وه‌رنه‌گرن، ئه‌وه به‌لایه‌نی که‌م چوار رهنگمان پێوست ده‌بیت. وه‌ک له‌ وینه‌که‌ دیاره. دووباره‌ ده‌توانین ئه‌م باسه‌ له‌ ریگه‌ی تیۆری هیلکاری داب‌پێژین و شیکردنه‌وه و سه‌لمینه‌ی بۆ بکه‌ین، ئه‌ویش هه‌ر ناوچه‌یه‌ک به‌ سه‌ریک (vertex) داب‌نین، وه‌ نابیت هیچ دوو سه‌ریکی دراوسی هه‌مان رهنگیان هه‌بیت، کاتیک ئه‌و سه‌رانه‌ به‌هۆی هیله‌وه‌ پیکه‌وه به‌سه‌تراونه‌ته‌وه و سه‌نوریک دروس‌تده‌که‌ن. هه‌ر وه‌ک گرفتیک شیکردنه‌وه‌ی که‌لیک کیشه‌ی له‌م شیوه، وامان لینه‌کات هانا بۆ کۆمپیوته‌ر به‌ریز و له‌وئ سه‌یری رووداوه‌کان بکه‌ین. له‌ سالی 1980 دوو‌کس به‌ناوه‌کانی 'کینس ئه‌پیل و ولفگانگ ها‌کین' (Kenneth Appel and Haken Wolfgang) ئه‌و راستیه‌یان پێشاندا به‌هۆی به‌کارهێنانه‌ی کۆمپیوته‌ره‌وه بۆ پشکینه‌ی هه‌ر یه‌ک له‌ 2000 یان زیاتر باری شاز و

جیاواز. دواچار سه لماندنه فورماله که ی له سالی 2005 په کلابووه و نه و
پرسه به کوتایی گیشته.

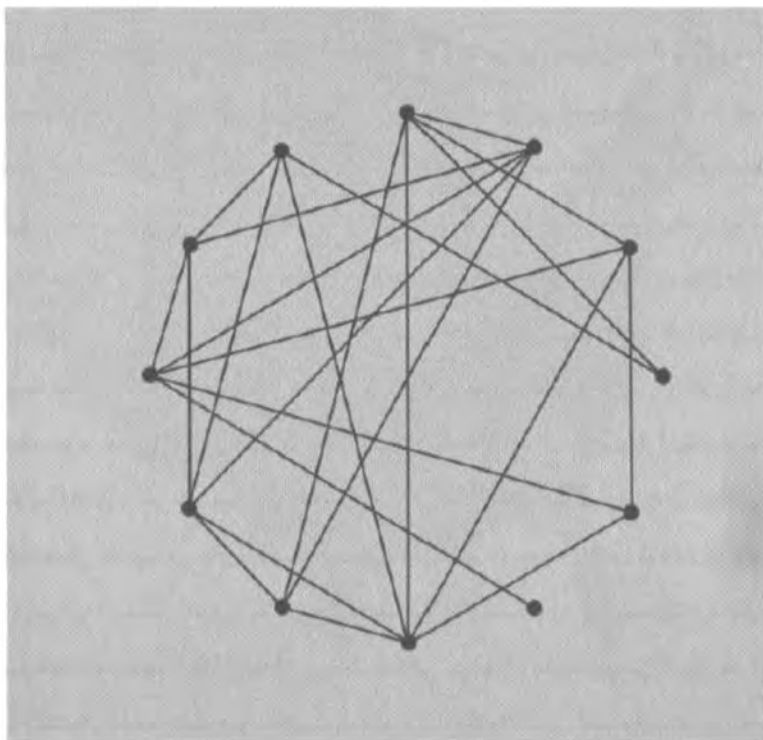


هینکارییه هه‌رهمه‌کیه‌کان

Random graphs

هینکارییه هه‌رهمه‌کیه‌کان (له گۆتره) به‌کێکه له و هینکارییه‌انی که نه و هیلێی سه‌ره‌کان به‌یه‌که‌وه ده‌به‌ستیتته‌وه، به شیوه‌یه‌کی هه‌رهمه‌کی دابه‌شکراون بێ هیچ مه‌به‌ستیک. بۆ دروستکردنی هینکاری له‌م شیوه‌ش، وادانی کۆمه‌له‌یه‌ک له سه‌رمان هه‌یه N ، بۆ هه‌ر دوو سه‌ریک له و کۆمه‌له‌یه هیلێک ده‌کیشین به‌ ئه‌گه‌ری P یان ئه‌گه‌ری نه‌بوونی هیچ هیلێک له‌ نێوان سه‌ره‌کان به‌ ئه‌گه‌ری $1-P$. به شیوه‌یه‌کی تاییه‌تی، له هینکاری هه‌رهمه‌کی، هه‌میشه‌ رینچه‌که‌یه‌ک هه‌یه که هه‌ر دوو سه‌ریک به‌یه‌که‌وه ده‌به‌ستیتته‌وه، بۆیه به‌و جووره هینکارییه ده‌وترین هینکاری پینکه‌لکاو (Connected graph). هه‌روه‌ها ئه‌گه‌ر دوو کۆمه‌له‌ی کۆتادارمان هه‌بیت، هه‌ر کۆمه‌له و چه‌ند سه‌ریکی تیندا بیت، ئه‌وه سه‌ریک هه‌یه که به‌هه‌موو سه‌ره‌کانی ناو به‌کێک له کۆمه‌له‌کان به‌سه‌راوه‌ته‌وه که به کۆمه‌له‌که‌ی تر نه‌به‌سه‌راوه‌ته‌وه. ئه‌وه رینگه‌یه که هینکاری هه‌رهمه‌کی به شیوه‌یه‌کی نمونه‌یی په‌ره ده‌سه‌نیت و دروست ده‌بیت، له‌گه‌ل ئه‌وه‌ش، تا N زیاتر بیت، ئه‌وه سه‌رنج راکیشتر ده‌بیت، به‌ پینچه‌وانه‌وه تا N بچوکیته‌وه، ئه‌وه هینکارییه‌که و به‌شه‌کانی بچوک ده‌بیتته‌وه و هیچ خولێک له هینکارییه‌که بوونی نابیت. لێره رینگه‌یه‌کی کورت هه‌یه له‌ مه‌ر تاییه‌تمه‌ندی لکاوه‌یی (connectivity)، ئه‌ویش ئه‌گه‌ر p بچوکتی بیت له

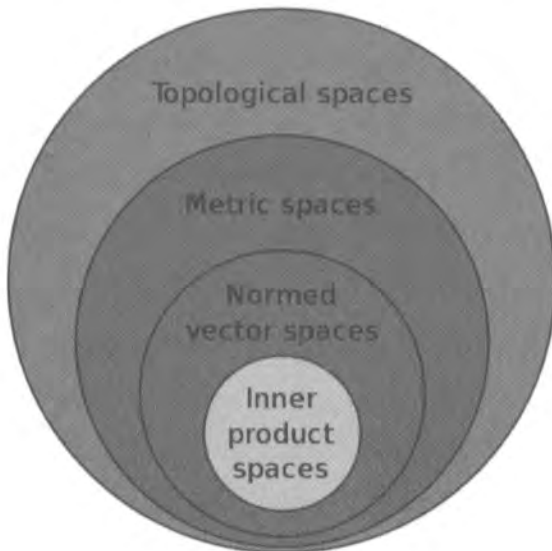
$\frac{\ln(N)}{N}$ شهوه سه ریکمان ده بیست له هیک ارییه که به هیچ سه ریک
 نابسته ریته وه (Isolated vertex).



بەشى يازدەھەم

ئاهووتە و توپۇلۇجى

Space and Topology



ئاهووته مه تریه کان

Metric spaces

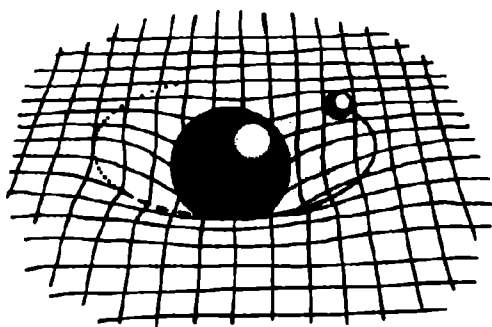
ئاهووته مه تریه کان، بریتیه له یه کیک له بابه ته شیکردنه وه بیه کانی بیرکاری، که تیدا وه سفی دووری نیوان دوو شتمان بۆ ده کات. واته بۆ ئه وهی باسی دووری نیوان دوو شت بکه یین، ئه وه ده بیته پیوه ریک هه بیته بۆ ئه وهی ئه و دووریه ی پی وه سف بکه یین یان بدوزینه وه. ئاهووته مه تریه کان چند جۆریکیان هه یه، هه ر یه که و به جۆریک پیناسه کراوه، باوترین ئاهووته ی مه تری، که ناسراوترینه پیی ده لین: ئاهووته ی ئیقلیدی دوو په هندی (Usual metric space)، که له م ئاهووته یه دووری نیوان دوو خال X و Y بریتیه له دریزوی ئه و راسته هیله ی که ئه و دوو خاله به یه که وه ده به سستیه وه. شتیکی تر که لیره گرنگه، ئه ویش ئه و کۆمه له یه ی که ئه و ئاهووته یه ی له سه ر پیناس ده که یین چیه، وه چون پیناسه ی ده که یین. ئاهووته ی ئیقلیدی ئه و ئاهووته یه که له گه ل ژیا نی پوژانه ی ئیمه ته واو یه که ده گرته وه، چونکه وه ک نمونه له هه ندیک ئاهووته ی مه تری (Discrete) به پیی پیناسه که ی ده لیت: دووری نیوان من و خالم له شاروچکه ی کۆیه؛ که له دوو شاری جیاوازین، ئه وه دووری نیوانمان بریتیه له 1! ئه وهش له راستی ئه گه ر سه یه ر بکه یین مه حاله، بۆیه ئاهووته ی ئیقلیدی ئه و ئاهووته یه که له گه ل ژیا نی ئیمه، چون و هاتتمان یه که ده گرته وه، به شیوه یه کی گشتی، مه تریه که d و کۆمه له یه که X پیا ن دهوترین ئاهووته ی مه تری، ئه گه ر بیته و d

نه خشه یه کی راستی بیت له جووته ریکخراوی (x, y) و نه و سنی مهرجی خواره وه جی به جییکات:

1- پیوسته دووری نیوان هر دوو خالیک، گه وره تر بیت له سفر، وه نه گهر دووری نیوان دوو خال کردیبه سفر، نه وه نه گهر و ته نیا نه گهر ده بیت نه و دووخاله یه کسان بن. (واته ناکریت بلین: من 2- متر له تو دوورم!)

2- دووری نیوان x و y جیاوازی نه بیت له گهل دووری نیوان y و x . (نه گهر دووری تو له من دوو متر بیت، حتمن دووری من له تو ش هر دوو متره)

3- بۆ هر خالیک z دووری له نیوان x بۆ y بچو کتره یان یه کسانه به 'دووری نیوان x و z + 'دووری نیوان z و y . (بۆ نمونه نه گهر تو له مالی خوتان بچیته بازار، نه وه نه و دووریبه له نیوان مالی نیوه و بازار هیه، بچو کتر یان یه کسان ده بیت نه گهر بیت و تو له مالی خوتان بچیته پارکیک z ، پاشان له پارکه که وه بچیته بازار)

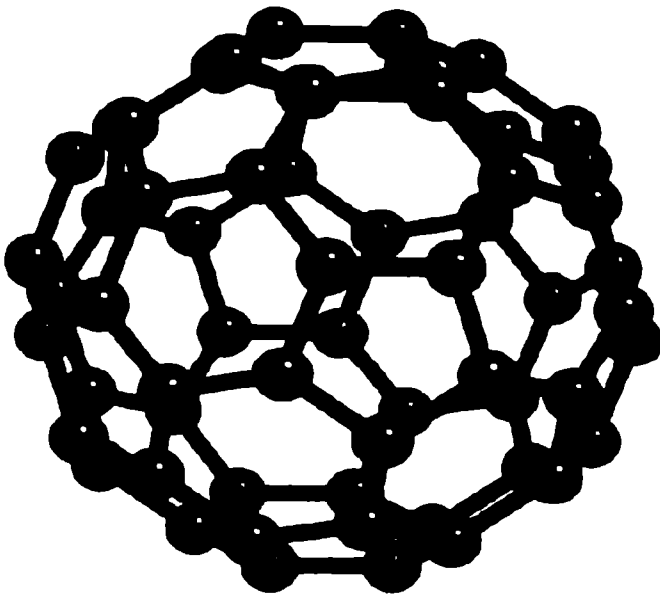


راگیرکه ره کان

Geodesics

راگیرکه، بریتیه له کورترین پیچکه له نیوان دوو خال له پوهه کی چاماو هی. وهک چوڼ ده زانین له پوهه کی تهخت کورترین پیچکه کی نیوان دوو خاله به راسته هیل به یهک ده گه یه نین، به واتایه کی تر، له پوهه کی تهخت، کورترین پیچکه بریتیه له راسته هیل. به لام کاتیک پوهه کی چاماو همان هه بیت، نه وه کورترین پیچکه له نیوان دوو خالی نه و پوهه چه ماوه یه، بریتیه له هیلیکی چه ماوه یی، دوزینه وه ی نه و هیله چه ماوه یه به هوی نا هوونه یه کی مه تر یه وه ده بیت. باوترین راگیره که ری نا-ثقلیدی بریتیه له بازنه! وهک هیله کانی یه کسانی گوی زهوی و پیچکه کی فرینی فرۆکه. له زور باردا، راگیرکه ره کان ده تواند ریت دیار بکریت و دور یه که یان بدوزر یته وه به هوی ته او کار یه وه، وهک چوڼ نه و هاو کیشانه ی نه خشه و داتا شراوی نه خشه کانی تیدایه وه سفی نه و ریگایه (پیچکه یه) ده کهن که له نیوان دوو شتدا هه یه، هر نه مهش بوو که راگیرکه ره کان وه سفی تیوری یه که ی نه نشتا ینان کرد، واته نه نشتا ین له مه ر تیوری کیشکردنی گشتی، راگیرکه ره کانی به کار هی ناوه، کاتیک راگیرکه ره کان نه و پیچکانه پیشان ده دات که ته نیک له بوشای-کات چوڼه، وه چوڼ نه و ته نه بوشای-کات ده چه مینیته وه. بویه له راستیدا کورترین پیچکه کان له ناو بوشایدا، بریتین له راگیرکه ره چه ماوه یه کان، که ده توانن نه و خولانه وه ی هه ساره کان پوونبکه نه وه که به دوری خور

دهسورینهوه و، هر بههوی نهو راگیرکهره چهماوهییانه توانرا وهسفی
شکانهوهی رووناکی بکریت کاتی رووناکی به نزیک تهنیکی بارسته زور
کهورهی وهک کونه رهشکان تپهر دهبیت.

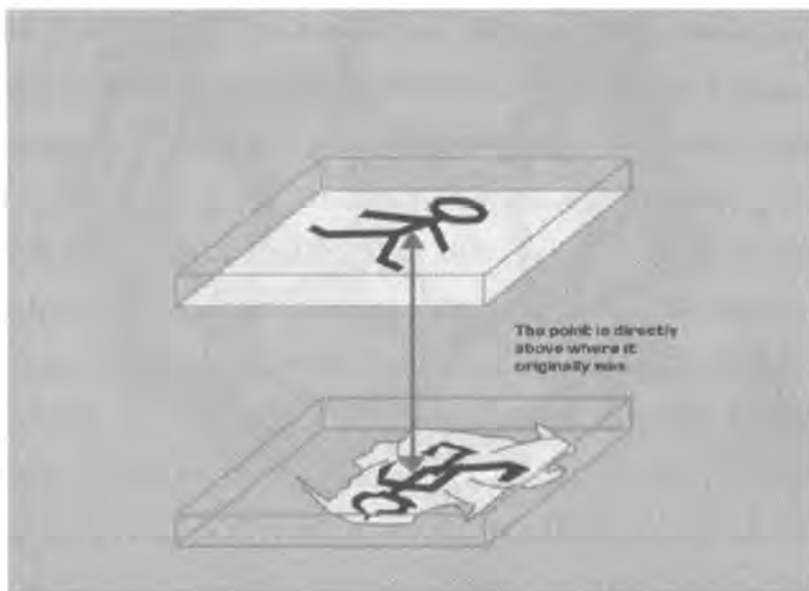


بیردۆزی خالی نه گۆر-جیگیر

Fixed point theorems

بیردۆزی خالی نه گۆر-جیگیر، یه کیکه له بیردۆزه جوانه کانی بیرکاری. ئه و بیردۆزه له هه مبه ر نه خشه یه ک، که چند مه رجیکه هیه، ئه گه ر له و نه خشه یه هه بیت، ئه وه ئه و بیردۆزه به سه ر ئه و نه خشه یه جیبه جی ده بیت. ئه ویش ئه وه یه: نه خشه یه ک له ژیر ئه و چند مه رجه ئه گه ر لیتی بیته دی، ئه وه به لایه نی که م خالی ک هیه که هه میشه به جیگیری ده میتته وه له شیوه گۆرکینی و جیگۆرکینه کان، واته خالی ک هیه که $f(x) = x$. یانی کاتیک ئیمه دین شیوه ی ته نیکه ئه ندازه یی ده گۆرین، ئه وه خالی ک هیه له و ته نه که پیش گۆرپان و دوا ی گۆرپانی شیوه که هه ر وه ک خۆی ده میتته وه! بۆ تیگه یشتتی باشتر له مه، وادانی کاغه زیکت هیه و وینه یه کی له سه ره (وه ک ئه و وینه ی دراوه) ئه گه ر بیت ئه و کاغه زه له به رگیراوه (کۆپی) لئ هه لگرین، پاشان یه کیکه یان ده ق ونوشت بکه ینه وه له ناو ده ستمان، پاشان هه ر هه مان ئه و کاغه زه بکه ینه وه، ئیستا ده بینین که ئه و کاغه زه چرچو لۆچی تیکه و ته وه وه ک سه رته تا نیه، ئیستا ئه و په ره ی چرچو و لۆچمان کرد له گه ل له به رگیراوه که ی هه ر هه مان کاغه زه به راورد بکه ین، ده بینین شیوه که ی گۆراوه، به لام ئه م بیردۆزه ده لیت، به لایه نی که م خالی ک هیه له و کاغه زه هیچ گۆرپانی به سه ر دانه اتوره! مه رجه کانیش که له نه خشه که پیوسته هه بیت، ئه مانه ن: نا کریت په ره که بیرین و دواتر سه یری ئه و کرداره

بکین، بویه مەرجه نهخشه که بهردهوام بیت و پچرانی تیدا نه بیت، پیوسته شیوه گوراوه که له سنووری قهباره و پیوانی شیوه رهسه نه که ی خوی لانهات، واته پیوسته نهخشه که نهخشه یه کی داخراو شیشدراو⁹¹ بیت. ئەم بابته له زور بوار به کاردیت و سوودی لئ وهرده گیریت، به تایبته له مایکروئیکوتومییک، وه ههروهه له سهلماندنی هه بوون و تاوانی (Existence And Uniqueness) له شیکاره کانی بابته هاوکیشه جیاکاریه کان (Differential equations)، ههروهه له وانیه ، شیکردنه وهی ژماره بیانه (Numerical analysis).



⁹¹ خه لکی ههولیز زور جار له بری وشه ی داخراو، وشه ی شیشدراو به کاردینن.

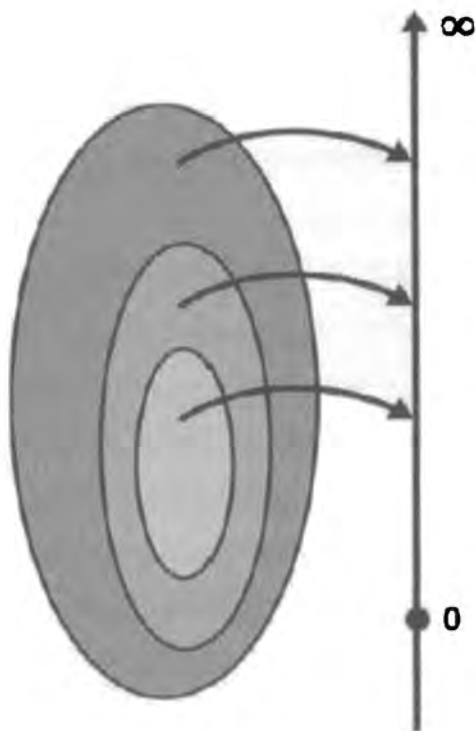
تیوری پیوان

Measure theory

تیوری پیوان، یه کینکه له تیوره گرنه کانی بیرکاری، که تیدا وه سفی قهبارهی (size) کومه له کانمان بۆ دهکات و دهیانپیویت، ههروهها بیرۆکه کانی وهک: دریژی، رووبه یان قهباره (volume) دهگشتیتیت. کاتیک کومه له یهک دهپیوریت، ئهوه ژماره یهک دیاری دهکین، جا ئه و ژماره یه بۆ کیشه که یهتی، یان بۆ بهرزیه که تی یان هه رشتیکی تر. تیوری پیوان له بابتهی تهواوکاری لیبیک گرنه، چونکه تهواوکاری لیبیک پشت نهستوره به تیوری پیوان، وه پیوان له تهواوکاری لیبیک مه بهست له پیوانی کومه له یهک له ژماره. بۆ نمونه پیوانی به شه کومه له یهک، بچوکت یان یه کسان، ده بیته به پیوانی کومه له ره سه نه که خوی. بۆ نمونه: کومه له هه یه پیوانه که ی دهکاته سفر تنانهت ئه گه ر چش ئه و کومه له یه کومه لیک خالیسی تیدا بیته! بۆ نمونه: ئه گه ر شتیک یان ریسایه ک له سه ر کومه له یه ک راست بیته کاتیک ئه و کومه له یه پیوانه که ی سفر نه بیته، ئه وه ئه و ریسایه یان ئه و شته نزیکه ی بۆ هه موو دانه کانی ناو کومه له که راسته!

تیوری پیوان له هه ژمارکردنی رووبه ر به رینگای لیبیک رۆلی هه یه، رۆله که شی چاره سه ری ئه و کیشه انه دهکات که تهواوکاری پیمان له توانای دا نه بووه چاره سه ری بکات، بۆیه به هوی تیوری پیوانه وه، هه ژمارکردنی رووبه ر پیشکه وتنی به خوی وه بینسی. له کومه له کان وهک:

کۆمهلهی ژماره پێژهییهکان، پێوانی ئهو کۆمهلهیه دهکاته سفر!
(Measure of zero)



کومه نازدهکان و ناهوته توپولوژییکان

Open sets and topological spaces

کومه والاکان-نازدهکان، نو کومه لانن که هر دانه کی ناو کومه له که به جوړیک نزیکه له هر دانه کی تری ناو کومه له که. له ناهوته ی متری، کومه له ی نو خالانن که دورییان له خالیکی وه X به تهاوی بچوکتړه له ژماره ی کی بچوکی وه A ، نو نو کومه له ی کومه له ی کی نازده، که پنی دوتریت توپی نازاد (Open ball) له نیوه تیره ی A . بؤ نمونه: نه گهر له قوتابخانه ی که له پؤلی ی کی بنه رته ی هه مو قوتابییکان ته مینیان به به راورد به قوتابییک ته نیا چند پوژیک کی به یین بیت، نو به پؤله دوتریت پوژیک نازاد یان والا. چه مک و بابته ی کومه له ی نازاد، که رهسته ی که بؤ نو به ی بابته ی تری پی پیناسه بکین، وه یان بیروکی تری لیوه سه رئاوبخین. یه کیک له لقه کانی بیرکاری که بریتییه له توپولوژی که له سه ر بنچینه ی کومه له ی نازاد خه و خالی داړیژراوه. ناهوته ی توپولوژیانه، بریتین له کومه له ی کی بیرکاریانه که له سه ر بنه کومه له کانی کومه له ی که پیناس دهریت A ، که پینان دوترین کومه له نازده کانی ناهوته که، له کاتیک که نو کومه لانن له پینستر پیناسه کراوه نه که به هؤی بیروکی دورییه وه، چونکه له ناهوته ی توپولوژی شته کان توژیک جیاوازه، چونکه به هؤی کومه له ی نازاد؛ نیمه وه سفی ده روپشتی دانه کانی ناو کومه له که ده کین، به لام له

شاهوتی متری بهی دهورپشتی (Neighborhood) دانه کانی ناو
کۆمهله کوه بریاری ئوه دهدهین که کۆمهله یک نازاده یان نا.

له بیرکاریدا، ئەگەر کۆمهله یه کمان هه بێت X که $X \neq \phi$ وه τ
خیزانیک بێت له بنه کانی X ، ئوه τ پینی دهوتریت * توپۆلۆجی له سه
کۆمهله ی X ، ئەگەر هاتوو ئه و چند مەرجه ی خواره وه ی جی به جیکرد:

1- کۆمهله ی T ، ده بێت شاهوته ره سه نه که و کۆمهله ی به تالی ϕ
(تیدا بێت. $(\phi, X \in \tau)$)

2- بۆ هر دوو بنه کۆمهله یه کی ناو τ ، ده بێت یه کتر برینی ئه و
دوو بنه کۆمهله یه ش له ناو τ بوونیان هه بێت.

3- یه کگرتنی هر چند بنه کۆمهله له ناو τ ، ده بێت له ناو τ
بوونی هه بێت.

هر له م ریگه یه وه به رده وامی ده رده که ویت، که پیشتر له ریگه ی
ئامانجه وه باسی به رده وامیمان کردبوو، بۆیه هر له ریگه ی کۆمهله ی
نازاد، ده کریت لیکۆلینه وه له سه ر به رده وامی نه خشه بکین، ئه ویش به و
شیوه یه: نه خشه یه ک به رده وامه ئەگەر بێت و نه خشه ی هه لگه راوه ی
هه موو کۆمهله یه کی نازاد له مه ودای نه خشه که، به هه مان شیوه
کۆمهله یه کی نازاد بێت له بواری نه خشه که.

یه کینکی تر له بابەتە گرنگەکانی ئاھووتە می مەتری، برتییه له بیروکی پتەوی (compactness) که به هۆی بیروکی کۆمەلە شییشدراو (داخراو) سەرچاوەی گرتوووه. شتیکی تر له توپۆلۆجی هیه پیتی دەوتریت: داپۆشەر (cover)، داپۆشەر بریتییه له دەستەیه که کۆمەلە ئازاد که پیکه وه یه کیان گرتوووه، ئەگەر بیت و ئاھووتە یه کمان (space) هه بیت، وه بتوانین ژماره یه کی دیاریکراو له وه دەسته ئازاده وه گرین و گشت ئاھووتە که مان داپۆشیت، ئەوه به وه ئاھووتە یه دەوتریت: ئاھووتە یه کی پتەو یان په ستینراو (compactness). به واتایه کی تر، چەند کۆمەلە یه کی ئازاد هه بن به وه مەرجه ی ژماره یان زانراو بیت (ناکوتا نه بیت)، وه بتوانن ئاھووتە که داپۆشن، ئەوه به وه ئاھووتە یه دەوتریت ئاھووتە یه کی په ستینراو. به نمونه یه کی کۆنکرتی ئەمه زیاتر پرونده که یه وه: وا دانی ناکوتا لیتر بۆیاغمان سبوغ هه یه! وه پینگایه کمان هه یه که ده مانه ویت ئەو پینگایه بۆیاغ بکه ین، بۆیه ئەگەر توانیمان پینگاکه به چەند لیتری (واته بۆ نمونه n لیتر) بۆیاغ بکه ین، ئەوه به وه پینگایه دەوتریت: Compact.

فراکتاله‌کان

Fractals

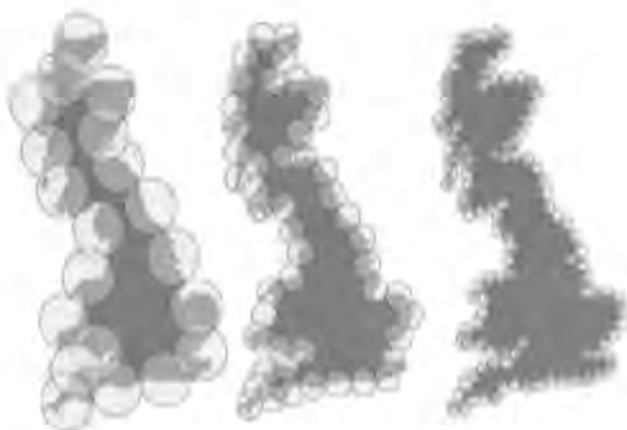
فراکتاله‌کان، پیکهاته‌یه‌کی ئه‌ندازه‌یییه، که له گه‌وره‌کردنه‌وه و دووباره‌کردنه‌وه‌ی شتیوه ئه‌ندازه‌ییه لیکچووه شتیوه بنه‌په‌تیه‌که په‌یدا ده‌بیت. به‌دهسته‌واژه‌یه‌کی تر؛ فراکتال به پیکهاته‌یه‌ک ده‌وتریت که هر به‌شیکی، هاوشتیوه‌ی شتیوه گشتیه‌که‌یه.

فراکتال له دوور و له نـزیکه‌وه وه‌ک یه‌ک ده‌بینریت، به‌م تایه‌تمه‌ندییه‌ی فراکتال ده‌لین: له‌خوچوویی (self-similar). فراکتاله‌کان یه‌کینک له نامرازه‌گرینگه‌کانی گرافیکی کومپوته‌ره. وشه‌ی فراکتال له سالی 1976 له‌لایه‌ن ماتماتیکزان بیتۆیت ماندیلبۆرت هاته‌ناو دونه‌یای بیرکارییه‌وه.

به‌زمانی بیرکارییه‌انه فراکتاله‌کان بریتییه‌له‌و کۆمه‌لانه‌ی که پیکهاته‌یه‌کی دووباره‌کی هه‌یه‌له‌سه‌ر پێوه‌ریک. نمونه‌وه‌ک: سینییه‌کی ناوه‌ندی کۆمه‌له‌ی کانتۆر، یان سنوره‌کانی کۆمه‌له‌ی ماندیلبۆرت، که سنوره‌کانی ئه‌مانه‌هه‌رچهند سه‌یری بکه‌ین و گه‌وره‌ی بکه‌ین، دووباره بوونه‌وه‌کی تیدا ده‌بین. شتیوه ئالۆز و پروه‌ته‌لسماوه‌ییه‌که‌ی فراکتاله‌کان، مه‌رج نییه‌به‌هۆی ئه‌ندازه‌ی ئیقلیده‌وه‌ بژیر درابیت. سینییه‌کی ناوه‌راستی کۆمه‌له‌ی کانتۆر، کۆمه‌له‌یه‌که‌ که هیچ په‌هه‌ندیکی ته‌واوی نییه

وهك دهسته (collection) خالیک، بهلام لهگه له مهش، كۆمهلهیهكی نهژمیرداوه (uncountable).

فراكتالهكان شتانیکی سروشتین بۆ لیکۆلینهوه له خالیک؛ له دیدی تیوری پیناونه (measure theory). به شیوهیهکی تایبهتیانه، تیوری پیناونه دهكریت بهكاربهیندریت بۆ پیتاسهكردن جیگرهوهیهك بۆ چهك و دهستهواژهی (پهههاند)، لهو ږووه؛ سنییهکی ناوهراستی كۆمهلهیی كانتۆر پهههندیکی هیه له نیوان 0 و 1 .

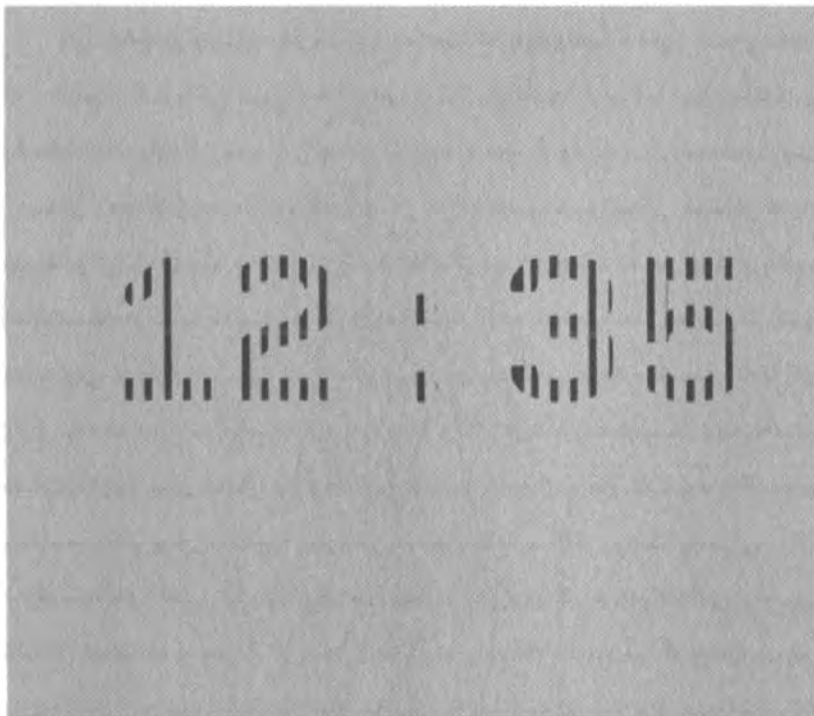


کاتزمیری فراکتالی هتاوی

Fractal sundials

کاتزمیری فراکتالی هتاوی، یه کیک له بیروکه هره سه رنجراکیشه کان که له لایه ن بیرکاریزان (Kenneth Falconer) له سالی 1900 پیش نیاز کرا. فالکونه توانی به بیردو زیانه نه وه بیسه میتیت، که نه کاتزمیره هتاوییه، ده کریت دروست بکریت، که فراکتالیکی سی ره هندییه، که له ریگی نه فراکتاله سی ره هندییه ده توانی کات بزانی، نه ویش به هوی نه وهی کاتیک تیشکی پوژ به ناو نه فراکتاله تیه پر ده بیت و سیبهریک دروست ده کات، نه وه سیبهره که به ژماره دیجته لی عربی ده رده که ویت، نه و ژمارانهش کاتمان پی ده لیت. خالی ده ستیگی فالکونه، بریتیه له هه بوونی یه کسه دوا یه کیک له نه ستوبوونی ژماره کان یان پیته کان که کیشراون له پروته ختدا. فالکونه پیشانی دا که بو هر یه کسه دوا یه کیک له م جوړه، کومه له یه کیک فراکتال هیه به و مرجه ی کاتیک گوشه که بو خور کاردانه وهی هیه بو گوشه کانی یه کسه دوا یه که که. نه و ناسوکه ی (سیبهر) که فراکتاله که دروستی ده کات له سر پروته خت، نزیکه له نووسینیک یان ژماره یه کی مه زنده کراو، که نه مهش به هوی گوشه ی نه و تیشکانه ی ده که ویته سه فراکتاله که. سه لماندنه که ی فالکونه دروسته که نه بوو، به لکو ته نیا مؤدیلتیک بوو: نه و ته نیا سه لماندوویه تی که کاتزمیریکی له و شیوه مومکینه، به لام نه و

رینگایه که ی نه خستۆته پروو بۆ دیارکردنی شیوهی ئەو فراکتاله ، به لام
ئێستا ئەو کاتۆمیرە ههیه و بهردهسته.



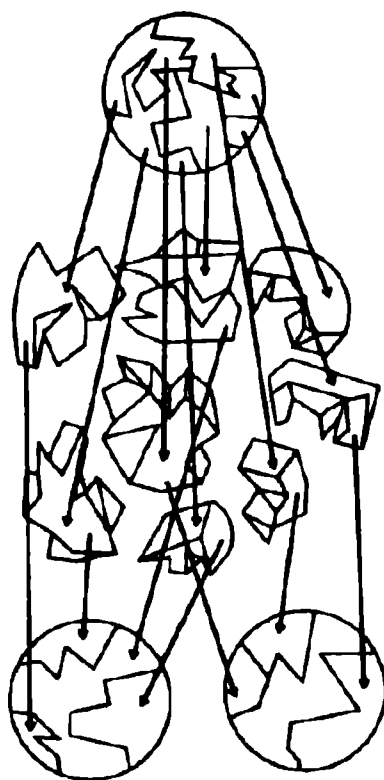
ئەم شیوهی سەرەوه کاتمان پێ دەلێت بههۆی فراکتالینکی فیزیکی.

پارادوکسی بهناچ- تارسکی

The Banach-Tarski paradox

پارادوکسی بهناچ- تارسکی، یه کیکه له پارادوکسه هره سهیره کان، که ده لیت: گویه کی سنی ره هندی ده کړیت بکړیته چند پارچه یه ک و بشکیندریت، پاشان هر بهو چند پارچه یه دوو گوی تر دروست بکین عینن وهک گویه ره سه نه کی سه رته! وادانی شوتیه کی خرمان هیه، نهو شوتیه ده که یته چند پارچه یه، پاشان نهو پارچانه به جوړیک پیکه وه ده لکینیت، واته به شویوه کی زیره کانه، نهوه له نه جام ده توانی دوو شووتی له پارچه کانی نهو شوتیه دروست بکوی! به شویوه کی نهو پارچانه نه ده پستیندریت وه نه دریز و گوه ریان ده کړیت، واته به بی دستکاری، سروشتی پارچه کان چون هیه هر بهو شویوه به کاری بینه وه، به لام چون چونی پارچه ی ده کی نهو شتیکی رینگه پندراوه، واته مه به ست نهوه نییه تویه که ده که یته چند پارچه یه ک به هره مه کی. راستی نهو ش له قسه ی حله ق و په له ق ده چیت، چونکه قه باره ی گویه که پیش پارچه کانی ده بیت بکاته وه هر هه مان قه باره دوا ی نهو پرؤسه یه ش! واته چون ده بیت شوتیه کی 5 کیلوی به گویره ی نهو قسه یه تیکه و لیکه ی له گه ل بکیت بیکه یه 10 کیلوی! او دوو شووتی؟! له لایه کی تر، نهو دیاره که نابیت نه گه ر بیروکه ی قه باره - بق تویکی فیزیکی بیت، به لام بق تویکی بیرکاریانه (Abstarct) ده کړیت هه لېژارده ی تر هه بیت. نهو

نهجامه له سهر كوزمه له يه كې نه ژميردراو پشتمې پي به ستراره، كه دهسته خالېك كه قه باريه كې نا ناسايان هه يه.



تۆپۆلوجی

Topology

تۆپۆلوجی-شویئناسی یەکیگە لە لقه کانی بیرکاری. تۆپۆلوجی وەسفی شیوه کان (shapes) دەکات و گرنگی بە مانەوی ئەو تایبەتمەندییانه دەدات کاتیک شتیک لە شیوه یەک دەگۆریت بۆ شیوه یەکی تر. بەلای تۆپۆلوجی، گۆرانی شیوه گرنک نییه، ئەوەی گرنگە سیفەت و تایبەتمەندییەکان وەک خۆی بمیشتەوه. واتە وەک چۆن زێر هەر بە نرخە بە هەر شیوه یەک بیت، ریک بیت یان ناریک بیت، ئەوە تۆپۆلوجیش بەو بیروکە یە مامەلە لەگەڵ شتەکان دەکات. لە دیدی تۆپۆلوجی کوپیک قاوە خواردنەوه و کیکیک دۆنات وەک یەکن، چونکە ئەو دووانە هەر دووکیان یەک روویان هەیه و یەک کونی تێدایە.

هەندێ لە شیوهی تری تۆپۆلوجی کە دەتواندریت بە ئاسانی دروستبکریت بەهۆی کاغەز و سمخو (Glue) کاتیک هەردوو کۆتاییەکی بە یەک ببەستینەوه. شیوهی تری تۆپۆلوجیانه وەک: شریتی مۆبوس (Möbius strip)، بوتلەکی کلاین (Klein bottle) کە لە رووی تیورییەوه دەکریت دروستبکریت بەهۆی خستە پال و زیادکردن لە شیوه یەکی گونجاو، چونک بەلای تۆپۆلوجی چۆنییەتی دانان و پیکەوه لکانی شتەکان گرنگە. بیروکە تۆپۆلوجییه کان بەکاردهیندریت لە بەرنامەکانی کۆمپیوتەر و ناسینەوی بەرنامەکان، هەروەها لە گرافیکی

کۆمپیوتەر به کار دههیندریت. ته تسانهت ده تواندریت به کار بهیتدریت بو چاره سهری چند کیشه یهک، وهک دامه زانندنی بورجی ته له فون... هتد.



ئه مانه له دیدی توپولوجی هیچ جیاوازییهکیان نییه.

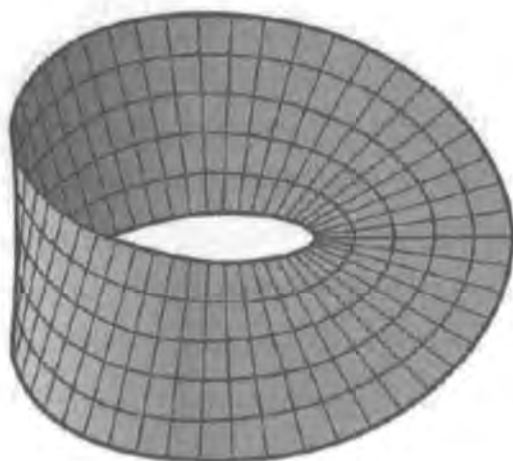
شریته‌که‌ی مۆبیوس

The Möbius strip

شریته‌که‌ی مۆبیوس، بریتییه له پروه‌ک له‌گه‌ل یه‌ک لا و یه‌ک لێوار-قه‌راخ. ئەم شریته‌ شێوه‌که‌مان ده‌ست ده‌که‌ویت له‌ کاغه‌زینکی شریته‌ کاتینک ئەو شریته‌ی هه‌مانه‌ پینچینکی پێ ده‌که‌ین پاشان هه‌ردوو سه‌ره‌که‌ی به‌یه‌که‌وه‌ ده‌گه‌ینین و ده‌بیه‌ستینه‌وه‌. یانی ئەگه‌ر پارچه‌ کاغه‌زینکی بێتیت 2 بست بێت و دوو په‌نجه‌ پانیه‌که‌ی بێت، ئەوه‌ پێش ئەوه‌ی هه‌ر دوو سه‌ری کاغه‌زه‌که‌ به‌یه‌ک بگه‌یه‌نی، پینچیک به‌ کاغه‌که‌ بکه‌ پاشان هه‌ردوو سه‌ره‌که‌ی به‌یه‌ک بگه‌ینه‌ و بیه‌سته‌وه‌ به‌ سمخ یان تیب یان هه‌ر شتیکی تر. شریته‌ی له‌و شێوه‌ش نمونه‌یه‌که‌ له‌و پروانه‌ی که‌ ریچکه‌یه‌کی داخراوی هه‌یه‌، ئەو ریچکه‌یه‌ کاتینک شتیکی لێیه‌وه‌ پێ ده‌کات، ئەوه‌ ریچکه‌که‌ پینچه‌وانه‌ی ده‌کاته‌وه‌! وه‌ک ده‌بینین که‌ شریته‌ی مۆبیوس ئەسته‌مه‌ بلین کامه‌ ناوه‌وه‌ی شریته‌که‌یه‌ و کامه‌ ده‌روه‌ شریته‌که‌یه‌! واته‌ شریته‌ی مۆبیوس له‌ تاک پروه‌کانه‌ (non orientable).

ئەگه‌ر که‌سێک له‌ خالینک ده‌ست به‌ رویشتن بکات له‌ سه‌ر شریته‌ی مۆبیوس، کاتی ده‌گاته‌وه‌ شوینی ده‌ستپینکه‌که‌، ده‌بینین هه‌ل‌ده‌گه‌رپته‌وه‌- سه‌ره‌وخوار! بۆیه‌ ناوه‌ و ده‌روه‌ی شریته‌ی مۆبیوس تووشی سه‌رلێش‌نیوانمان ده‌کات. پینکه‌وه‌ نووساندنی هه‌ردوو لێواره‌که‌ی (edge) شریته‌ی مۆبیوس پینکه‌وه‌ به‌ درێژایی شریته‌که‌، شتیکی په‌یوه‌نیدارمان ده‌دات، ئەویش بوتلی کلاین (The Klein bottle). ئەم شته‌ش له‌

ناهوتی سنی ره هندی ئیقیدی شیاوی نه جامدان نیسه به بی برینی
کاغزه که به کورتی و پوختی، شریته که ی مویس که وینه که شی له
خواره وه هاتوه، رووه کی تاک لایه و، واته یه ک لایه هیه!

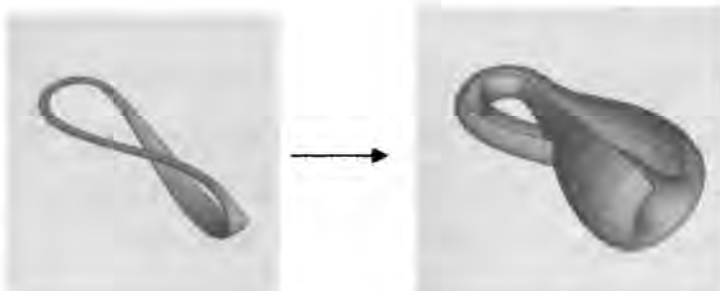


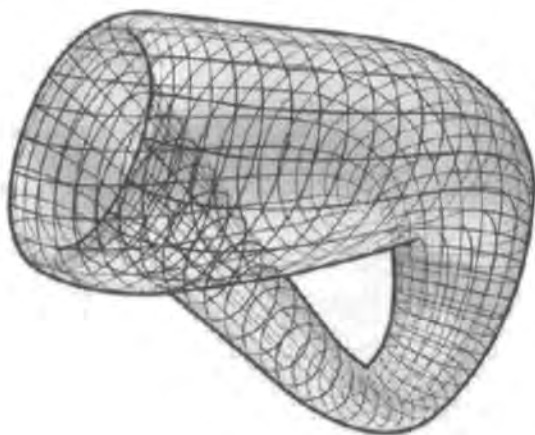
بوته‌که‌ی کلاین

The Klein bottle

بوته‌که‌ی کلاین، یه‌کیکه له پروهه $non\text{-orientable}$ ، واته ناتوانین بریاری شه بدهین کامه دیوی ناوه‌وهی و کامه دیوی دهره‌وهیه، به‌جۆریکه ده‌کریت بلین بوتلیکه که تنیا یه‌ک دیوی هه‌یه و هیچ لئواریکی نییه. شه بوته هه‌ر له ریگه‌ی شریته‌که‌ی مۆبیۆسه‌وه دروست ده‌کریت، کاتیک هه‌ردوو لئواره‌که‌ی شیریتی مۆبیۆس بۆ یه‌ک دینینه‌وه، پاشان پیکه دنووسین، شه بوته‌مان بۆ دروست ده‌ییت. شه بوته له شوینیک به ناو خۆیدا تیپه‌ر ده‌ییت، که بوته‌که سنی ره‌ه‌ندی هه‌یه، شه یه‌کتر برینیک دروست ده‌ییت، به‌لام له چوار ره‌ه‌ندیدا شه یه‌کتر برینه نامینیت. بوته‌که‌ی کلاین پروهه‌کی داخراوه، واته پته‌وه-داپۆش‌راوه ($compact$) و هیچ سنور و لئواریکی نییه. بیرکاریزانه‌کان پروهه داخراوه‌کان پۆلین ده‌کن به پینی ژماره‌ی کونه‌کانی ناو پروهه‌که، دیارکردنی شه‌وه‌ی که شه ده‌کریت جیاکاری له نئوان دیوی دهره‌وه و ناوه‌وه‌ی بکه‌ین یان نا؟ واته

$orientable$





یاسای ئۆیلر له هه‌مبەر چند ږوه‌کان

Euler characteristic

یاسای ئۆیلر له هه‌مبەر چند ږوه‌کان⁹² (polyhedron) یه‌کیکه له یاسا هه‌ره جوانه‌کانی نیو بیرکاری. ئۆیلر جگه له وهی هاوکیشی تریشی به‌ناوه، وهک هاوکیشی: $e^{i\pi} + 1 = 0$. ئەم یاسایه سه‌بارهت به تهنیکی چند ږوه، یاساکه که بریتیه له:

$$V - E + F = 2$$

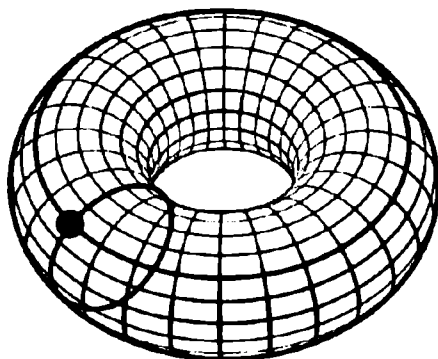
ئەم یاسایه یه‌کیکه له یاسا بنچینه‌یه‌کانی ناو بابتهی توپۆلۆجی (Topology). چند ږوه‌کان بریتین له تهنیکی شیوه داخراو که چند ږوه‌کی هیه (Face)، وه چند لیواریکی (Edge) هیه، له‌گه‌ل چند سه‌ریک (Vertex)، که ږوه‌کان به‌هزی لیواره‌کانه‌وه ده‌ور دراون و لیواره‌کان به‌هزی سه‌ره‌کانه‌وه به‌یه‌که‌وه به‌ستراونه‌ته‌وه. ئەوهی گرنکه ئەم هاوکیشی‌یهی ئۆیلر بۆ هه‌موو چند ږوه‌کان راسته! ته‌فسیری یاساکه به‌م شیوه‌یه: ئەگه‌ر تهنیکی چند ږوه‌مان هه‌بیت، کاتیک F ژماره‌ی ږوه‌کانی بیت، E ژماره‌ی لیواره‌کانی بیت، V ژماره‌ی سه‌ره‌کانی بیت، ئەوه هه‌میشه ژماره‌ی ږوه‌کان کهم ژماره‌ی لیواره‌کان و کۆی ژماره‌ی سه‌ره‌کان، ده‌کاته 2، واته:

⁹² له به‌ره‌تدا 'دیکارت' دۆزه‌وه‌ی ئەم یاسایه بوو، به‌لام له‌به‌ر ئەوهی 'ئۆیلر' سه‌لمینه‌ی بۆ کرد، ئەوه به‌ ناوی ئۆیلره‌وه نرا.

$$V - E + F = 2$$

بۆ ږووه داخړوه کان (orientable) ژماره کونه کان g پښی دهوتریت: توخمی (genus) ږووه که، که نه مه ش په یوه نښه کی به یاساکه ی نۆیله روه هه به پښی هاوکیشه که:

$$V - E + F = 2 - 2g$$



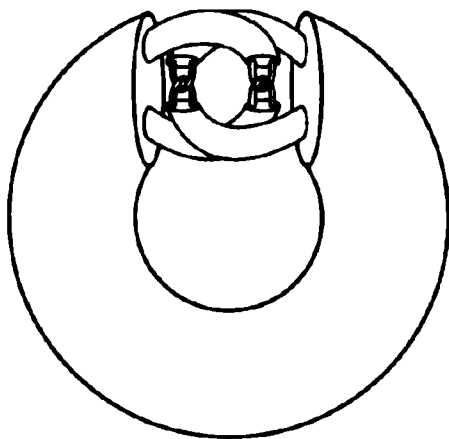
نهم وینه په چوو پنگ نیشانده دات، سه ریک ، دوو لیتوار و یه ک ږوو.

ھۆتۈپى

Homotopy

دوو روو يان دوو شتى سى رەھەندى پىيان دەوترىت ھۆتۈپى ئەگەر بىت و يەككىيان بتواندىرىت بگۇردىرىت بۇ ئەوھى تر، واتە شىئوھگۇرپكى پىئىكرىت بۇ ئەوھى تر، بەبى ئەوھى بىردىرىت يان بەش بەش بىرىت. بۇ نمونە: چوپىكى تاىھى سەيارە لەگەل كوپىكى قاوہ خواردەنەوہ، ئەوہ ئەو دوانە لىكچوون، چونكە ھەر يەكەيان تەنيا يەك كۈنى ھەيە، وە يەك روويان ھەيە، لەبەر ئەوھش بە شىئوھيەكى بەردەوام دەتواندىرىت شىئوھگۇرپكىيان پى بىرىت بۇ ئەوھى تىريان. مەبەست لە چەمكى بەردەوام لىرە واتە ناچار نەبىن بىرىنكى يان پارچەكردىنكى بگەين بۇ ئەوھى لەم شىئوھ بگەينە شىئوھكەى تر.

بابەتى ھۆتۈپى ھەر سەر بە تۈپۈلۈجىيە كە پىشتر باس كراوہ، بەلام لىرە ئەم بابەتە سوودى لى وەردەكىرى بۇ لىكۈلئىنەوہمان لە نەخشەكان، كە لىرە تىگەيشتن تۈزىك لىنى قورسە بۈيە باسى ناكەين. لە ھەندى باردا، وەك گۈى قۇچدار (horned sphere) كە لە سالى 1924 لە لاين ئەلىكساندەر جى (J. W. Alexander) داھىنرا كە لە وىنەكە نىشانداروہ، ئەوہ شتىكى زۇر سەمەرە بوو، ئەم شتە ھاوشىوھى گۈيەكى دوو رەھەندىيە لە دىدى تۈپۈلۈجىيەوہ!



گروپه سه ره کیه که

The fundamental group

وهک له ناوه که بیه وه دیاره، گروپه پی سه ره کی ناوهوتی توپولوژییانه، بریتیه له گروپیک له بونیادی شتانیکی بیرکارییانه له گه ل شتانیکی توپولوژییانه که تاییه ته به کونه کان و سنوره کانی نه و شته ی هه مانه. نه مه ش نه گوره له ژیر روشنایی هموتوپیی⁹³ (homotopy) که پشت قایمه به و ریگایه ی که نه لقه کانی سه ر پوهک که بتواندریت شیوه که ی بگوردریت بو شیوه یه کی تر.

نه لقه کان (loops) ریچکه یه کن له ناوهوتیه دا، که خالی کوتایی و ده ستپیکان نییه، واته خالی ده ستپیک و خالی کوتاییان وهک یه که. دوو نه لقه هاوتای یه کتر ده بن نه گه ر بیت و بتواندریت یه کیکیان بگوردریت بو نه وه ی تریان. هر بویه گروپه پی سه ره کی، زانیاریه کان له هه مبه ر شیوه کان له ناوهوتیه دا به کور ده کات، که نه مه ش یه که مین و ناسانتترینی زنجیری که له گروپه هموتوپیه کان که له سه ر ناوهوتیه فره ره هه ندیه کان جیه جی ده کريت.

ساده ترین ریگا بو پیتاسه کردنی گروپه پی سه ره کی، برتیه له جیگیر کردنی چند خالیک X له ناوهوتیه کدا X وه سه رنج خسته سه ر

⁹³ دوو نه خشه ی به رده وام له ناوهوتیه کی توپولوژییانه بو ناوهوتیه کی تر، پیسی دهوتریت هموتوپیی.

هه موو ئه لقه کان که له سهه خاله جیگیره که یه. ئه گهر دوو ئه لقه مان هه بیت، هه یه که یان پۆلیکی-کلاس فراون له ئه لقه کان پیناسه بکه ن له ناو ئاهووته که دا، ئه وه ده توانین پۆلگه لیکه نوی دابرنژین به هوی شوین که وتنی یه که ئه لقه، وه پاشان ئه وانسی تر. له م ریگایه دا کرداره کان له سهه ئه لقه کانی پۆله کان دروست ده که یه که ئه مهش گرووپیک پیکدیتیت. گرووپی سههه کی هه به نه گۆپی ده مینیته وه ته نانه ت ئه گهر بیت و ئاهووته که ش گزانی به سهه دایت، واته شیوه گۆرکی به سهه ردا بیت.

ئه گهر سهه رنجی چوپیکی ساده یان دۆناته کی ئه لقه یی به دین، وه که ئاهووته یه که، ئیمه چوپیکی سهه یاره هه لده بژیرین، ئیستا ئه گهر خالیک له سهه ئه و چوو په ده ست نیشان بکه یه: به هوی ئه و خاله وه ئه توانین ئه لقه که به ده وری چوپه که-چیوه دروست بکه یه که ئه و ئه لقه یه ده وری کونه که ی ناوه راستی چوو په که ده دات، پاشان دروست کردنی ئه لقه یه که به هوی بوونی ئه و کونه ی له ناوه راستی چوپه که هه یه؛ ئه لقه که دروست ده بیت: ئه و دوو جۆره ئه لقه یه هاوتا نینه، وه ناتوانین یه کیکیان بۆ گۆرین بۆ ئه وه ی تر به هیه شیوه یه که. پۆلی سیتیهم له پۆلی ئه لقه کان، ئه و پۆلانن که ده تواندیت بگه ریندیرینه وه بۆ خاله ره سه نه که، که ئه مانه ش له گرووپی سههه کی ناژمیردین.

گرووپی سههه کی ده تواندیت به کار به یندیریت بۆ ژماردنی ئه لقه یه که ره هه ندیبه کان له ئاهووته یه کی تۆپۆلوجییه، له لایه کی تر بۆ ره هه ندی به رزتر گرووپی هۆمۆتوبییه کان ده تواندیت پیناسه بکیرین به

به کارهیتانی گویه کانه وه (spheres). له بنه رته دا نه مانه نه و زانیارییه انه ده سته بهر ده کن له هم بهر پیکهاته ی ناهو ته که، به لام به داخوه که زور سخت و گرانه مه زنده کردن و لیکولینه وه لئان. تاییه تمه ندیه ساده نه گوره کان که زانیارییه کان به کؤد ده کن به زور پیکای لیکجیاوان، که نه مانه ش پیوستن له هم بهر لیکولینه وه له ره هندی بهر زتر.

ژماره بېټيېه كان

Betti numbers

ژماره بېټيېه كان، كۆمەلە ژماره يەكن كە بە ناوی بېركاريزانی ئىتالی “بېټيېى” كراوه. ئەو ژمارانە تەفسىرى سىماى شىئوہ يان پروہ تۆپۆلۇجىيە كان دەكەن، كە دەتواندرىت ھەژماربكرىن بەھۆى بەكارھىنانى ھۆمۇلۇجى. ۋەك ياساى ئۆيلەر لە مەر فرە پروہ كان. ژماره بېټيېه كان يارمە تىمان دەدەن لە پۆلنكردىنى پىكھاتە كان بەھۆى چەند سىفە تىكى سادە و ساكارە ۋە.

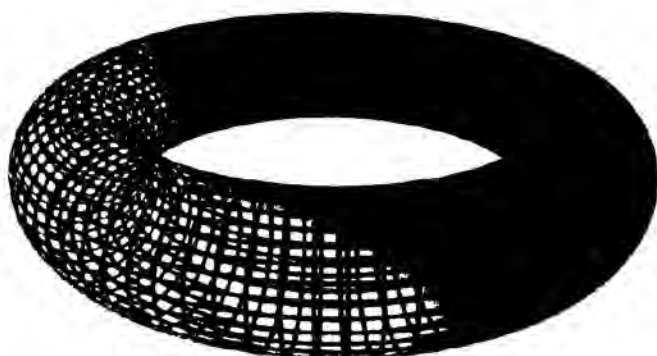
ئەگەر سەرنجى پارچە پەنيرىكى سويسرى بدەين، زانىارى گرنكى تۆپۆلۇجىيانە ھەيە، كە ئەمانەيە:

- تەنيا پارچە يەكە لە پارچە پەنيرىك، كە ئەو پارچە يەك بەشە و پىكە ۋە بەستراۋە تە ۋە.

- ئەو پارچە پەنيرە n كونى ھەيە، ئەو كونانە تۆپۆلۇجىيانە جىاوازن و بەراورد نەكراون.

- لە ناو ئەو پارچە پەنيرە، m كونى شاراۋە يان بلقى شاراۋە ھەيە، ئەمەش ژمارە كۆيە سى پەھەندە بەراورد نەكراۋە كانن.

ئەم زانىارىيانە، يان ھاۋا تاكانيان بە پەھەندى بەرزتر، برىتىن لە سى يەكەمىن ژمارە كانى بېتى لە ھەمبەر شتەكە، ئەو شتەى ھەمانە.



چوپیکي له م شنیوه که یک پارچہی په یوه سست به یه ککرن، دوو
کوونی بازنه یی، یه کیکان شهوهی ناوه راسست، وه شهوهی تر که ده که وینته
ناوه وهی چوو په که، وه یهک ناوچهی به تالی سسی ره هندی. ئەمانه سسی له
ژماره سه ره تاییه کانی ژماره ی بیتیمان پین ددهات، وهک 1,2,1 .

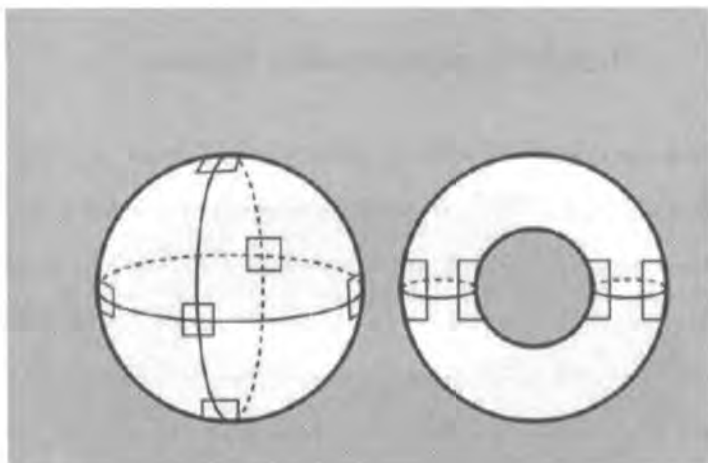
بیردۆزی تورستون

Thurston's geometrization theorem

بیردۆزی تورستون، بیردۆزیکى پینگه خوشکەربوو بۆ پۆلینکردنى پروه سى رههەندییه داخراوهکان. له سالی 1982، نییل تروستون 8 پۆلی دانا که ناسراوه به پۆلی فره شیوه سى رههەندییهکان (3-manifolds)، که هەر یهکه یان دهتواند ریت بیهستریتهوه به پیناسه جیاوازهکانی دووری له سهەر پرویک. تورستون گریمانەى ئەوهى کرد که هه‌موو پروه سى رههەندییهکانى تر ده‌کریت پيانبگه‌ين له پینگه به‌یه‌که‌وه گریدان (sewing together)، نمونه‌ى ئەمانه‌ش 8 جۆرى بنه‌رته‌یه.

هەریەک له وه‌ششت پۆله، په‌یوه‌سستن به گرووپى لای. ساده‌ترین‌ه‌که‌ى به‌ستراوه‌توه به ئەندازه‌ى ئیقلیدی و له 10 فره شیوه‌ى کۆتادار پیکهاتوه، ئەوانى تری له ئەندازه‌ى گۆیی و ئەندازه‌ى برگه‌ى زیاد پیکهاتوه، که به‌تواوی پۆلین نه‌کراون. ئەو پینگه‌یه‌ى ده‌توانن لیدیه‌وه پیکه‌خ‌رین به‌یه‌که‌وه، بریتیه‌ى له په‌نگدانه‌وه‌ى له پیکه‌اته‌ى گرووپى سه‌ره‌کى له فره شیوه‌ى سى رههەندی.

له سالی 2003 گریگۆرى په‌رله‌مان ئەو گریمانەى سه‌لماند به به‌کارهێنای ته‌کنیکى پيشکەوتوو که پى دەوتریت: ricci flow بۆ دیاریکردنى ئەوه‌ى که‌ى ئەندازه جۆراوجۆره‌کان هاوتای به‌کتر ده‌بن.



ئهم بیردۆزهئ سهرهوه له سهره تادا گریمانهیکی یه کلانه کراوه بوو.
 گریمانەکش ئهوه بوو که پروه سنی رهه نسییه کانی وهک گویه کان و
 دۆناته کان (وهک له وینه که) پیکه وه ده دورینه وه له فره تهنیشته کان.

گریمانه‌ی پوانکارییه

The Poincare Conjecture

گریمانه‌ی پوانکارییه، یه کینک بوو له پرسه شیکارنه کراوه کان، ههروه‌ها نهو پرسیاره له خشته‌ی نهو پرسیارانه بوو که په‌یمانگای کلا‌ی بیرکاری خه‌لاتی یه‌ک می‌لۆن دۆلاری بۆ ته‌رخان کردبوو (ئیس‌تاش). گریمانه‌ی پوانکارییه یه‌که‌م پرسیا‌ری نهو خشته‌یه بوو که شیکار کرا له لایه‌ن گیرگی‌زوری په‌رلیمان له‌ سالی 2003. پرسه‌که به‌ ده‌سته‌واژه‌ی ئاسان ده‌لیت: هه‌موو فره‌ شیوره‌ سێ په‌هه‌ندییه داخراوه‌کان بێ بوونی هیچ کونیک له‌ ناو شیوره‌که، نه‌وه تۆپۆلۆجیا‌نه هاوتای گۆیه‌کی سێ په‌هه‌ندی ده‌بن.

ناهووته‌یه‌ک هیچ کونیک‌ی نییه‌ نه‌گه‌ر بی‌ت و هه‌ر نه‌لقه‌یه‌ک له‌گه‌ل خالیک بیه‌ستری‌ت، بۆیه‌ گرووپی سه‌ره‌کی له‌م دۆخه‌ شتیکی چاوه‌پوانکراوه. له‌ ناهووته‌ی دوو په‌هه‌ندی، تاکه‌ پروو له‌گه‌ل نه‌و تاییه‌تمه‌ندییه‌ بگونجیت، پروو گۆیه‌ تۆپۆلۆجییه‌کانه. له‌ سالی 1904، هینری پوانکارییه گریمانه‌ی نه‌وه‌ی کرد، که‌ نه‌مه‌ له‌ ناهووته‌ی سێ په‌هه‌ندییه‌ راسته. بابته‌ گرینگه‌که‌ نه‌وه‌ بوو: ناخز فره‌ پروه‌کی سێ په‌هه‌ندی ده‌شیت هه‌بی‌ت به‌لام گۆ نه‌بی‌ت؟ په‌رلیمان سه‌لماندی که‌ بیردۆزی thurston's geometrization theorem له‌دوره‌وه‌ی نه‌م نه‌گه‌ره‌ به‌کاره‌که‌ هه‌له‌ده‌ستیت.

هاوشینوه کانی گریمانه که ی پوارنکاریه بو رههندی بهرتر به زوویی نهوانیش پیداچونه وهیان بهسهردا کراو شیکارکرانه وه. کیتشه ی 5 رههنده که له سالی 1960 نهویش له لایهن، ستیفن سمالی، دوایی ماوهیه ک پیشکوتنی بهخۆبیه وه بینیی له لایهن ماکس نیومان. له بارودۆخی 4 رههه ندیدا له لایهن "وکایل فریدمان" ناراسته کرا له سالی 1982.



ھۆمۆلۇجى

Homology

ھۆمۆلۇجى، بىرىتپىيە لە پىگايەك بۇ پىئوانى كۈنەكان لە ناو ئاھووتەيەكى تۇپۇلۇجىيانە. ھۆمۆلۇجى بە دواى دەستە-پۇل شىتىكە لە ناو ئاھووتەكە، كە ئەو دەستەيە سنوورىئىكان نىيە، سنورى شتانىك لە توخىمى يەكتەر، بەم جۇرە، دياركردن و ناسىنەوہى كۈنەكان.

گرووپە ھۆمۆلۇجىيەكانى ئاھووتەيەك، دەتواندريت ھەژمارىيان بکەين بە ھۆى بە سىگۇشەکردنى كۇمەلەكان: واتە شىئوہگۇپىيەك لە پرووہكە بۇ سەر، لىئوار، پوو، قەبارە چوار پرووہكان... بەم شىئوہ بۇ رەھەندى بەرزتر. وە مەبەست لىرە گۇپىنى پرووہكە بۇ چەندىن سىگۇشەى بچوك بچوك، ئەمانەش دەتواندريت پىكبخرىن بۇ فۇرمى پىنكھاتەى گرووپىنك بە بەكارھىنئانى كىردارە سنوورىيەكان (boundary operations)، كە ئەم گرووپەش تەفسىرى پرووہكان دەكات بۇ لايەكانى. يەككىسى تر لە پىگاكان، پىنى دەوترىت (cohomology) لە رەھەندە نزمەكانەوہ، كە بەشە رەھەندە بەرزەكان دروست دەكات. بە پشت بەستىن بە كىشەكە، لەم پىگەيەوہ كىشەكە مومكىنە ناسنتر شىكار بكرىت وەيان ئەنجامىكى پروونتەر دەستەربەر بكات.

گرووپه هۆمۆلۆجیه‌كان زۆر ئاسانترن بۆ مامه‌له‌کردن له‌ته‌ك گرووپه هۆمۆتۆپیه‌كان-homotopy. له‌گه‌ل ئه‌وه‌ش، چونكه هه‌ندێ كونی ورد و بچوك هه‌ن كه هۆمۆلۆجی بایه‌خیان پێنادات، له‌به‌ر ئه‌مه‌ش هۆمۆتۆپیی مومكینه تا ئیستاش پینوست و گرنگتر بیت.

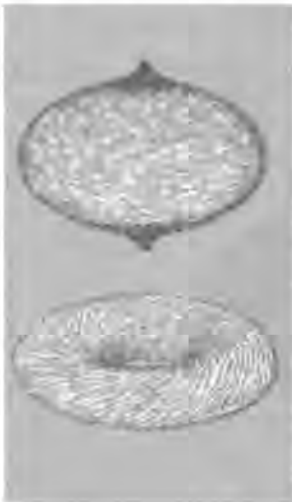


پووی كه‌له‌سه‌ره‌كه شینگۆرکی پی كراوه بۆ سینگۆشه‌ی بچوك
بچوك.

چه پکه ناراسته بره کان

Vector bundles

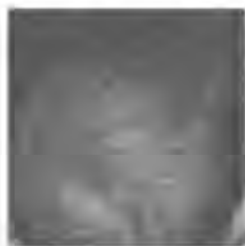
چه پکه ناراسته بره کان، ریگایه که بو سه رنجدان له پیکهاته توچؤلوجییه کان، که له سه ر پوویک پیناس کراوه، تهنانهت بو دیوی ناوه وهشی. پیناسه کردنی چه پکه ناراسته بر، له سه ر پووکه ئاهووتهی ناراسته بره کان له خوی دهگریت، واته له ریگه ی ئاهووتهی ناراسته بره کان وه سهیری پوو تپؤلوجییه کان ده که یین له هر خالیکی سه ر پووکه. ئەمەش بەهۆی هەلبژاردنی دانەیهکی تایبەتی له ئاهووتهی ناراسته بره کان که پینی دهوتریت ریشال یان تال (fiber) له ریگه ی ئەم ریشالانه وه له هر خالیکی سه ر پوو تپؤلوجییه که دهروانین، دوی ئەمەش که ناراسته بری مهیدانی دروستکراوه، که دهتواند ریت پیشانبد ریت



به پینی ناراسته بریکی ستوونی یان ئاسوی له هر خالیکی. چه پکه کان کۆمه له یهکی بهترخمان پی ده دات، له ریگه ی ئەم کۆمه له وه تفسیری فره پووکه کان ده که یین. یاسای ئویله و ژماره ی ئویله بو چند پووکه کان به سروشتیانه له م بابته سه ره لده دات، وه ک ژماره ی یه کتر برینی خوی که سه باره ت به سفره کانی ناراسته بره کان زانیاریمان ده داتی له سه ر پووکه. ئەگەر بێت و سفر نەبێت،

ئوه هر مهیدانیکى بېرته وامى ناراسته بېر له سهر فره پرووهک ده بېت سفریکى هه بېت له شویتیکى سهر فره پرووهک. ئه م بارهش زور جار پنى دهوتریت بېر دوزى توپى توکن (hairy ball theorem). که تاله کان ناراسته بېر کان ده نوین له سهر فره پرووهک. وه بوونى سفریش، ئه و راستیه ده نوینیت که هر ریگایهک له پیکه وه لکاندنى تاله کان به بېر لیکدانه کان. ئه وه به لایه نى که م تاجیک-crown (یان تاجه گولینه ی پى ده لىن) به ره مدین.

وادانى که له سهرى ئه و منداله ی خواره وه وهک فره پرووهک- (manifold) سهیر بکین. هر خالیکی-(point) سهرى منداله که؛ واته هر مووه خانه یهک به خالیکی سهر فره پرووهکى بېینین. ئه و؛ هر مووه خانه یهک ناراسته بېرکه-(vector)، وه که له سهرى منداله که بریتیه له چه پکیک ناراسته بېرکان-(vector bundles) ئیتر له ریگه ی مووه کانى سهرى منداله که له پیکهاته و شیوازی ناراسته ی مووه خانه که دهگین، له کاتیک به پى بوونى موه کانى سهرى به ئاسانى ناتوانین. هر له م پرووه وه، به کتر بېرینى ناراسته بېرکان تېبینى ده که ین⁹⁴.



تیۆری k

K-theory

تیۆری k له دەورووبەری سالی 1950 گەشەیی سەند. ئەم تیۆرییە ریگایەکی دەستەبەرکرد بۆ جیاکردنەوهی چەپکە ئاراستەبەرەکان لەسەر فرە پووەک، بۆ چەند پۆلیکی جیاوازی، ئەوانیش گروپ و تیۆری ئەلەقە. ئەم پۆلینکردنە ریگایەکی تر بۆ بۆ زانینی ژمارەیی کۆنەکانی ناو پووەکی تۆپۆلوجییانە.

ئەم تیۆرییە هاوتەرییە لەگەڵ چۆمۆلۆجی (Chomology)، دەتوانین بلین وردتر و ڕیکترە لە چۆمۆلۆجی. کە ئەمەش ئامرازێکی زۆر بەسوودی سەلماندوو لەگەڵ بەکارهێنانی لە هاوکێشە جیاکارییەکان، هەرەها ئەمەش ریگایەکی بۆ پێشکەوتنی مەیدانی ئەندازە نا-ئالۆگۆرەکان (Noncommutative geometry). ئەندازەیی ئاھووتەکان کە وەسفە جەبریەکانیان سێفەتی نا-ئالۆگۆرین، بە واتایەکی تر، کاتیک xy چ پێوست نییە بکاتو yx . لە فیزیای تیۆری، تیۆری k پۆلیکی زۆر گرنگ دەگیریت لە هەندێ تیۆر، وەک: تیۆری سترینەگەکان (string theories) کە هەولیکە بۆ وەسفکردنی تۆنۆلکە سەرەکییەکانی گەردوون، وەک: سترینگ فرە رەھەندەکانی لەرینەوه:

(Vibrating multidimensional strings)



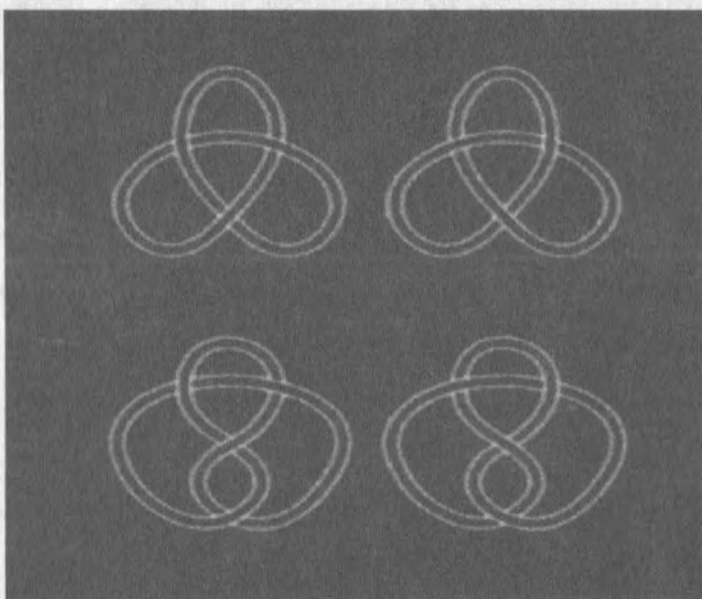
تیوری گری

Knot theory

گری، له بیرکاریدا بریتیه له چه ماوه یه کی داخراوی تیکنالو له شاهووته ی سی په هندی. دوو یان زیاتر چه ماوه ی له م شیوه ناسراون وهک نه لقه یان زنجیره نه لقه یه ک. تیوری گری، مه به ست له تفسیرکردن و پولینکردنی گریه کانه، وه سه رنج خسته سر نه وه ی که ده بیت چو بنویندریت، یان نهو یاسایه چیه که لیکان جیا ده کاته وه. له م بابه ته گریه کان ده کرایت هاوتای په کتر بن نه گه بیت و چه ماوه کانیا ن بتواندریت به شیوه یه کی به رده وام شیوه گورکی پیبکریت بو نه وه ی تریان بی نه وه ی برین و درین تیدا به کار به یندریت. سه ره پای نه وه ش، به راوردکردنی گریه کان هیتستا کاریکی وه ها ئاسان نییه و وه لامیکی وردی نییه. لیره ش له هم به ر نه گوراوه گریه کان ژماره ک هیه، تاییه تمه ندییه ک، که وهک یه که بو هم موو گریه کان، که ده ستکاری نه کراون به هوی شیوه گورکیوه. به لام به هم موو نهو بارانه ی که زانراون، چنن دین جوری جیاوازی له گریه کان هن که ده کرایت هه مان تاییه تمه ندی گریان هه بیت، بویه نه وانیش ده ستنیشان نه کراون. مه به ست له نه گوراوه گری، نهو گریانه ن که هاوتای په کترن.

تیوری گری گرنه که زانستی زینده زانی بو وه سفکردنی پنجه کان و شیوه ی DNA که په یوه ندی به پروتینه کانیش هیه. هه روه ها نه م تیورییه له په هنده نزمه کانی سیستمی داینه میکهل-جووله یی به کار دیت

که بۆ دیارکردنی ئەو هی که چۆن دەتواندریت خولگه دەورییه کانی هەندئ
له هاوکیشه جیاکارییه کان یه کتر بپرن.



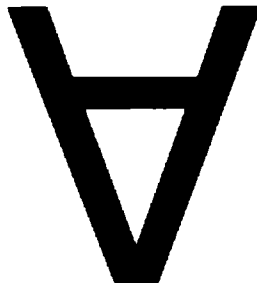
له م وینه ی سه ره وه جیاوازی نیوان گرییه کان به روونی دیاره.

به‌شی دوانزه‌هه‌م

ژیربیژی و سه‌ماندن

Logic and proof

$$\forall \text{♂} \in \text{Earth}, \exists \text{♀} \in \text{Earth} \text{ s.t. } \text{♂} + \text{♀} = \text{♥}$$



لوجیک-ژیریټی و بیردۆز

Logic and theorem

'هه‌رکه مه‌حال ریشه‌کیش ده‌که‌ی، هه‌ر چیه‌ک که ده‌مه‌نینه‌وه وه‌لامه‌که‌یه، شتیکی ږیتنچوویه.' (شیرلۆک هولمس)

له سه‌ره‌تادا ده‌بیت جیاکاری بکه‌ین له نیوان لوجیکی نوئ و لوجیکی هاوچه‌رخ-بیرکاری، مه‌به‌ست له لوجیکی هاوچه‌رخیش لوجیکی هیماییه، وه‌ک 'بیرتراند ږاسل' له په‌رتوکی 'ږنسیپا ماتماتیکا' ده‌لیت: 'لوجیکی هیمایی خویندنه‌وه‌یه‌کی جیاوازه جووره گشتییه‌کانی به‌لگه‌هیتانه‌وه'. به‌لام 'ده‌یفید هیلبیرت' له پیناسه‌ی بۆ لوجیکی نوئ ده‌لیت: 'بریتییه له جیبه‌جیکردنی میتۆدی فۆرمالی بیرکاری له بواره‌کانی لوجیکدا'.⁹⁵ به‌لگه‌ بیرکارییه‌کان، بۆ ږاستی دروستی ده‌قیکی بیرکاریانه، له یاسا‌کانی لوجیکه‌وه سه‌رچاوه ده‌گرن. ئه‌وه ده‌رده‌خه‌ن که چۆن ده‌سته‌واژه بیرکارییه‌کان (statement) له مه‌ر تاییه‌تمه‌ندییه‌کانی شتیکی بیرکارییه‌انه ده‌تواندریت به‌کاربه‌یتندریت، بۆیه ئه‌گه‌ر ده‌سته‌واژه‌یه‌کی سه‌ره‌تایی ږاست بیت، ئه‌وه هه‌رچی له‌سه‌ر ئه‌و ده‌سته‌واژانه‌وه سه‌رئاو ده‌که‌ون، ئه‌وانیش هه‌ر ږاستن. به‌لام ئه‌مه ته‌نیا ده‌ست تیه‌وره‌دانیکی وه‌ها ساده و ساکار نییه، تاییه‌تمه‌ندییه‌کان و شته‌کان له بیرکاریدا، له‌گه‌ل ئه‌وه‌ی شتانیکی ږووتن-په‌تین، به‌لام پینوس‌تیا‌ن به‌پیناسه‌کردن و

⁹⁵ لوجیکی کون و هاوچه‌رخ. د. حسن حسین جه‌باری. 2015 ده‌زگای چاپ و په‌خشی نارین-هه‌ولیز.

ناساندنیکى فەرمى ههیه. بیرکاری زانستیکى پروخسارهکیه، بۆیه پشتی به دیدهکشن بهستوه، واته له یاسا گشتیهکانهوه، باس له شته ههندهکیهکان دهکین. بۆیه تا ههنووکهش ههندیک دهقی بیرکاری ههن (وهک کۆنچیکتیرهکان) بۆ ههزاران و ملیۆنان ژماره شتهکه راسته، بهلام لهبهر ئهوهی به شیوهیهکی گشتی شتهکه یهکلانهکراوهتهوه، ئهوه ههر گرومانی لهسهره. به شیوهیهکی نمونهی، بیرکاری به کۆمهلیک شتی سهههتایی دهست پندهکات، وهک: بهلگه نهویستهکان، که تایبهتمندی ئهو شته سهههتاییانه. دهستهواژهی ئالۆزتری بیرکاریانه له بهکارهیتانی ئهو یاسا ژیریژیانه بینادهکریت، وهک: سیستمی بهلگه نهویستی، سیستمی ئهندازهی ئیقلیدی و تیۆری کۆمهله. له پیناسهکان و چهکهکانهوه زۆر جار شتاتیک دروست دهکین ئهسله ن وهلامهکی به وردی نازانین، وهک لهسههروه ناومان هیتان (conjectors). کۆنچیکتەر ئهوه دهقه بیرکاریهوه پندهچیت راست بیت، بهلام هیچ سهلماندنیک بوونی نییه تا پشت راستی بکاتهوه، واته نهتواندراوه بهسهلمیندریت، یانیش ناتواندرین دژه نمونهیهک بدۆزیتهوه که دهقهکه به ههله بخاتهوه. کۆنچیکتەر ئهگەر توانرا سهلمینهی بۆ بکریت، ئهوه دهبیته بپردۆز. بیرکاریزانی ههنگاری 'پۆل ئیدوارس'⁹⁶ له وهسفی بیرکاریزانهکات دهلیت: وهک ئامیتریکن بۆ گۆرینی قاوه بۆ بپردۆز. به کورتی و پوختی: ژیریژی-لۆجیک بریتیه

⁹⁶ 'پۆل ئیدوارس' بیرکاریزانی ههنگاری بوو، که یهکیک بوو له بیرکاریزانه ههره چالاکهکان و بهتایبهت له تیۆری ژمارهکان، که به ههموو ژبانی خهریکی بیرکاری و پهزلی بیرکاری بووه و زۆرتین ژمارهی توژیینهوهی ههبووه. له وتهیهکی دهلیت: "ههموو شت کۆتایی دیت، تنهها ژماره به نهمری دهمینیتهوه."

له پیتسا گشتیه کانی دروست بیرکردنه وه، که بابه ته که ی بریتیه له پیتاسه و به لگه هیتانه وه. فیرمان دهکات چۆن پیتاسه ی شته کان بکه ین و به لگه بۆ دروستی شته که بئینه وه یان چۆن شتیک به درۆ بخینه وه. که واته بیرکاری بناغه که ی بریتیه له لوجیک، وه بگره لوجیککی زۆر پیشکه وتوه. بیردۆزیش ده فیککی سه لمیندراوه، که ده رگای گفتم و گۆی له سه ر داخراوه، وه پاک کراوه ته وه له تۆزی گومان. بیردۆز⁹⁷ به گشتی باسی دیارده یه که دهکات. بۆ نمونه: کۆکردنه وه ی دوو ژماره ی جووت، نه نجامه که ی هر دهکاته وه ژماره یه کی جووت. واته پیوست ناکات بین دوو، دوو ژماره بین تا قیبه یه وه بۆ نه وه ی بزاین؛ نه ری دهکاته وه ژماره ی جووت؟ نه مه واته چی؟ واته بیرکاری پشت به زانیاریه هنده کیه کان-به شی نابه ستیت بۆ گه یشتن به نه جامیکی هه مه کی-گشتی، که نه مه ش پنجه وانه ی زانسته سروشتیه کانه، وه که فیزیاء، که له زانیاریه هنده کیه کان به ره و یاسا هه مه کیه که داده کشتیت، واته پشت به (استقراء) ده به ستیت⁹⁸. له گه ل هه موو نه مانه ش، راستی بیرکاری، راستیه کی چیگیره و گۆرانی به سه ردا نایه ت، وه که چۆن تیۆری له زانسته سروشتیه کان ده کزیت شوړشی به سه ردا بکریت و تیۆریه کی باشتر بیت شوینی تیۆریه که ی پیش خوی بگریته وه! نه م شوړشه، له زانستی

⁹⁸ 'چۆن. ب کونوای' له شوینیک ده لیت: 'بیرکاری، بۆ من بریتیه له هۆبه-کۆمه له نمونه یه که؛ بیردۆزه کانیش ده برینیکن-ده سه ته واژه له هه مبه ر نمونه کان، مه رامیش له سه له مانندی بیردۆزه کان؛ پۆلینکردن و نه اوه له کردنی نمونه کانه.

فۆرمالی بیرکاری بوونی نییه، واته هیچ کاتیک شوپش به سهر راستیه کی
بیرکاریدا ناکریت. به لام یه کینک له مهرجه کانی تیوری له زانسته
سروشتییه کان، ئه وه یه که ده بئیت ئه و تیورییه ئه گهری هه له بوونی له ناو
هه ناویدا هه لگرتییت.⁹⁹

⁹⁹ محسین برهان - بۆدکاستی چارگ (ته قینه وه مه زنه که).

سهلماندن

Proof

سهلماندن، له سادهترین پیناسه بریتیه له بهلگه یهک (argument) که راستی و دروستی نهجامیک پشت راست دهکاته وه، نهک ته نیا له پشت گومانیک، به لکو له پشت هه موو گومانه کان. یاخود پیواندینیکه که پیکهاتوه له چند پیکهاته یهکی تیکه لکیشراوی یه قین به خش، بؤ دست خستنی ده نه جامیکی یه قین.¹⁰⁰ نامانچ و بنه ماکهش هر شه مه یه. له گهل شه شه دا، نه په یوه سته به شوین، نه په یوه سته به کات! کات له پشت سهلماندنه بیرکاریه کان هیچ گرنکیه کی نیه. ثقیلید بهر له 300 پیش زاین، چن دین بیردوژی سهلماند، زانیشی تا دنیا ماوه، شه بیردوژانه هر به راست ده مینه وه! له راستیدا میتودی سهلماندن ده گه پسته وه بؤ کریک، شه وان ده یانزانی شتیک راسته، به لام ده یانپرسی؛ بؤ چی راسته؟ بؤیه شه مهش به پیچه وانهی میسریه کان و بابلیه کان بوو، شه وان یاری سهلماندن نه بوون، واته نه یانده زانی بؤچی بیردوژیکی وه کو بیردوژی فیساکورس راسته؟ بؤیه کریکه کان به دوا ی شه وه لامی 'بؤچی' ییه وه بوون، که وه لامه که شیان ده سته کوت له پیکه ی به کارهینسانی شه قتل و لوجیکه وه.

¹⁰⁰ زانستی لوجیک. که مال شه مین گولپی. 2018 خانه ی چاپ و په خشی رینما-سلیمانی.

بۆ سه‌لماندنی ده‌قێک یان یاسایه‌کی گشتی بیرکاریانه، چەندین
 ڕیگای جیاواز هەن، بە جۆریک هەندی له ڕیگایانه بۆ سه‌لماندنی ده‌قێک
 کهم یان زۆر ده‌ست ناده‌ن. له‌گه‌ڵ ئەمەش، یه‌کێک له جوانیه‌کانی
 بیرکاری بریتیه له دۆزینه‌وه‌ی ئاسانترین و جوانترین ڕیگا بۆ گه‌یشتن
 به ئەنجام. سه‌ره‌رای ئەمەش، چەندین کێشه هەن، که بیرکاریه‌کان نازانن
 به چ میتۆدیک بۆ گۆڕه‌و کێشانه داچهن؟!



سهلماندنی راسته و خۆ

Direct proof

له بابته پيشوو و تمان چهندين ريگا و شيوازی جياواز ههيه بۆ سهلماندنی راستيهک، يه کتیک له و ريگايانه بریتيه له سهلماندن به شيوهيهکی راسته و خۆ. ئەم ريگايه ساده ترين جوړی سهلماندنه، ئەمەش کاتیک به کار دیت که ههچ ريگريههک له ههنگاوه کانی سهلماندنه که به روکمان نه گريت. ههلبهته ئەم ريگايه بۆ سهلماندنی هه موو راستيههک دهست نادات، بۆ ئەوهی دهقنیک به سهلماندنی راسته و خۆ راستيههکهی ده ربخهين، ئەوه پشت به و دهقه ده به ستیت که هه مانه، وهک: ناوبه نند و يه که کانی دهقه که. سهلماندنی راسته و خۆ زنجيره ههک له ههنگاوی لۆجیکيه له دهسته گريمانه يه که وه¹⁰¹ بۆ ده رنه نجاميني ويستراو. له گه له ئەوهش، تا پاده يه ک ناهه موو و بينزار که ره نووسيني هه موو ههنگاوه سه ره تاييه کانی سهلماندنیک له به لگه نه ويسته سه ره تاييه کانی بابته تیک به هه موو ورده کار يه کانه وه، بۆيه سهلماندنی راسته و خۆ تار پاده يه ک ريگا که ی کورت قه ديره. زۆر جار له ريگای سهلماندنی راسته و خۆ زۆر شتی ناماده کراو ههيه به کاری دهه تين، وهک:

¹⁰¹ رهنگه يه کتیک به رسیت، بۆچی له گومانه وه دهست پي ده کهين، گريمانه که له سه ر چ بنچينه يه ک دروست ده کهين؟ دروستکردنی گريمانه ئەویش هه ر به مزی لۆجیکه وهيه، واتا ناگريت بين به که يفی خۆمان گريمانه دروست بکهين، بۆ نمونه گريمانه ی له م شيوه: $1=2$ ، ئەوه ئەسلن هه ر ئەنجامیک له مه بکه ویته وه هه له يه، چونکه گريمانه که خۆی هه له يه. چونکه يه کتیک له ياساکانی لۆجیک ئەوهيه له گريمانه ی هه له (پيشه کی هه له)، ئەنجامی راستی لن ناکه ویته وه.

بیردوژیکى پيش خوى، يان ليمايه ک¹⁰² يان به موى پيناسه کانه وه. به لگه ستاندارده کان-نمونه ييه کان له سه لماندنې راسته و خو بریتيه له کومه لیک ريسای ساده ی ه لنجپيتان، که نه و ته کنيکانه ناسراون به بنده لوجيکيه کان. بى نمونه: ده مانه ویت دهسته واژه ی Q بسه لمیتين. نه گه ر توانيمان بناغه يه ک دانين که نه گه ر P راست بیت، نه وه Q یش راسته، واته $P \rightarrow Q$ ، ليره بى دهسته واژه ی P نه وه حتميه ين شتيک هيه راسته، که نه گه ر بیت و له و دهسته واژه يه راستی دهسته واژه ی Q ده ربخين، نه وه که واته Q راسته.

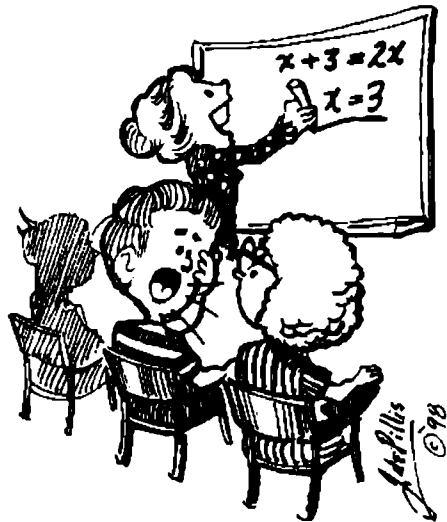
نمونه: ده مانه ویت بیسه لمیتين که؛ دو جاي هر ژماره يه کی جووتی نرينی دابه شی 4 ده بیت.

نیستا نیمه شتيکمان هيه به کاری دتین، نه ویش ژماره يه کی جووتی نرينی، له بهر نه وه ی ه موو ژماره يه کی جووتی نرينی به پنی پیناسه ی ژمارى جووت، له سه ر شیوه ی $2n$ دنووسریت، کاتيک n ژماره ی نرينی سروشتيه. نیستا $2n$ ژماره يه کی جووته به پنی پیناسه ی ژماره ی جووت (بناغه يه کمان دروستکرد). نیستا دین دو جاي ده که یين: $(2n)^2 = 4n^2$ دپاره دو جاي لای چه پ ده کاته نه و بره ی لای راست

¹⁰² لیمما (Lemma) له خزمه تی بیردوژ به کار دیت. وهختی له سه لماندنې بیردوژیک ده که یينه هنگاو یکی قورس، نه وه ده چین له دهره وه ی بیردوژه که نه و هنگاوه قورسه به جیا ده سه لمیتين، پاشان له ناو بیردوژه که خومان له هنگاوه قورسه که نه جات ده دین به ناو هیتانی لیمایه که.

$4n^2$ که دیاره نو راده یهش همیشه دابهشی 4 ده بیت. ¹⁰³ ■ بویه گیشتینه نهوی هه موو ژماره یهکی جووتی ئه رینی دابهشی 4 ده بیت. نهه مومکینه ئاسان و ساده بیت، به لام سه لماندن راسته و خو بناغهی زۆریک له سه لماندنه کانی تره له بیرکاریدا. هه موو میتوده کانی سه لماندن نه ونده ئاسان نین بهو شیوهی سه ره وه، بۆ نمونه سه لماندن به هوی هیلکاری به وه، سه لماندن به هوی ئینده کشنه وه.

لیره دهسته واژهی P بریتیه له ژماره یهکی جووتی ئه رینی که به پنی پیناسه ده تواند ریت به نه جامی لیکدانی 2 و ژماره یهکی ئه رینی سروشتی بنوسریت، وه دهسته واژهی Q بریتیه له دوو جای ژماره یهکی جووتی ئه رینی که دابهشی 4 ده بیت.



¹⁰³ نهو هیمایه ■ واته سه لماندنه که به کوتا گه پشت.

سه‌لماندن به هزی لیکدژییه‌وه

Proof by contradiction

سه‌لماندن به هزی لیکدژییه‌وه، به‌کیکه له میتۆده هه‌ره جوانه‌کانی سه‌لماندن له نیتو بیرکاریدا. له‌م میتۆده‌ی سه‌لماندنه‌دا، مومکینه سه‌لماندنی راسته‌وخز بۆ ده‌قیق کاریکی وه‌ها ئاسان نه‌بیت، وه له‌به‌ر ئه‌وه‌ی ئیمه بۆ هه‌ر ده‌قیکی بیرکاری، واته بۆ هه‌ر ده‌سته‌واژه‌یه‌کی بیرکاری، دوو وه‌لام هه‌یه؛ یان راسته یان هه‌له‌یه. ئیمه‌ش زۆر جار بۆ ئه‌وه‌ی راسته‌ی ده‌سته‌واژه‌یه‌ک ده‌رخه‌ین، ئه‌وه پینچه‌وانه‌ی ده‌سته‌واژه‌یه‌ک گریمان ده‌که‌ین، ئه‌گه‌ر پینچه‌وانه‌ی ده‌سته‌واژه‌یه‌ک راست ده‌رچوو، ئه‌وه ده‌سته‌واژه‌یه‌ک په‌سه‌نه‌که هه‌له‌یه، ئه‌گه‌ر پینچه‌وانه‌ی ده‌سته‌واژه‌یه‌ک په‌سه‌نه‌که هه‌له‌یه، ئه‌وه ده‌سته‌واژه‌یه‌ک په‌سه‌نه‌که راسته. نمونه: ئه‌گه‌ر بمانه‌ویست بوونی داره‌که‌ی پیش مالمان سه‌لمینم، ئه‌وه ده‌لیم ئه‌و داره بوونی نییه. به‌س ده‌بینم سه‌یبه‌ری هه‌یه و له تیشکی رۆژ ده‌ماپاریزیت، که‌واته ناکریت بوونی نه‌بیت، ئه‌مه‌ش واته داره‌که بوونی هه‌یه که له سه‌ره‌تاوه وتمان ئه‌و داره بوونی نییه، که چیه‌ی ئیستا ده‌لین سه‌یبه‌ری هه‌یه، که‌واته گه‌ریمان‌که‌مان هه‌له بووه، بۆیه داره‌که بوونی هه‌یه.

له بیرکاریدا ده‌سته‌واژه‌ی نابه‌جی (absurd)، بریتییه له لیکدژی ده‌سته‌واژه‌یه‌که. بۆ ئه‌م مه‌به‌سته‌ش بۆ سه‌لماندنی ده‌سته‌واژه‌یه‌ک به‌م میتۆده، هیاتیکی سور هه‌یه، که ده‌بیت پیوه‌ی پابه‌ندین:

- بۆ پیشاندانی ئەوەی که Q دەبیت راست بیت، وا دادەنێن که Q راست نییه. واتە وادادەنێن پێچەوانەی Q راسته.

- ئەو میتۆدانەی پیشتر هه‌مانه به‌کاری دینین بۆ دەرخواستی دەرئەنجامی ئەو گریمانه هه‌له‌یهی کردوومانه، له‌و شوێنه دوه‌ستین که له‌یه‌کیک له‌هه‌نگاوه‌کانی سه‌لماندنه‌که لیکدژی له‌گه‌ل گریمانه دروست ده‌بیت.

- کاتی دروستبوونی لیکدژه‌یه‌یک له‌گه‌ل هه‌ر یه‌کیک له‌هه‌نگاوه‌کانی سه‌لماندنه‌که و گریمانه‌که، ئەوه بۆمان دهرده‌که‌ویت پێچەوانەی ده‌سته‌واژه‌ ره‌سه‌نه‌که راست نییه، که‌واته ده‌سته‌واژه‌ ره‌سه‌نه‌که راسته.

نمونه بۆ ئەمه: سه‌لماندنه‌که‌ی ئیقلد له‌هه‌مبەر بوونی ناکرتا ژماره‌ی خۆبه‌ش، که گریمانی کرد که کوتادار (Finite) ژماره‌ی خۆبه‌ش هه‌یه بۆ ئەوه‌ی بیسه‌لمینیت ناکرتا ژماره‌ی خۆبه‌ش بوونی هه‌یه.



هه بوونی سه لماندن

Existence proofs

هه بوونی سه لماندن، پیشانی دعات یا خود دهیسه لمینیت که به راستی شتیک هه به له همبهر شتیک تریان نا. له بهر ئه وهی چه مکه بیرکاریه کسان زور بهی هه ره زوری په تین (Abstract)، ئه وه سه لماندنه کانی بوون و نه بوون ده توه ستین له به هه درانی کات و هه وه کانت بۆ دۆزینه وهی شتیک یان داتاشینی شتیک، که ئه م شته له راستیدا بوونی نییه و ناشیبیت! ته نانهت له باره په تییه کانیش.

دوو جور له سه لماندن هه بوون-بوون هه نه، په که میان: سه لماندن به هوی بونیاتنان (proof by constriction): که تیدا نمونهی بهرجه سته یی به ره م دهین له شته کان یان له تاییه تمه ندییه کان. دووه میان: هه بوونی سه لماندن، که پیی دهوترین سه لماندن به هوی نا- بونیاتنه وه (noncontractive proof): که لوجیکانه به پیی پیوست بۆ بوونی شتانیک ههنگاو ده نیت، به بی پیدانی ئه تهره یه ک¹⁰⁴ یان هیما په ک ده رباره ی نمونه یه ک.

سه لماندن بونیاتنه زور پوونه. ئه گه بیت و پیرسین ژماره ی جووت هه به که دابه شی 16 بیت؟ وه لامه که به لئ هه به، که سه لماندن کورت و پوخت بریتییه له 16 خوی. به شیوه ی دریز بریتییه له ئه وه ی

¹⁰⁴ ئه تهر: نیشانه و به لکه.

که 16 دابه‌شی خوی و دابه‌شی 2 ده‌بیت، وه 2 نهو ژماره‌یه که 16 به‌سه‌ری دابه‌ش ده‌بیت. به‌دلنیا‌یی چهن‌دین ژماره‌ی تر ده‌کریت له سه‌لماندنه‌که به‌کاربه‌ین‌دیریت، بۆنمونه هه‌موو به‌ش‌داربووه‌کانی 16 ده‌کریت له سه‌لماندنه‌که به‌کاربه‌ین‌دیریت، به‌لام بۆ نه‌وه‌ی بیسه‌لمینین شتیک بوونی هه‌یه، پتوسته تهنیا یه‌ک نمونه دیار بخینه روو له ناو سه‌لماندنه‌که له‌کاتیک چهن‌دین نمونه‌ی تر بوونی هه‌یه.

سه‌لماندنی نا‌بوون‌اتهر: ده‌کریت زور ورد بیت، بۆنمونه: ده‌کریت توانای نه‌وه‌مان هه‌بیت که پیشانی بده‌ین نه‌و هاوکیشه‌یه $9x^5 + 28x^3 + 10x + 17 = 0$ شیکاری هه‌یه. به‌بی وتنی نه‌وه‌ی ئایا شیکاره‌که چیه و چۆنه! نه‌گه‌ر له هاوکیشه‌که ترخی سفر بده‌ین به x واته $x = 0$ نه‌وه له لای چه‌پ 17 ده‌مین‌ته‌وه، به‌لام بۆ $x = -1$ نه‌جامه‌که ده‌کاته 30-. له‌م نه‌جامانه‌ش ده‌توانین بیردۆزی به‌های ناوه‌ندی به‌کاربه‌ین بۆ نه‌وه‌ی پیشانی بده‌ین که بۆ هه‌ر ترخیکی y له نیوان 30- و 17، نه‌وه ترخیک هه‌یه بۆ x له نیوان 1- و 0 که 0 به‌ره‌م دینیت له هاوکیشه‌که. له‌به‌ر نه‌وه‌ی لای راستی هاوکیشه‌که سفره، نه‌وه شیکاریک بۆ هاوکیشه‌که هه‌یه به‌پنی نه‌و سنوره‌ی سه‌روه که دیاریمان کردوه، به‌که‌میک کارکردن له‌سه‌ هاوکیشه‌که پیشانی ده‌دات که شیکاره‌که بی هاوتایه- تاکه شیکاری شیاو له به‌کاره‌ینانی ژماره راستیه‌کانه. به‌کورتی واته: چونکه به‌پیدانی دوو نرخ 1- & 0 دوو ژماره‌مان بۆ ده‌چوو 17 & 30-، دیاریشه سفر ده‌که‌ویته نه‌و

نیوانه، بویه به ئاوهری¹⁰⁵ ده بیئت نرخیک هه بیئت که ده بیئتته ره گی-شیکاری
هارکیشه که، چونکه 0 له نیوانه بوونی هه یه.

پنجهوانه دژهکان و دژه نمونهکان

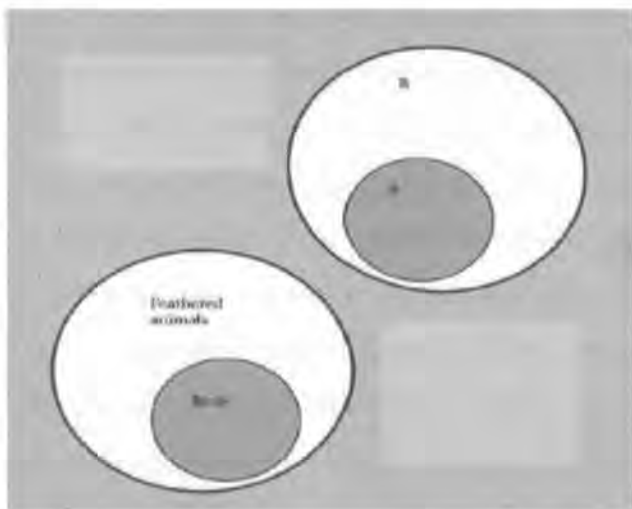
Contrapositives and counterexamples

پنجهوانه ی دهسته واژه ی p ، ده کریت پی بلین نا $\neg p$. پنجهوانه ی نه و دهسته واژه یه راسته نه گهر p هله بیت، وه هله یه نه گهر p راست بیت. وهک: هموو مریشکیک سپیبه، پنجهوانه که ی ده بیت: هموو نامریشکیک نا سپیبه. لیره گرنه چوژنیه تی و راستیتی وهک خوی بمینته وه. په کیک له یاسا زور گرنه کانی لوجیک بریتیه له وه ی نه گهر $p \rightarrow q$ راست بیت، نه وه هاوتای $\neg p \rightarrow \neg q$ راسته، واته نه و دووانه جیاوازیه کیان نیه. هندی جار سه لماندن ی دهسته واژه یه ک به هوی پنجهوانه که ی ئاسانتره وهک له دهسته واژه په سه نه که، نه م جزره سه لماندنش پی نی دهوتریست سه لماندن به هوی پنجهوانه دژهکان. به کارهیتانی نه میتوده ی سه لماندن ته نیا کاتیک سه رکه وتوو نه گهر بیت و لیدوانه که سه لمیندریت راسته، واته توشی دژه یه ک نه بین لینی. به لام له توژیژنه وه بیرکاریه کان، کاتیک دهسته واژه یه کی په سه ن گریمانه یه که، نه وه همیشه چانسی نه وه هیه که دهسته واژه که راست نه بیت، وه سه لماندنیش بوونی نه بیت! له م باره ش دوو شت هیه، نه وه ته پنجهوانه ی دهسته واژه که سه لمینی له بری دهسته واژه په سه نه که، نه ویتریش نه وه یه نمونه یه ک بدوژیته وه که دهسته واژه که به درو بیخاته وه واته دژی دهسته واژه که بیت. نه گهر دهسته واژه که مان Q بلیت: هموو ژماره جووته ئه ریښه کان دابه شی 4 ده بن، نه وه دیاره 6 جووته و ئه ریښه یه، به لام 4 دابه ش ناکات، به و

ژماره 4 دهوترین دژه نمونه¹⁰⁶ (counterexample) که دهسته واژه کی بههله خسته وه، واته *disprove*.

دهسته واژه: نهگه دانیهک له کومه لهی A بیت، نه وه ده بیت له کومه لهی B یش بیت. پیچه وانه دژه کی ده بیت: نهگه دانیهک له کومه لهی B نه بیت، نه وه نه دانیه ناکریت له A بیت.

دهسته واژه: نهگه گیانله بهره که بالدار بیت، نه وه ده بیت په ره موچی ه بیت. پیچه وانه دژه کی ده بیت: نهگه گیانله بهره که په ره موچی نه بیت، نه وه نه گیانله بهره بالدار نییه. (نه وه سه لماندنه کافی نییه که هه مو نه گیانله بهرانهی په ره موچیان هیه، نه وه بالندن).



¹⁰⁶ دوزینه وهی نه نمونه له هه ندی بانگیشهی بیرکاریانه بز راستی شتیک کاریکی وهها ناسان نییه.

تیخویندنی بیرکاریانه

Mathematical induction

یه کیک تر له میتوده کانی سه لماندن، بریتیه له سه لماندن به هوی تیخویندنه وه¹⁰⁷. تیخویندنه وه (Induction) بریتیه له و شوینکه وتنی هنده کیه کان بۆ به دسته پیتانی بریاریکی هه مکی (یاسای گشتی). له میتوده نه نامه کان نه و دسته وازانه ده گریته خوی که پشت به ژماره سروشتیه کان ده به ستن، بۆیه نه و دسته وازه ی سه لمینه ی بۆ ده گریته بۆ شتیکی له و شیوه یه: بۆ هر نرخیکی n , $n = 1, 2, 3, \dots$, $p(n)$ راسته. بۆ سه لماندن ده دسته وازه یه کی له م شیوه، چوار ههنگاو هیه ده بیت جی به جیکه ی بۆ ده رختنی راستی و دروستی یاسایه ک، نه وانیش:

1- پیشانی بده که نه وه ی هه مانه راسته نه گه ر بیت و $n = 1$, واته $p(1)$ سه لمینه.

2- گریمان بکه که نه وه ی هه مان راسته نه گه ر بیت و $n = k$ کاتیک $k \geq 1$.

3- پیشان بده نه گه ر $p(k)$ راست بیت، نه وه $p(k + 1)$ راسته.

¹⁰⁷ وه رگتیر 'ماریوان عبداله' له پرتوکی 'پوخته ی لوژیک' وشه ی تیخویندن ی به کارهیناوه له بهرام بهر وشه ی 'Induction' پرتوکه که له بلاوگراوه کانی ناوه ندی 'زه هه نده' سالی 2019 سلیمانی.

4- ئەمەش $p(n)$ راست دەردەخات بۆ هەموو ژمارە یەکێکی

$$n, \text{ کاتیک } n = 1, 2, 3, \dots$$

هەنگاوی چوارەم له سێ هەنگاوێکی پێش خۆی سەرچاوه
 دەگرنێت یەک بەدوای یەک، واتە هەنگاوی یەکەم، هەوینسی هەنگاوی
 دووهمە، ئی دووهم هەوینسی هەنگاوی سێیەمە، بەو شێوە، ئەمانەش که
 پێی دەوترێت: **Bootstrap argument**. کیشە فەلسەفییەکان له گەل
 چەمکه کانی ناکۆتا دەبینن هۆی ئەوهی که زۆر له گەل ئه مێتۆده
 یهکنه گرنهوه، تانانەت دهگاتە رادهی رەتکردنەوهشیان هەندێ جار.

INDUCTIVE METHOD TO PROVE

$P(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

STEP 1: $P(1)$ states: $1 = \frac{1}{2} \times 1 \times (1+1)$. So $P(1)$ is true.

STEP 2: Assume $P(k)$, i.e. $1 + 2 + \dots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$, for $k \geq 1$.

STEP 3: Show that $P(k)$ implies $P(k+1)$:

Replace n with $(k+1)$ in the definition of $P(n)$, to get

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

This is what we wish to prove using the assumption of step 2.
 Using step 2 on the sum of the first k terms shows that:

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1)$$

But by either multiplying out the brackets or by factorizing the
 right-hand side as $(k+1) \times \left(\frac{1}{2}k+1\right)$ and simplifying we obtain

$$\frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2), \text{ establishing } P(k+1).$$

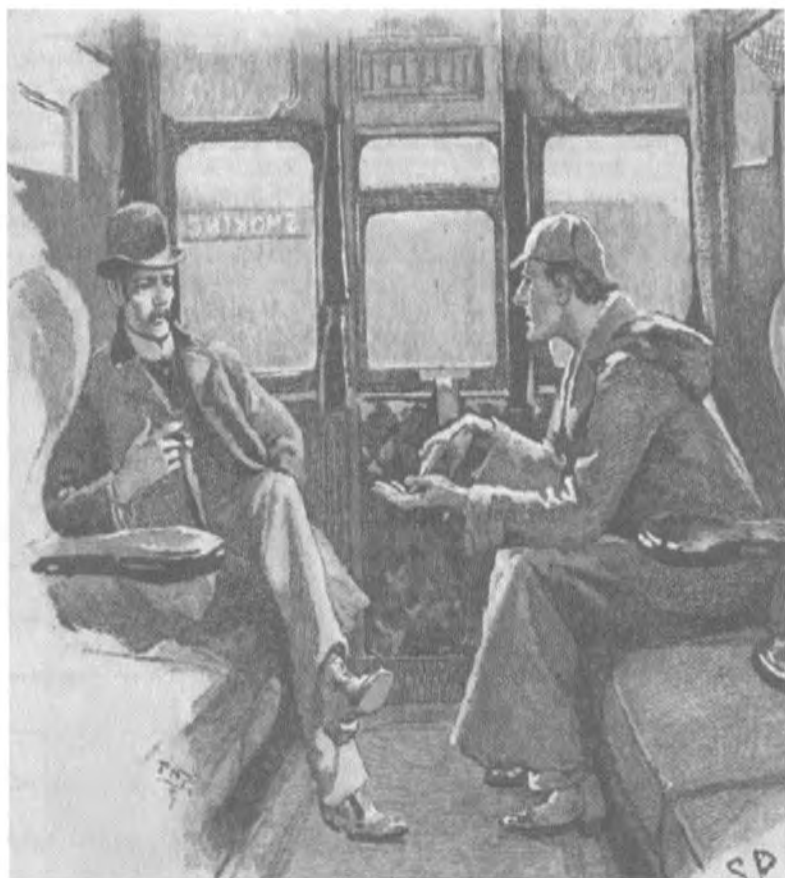
STEP 4: The general statement $P(n)$
 is therefore true by induction.

لابردن و هیزلیترین

Exhaustion and elimination

سه‌لماندن به‌هۆی هیزلیترین، ئه‌و سه‌لماندنه‌یه که کیشه‌که ده‌کاته چند به‌شیک، که هه‌ر به‌شه و به‌جیا مامه‌له‌ی له‌گه‌ل ده‌کاته. به‌کیک له کیشه میژوو‌یه‌کان که به‌و شیوه سه‌لمیندراوه، بیردۆزی چوار رهنه‌که‌یه (Four color theorem)، که ئه‌م بیردۆزه سه‌ره‌تا کرایه چند به‌شیک که نه‌نیا کۆمپیوتەر ده‌یتوانی لینی تیگات، لیره‌ش پرسیاره‌ک دیته ئاراوه: ئاخۆ به‌راستی به‌رنامه‌یه‌کی هیزلی‌پراوی کۆمپیوتەر ده‌بیته سه‌رچاوه‌ی له دایکبوونی سه‌لماندنی کیشه‌یه‌ک؟

له‌یه‌که‌مین سه‌رنج، پڕۆسه‌ی لابردنی 'شیرۆک هۆلمس' دیته‌وه یاد، که ده‌شیت وه‌ک پڕۆسه‌یه‌کی هیزلی‌ترین واییت. به‌لام له‌ راستیدا لابردن، سه‌رنج خسته‌سه‌ر له‌ گشت ئه‌گه‌ره‌کان دور ده‌خاتوه، ئه‌مه‌ش له راستیدا رینگای پیچه‌وانه‌ی دژه (contrapositive). به‌کاره‌یتانی شیکردنه‌وه‌ی هیزلی‌ترین له‌ گومانه‌کانی تر، له کیشه‌یه‌کی تاوانکاری، ده‌سه‌لمینن کومه‌لیک که‌س هه‌موویان بی تاوانن، بۆیه ده‌توانین بلین: ئه‌گه‌ر پیاو کوژه‌که به‌ریز (پاوسبۆتن) نییه، ئه‌وه هیچ یه‌ک له‌ گومان لیکراوه‌کان پیاوکۆژینه. پیچه‌وانه دژه‌که‌ی بریتیه له: ئه‌گه‌ر یه‌کیک له گومان لیکراوه‌کان تاوانباره‌که بیت، ئه‌وه پیاو کوژه‌که به‌ریز (پاوسبۆتنه). وادانانه سه‌ره‌تاییه‌که، ئه‌وه‌یه که له‌گه‌ل ئه‌وه‌ی ئیمه خسته‌ی ته‌واوی گومان لیکراوه‌کانمان هه‌یه، زۆر جار په‌راویز ده‌خرین.

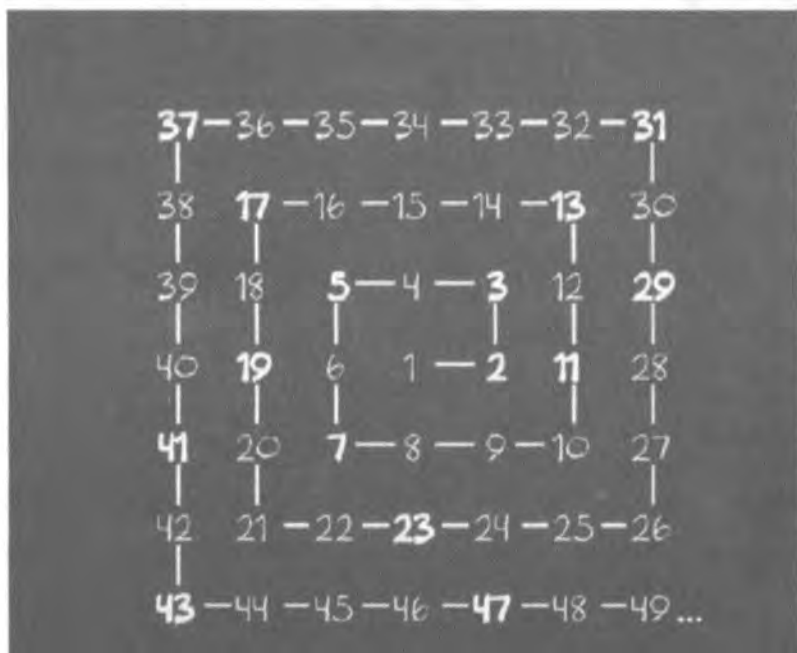


تیوری ژماره‌کان

Number theory

تیوری ژماره‌کان، به کتیکي تره له لقه‌کانی بیرکاری، ده‌توانین بلین کؤنترین لقی بیرکارییه له دوی ئەندازه، که جومگه‌یه‌کی گرنکه له زانستی ژماره. پیشکوتن و دۆزینه‌وه له‌م لقی بیرکاری و‌ها ئاسانییه و زور کهس به لقیکی وشک و چارسی ده‌بینن، که له 20 ساله‌ی رابردوو، پیشکوتنکی و‌ها له‌م لقه پووینه‌داوه. تیوری ژماره‌کان بریتیه له و تیورییه‌ی که لیکۆلینه‌وه له هه‌مبەر ژماره‌کان و تایه‌تمندییه‌کانی دهره‌وه و ناوه‌وه‌ی ژماره‌کان ده‌کات، و ته‌فسیریان ده‌کات. تیوری ژماره‌کان لیکۆلینه‌وه له مه‌ر گشت جزره‌کانی ژماره‌ده‌کات، به‌لام له‌گه‌ل ئەمه‌ش، کۆمه‌له‌ی ژماره‌ خۆبه‌شه‌کان سه‌ره‌کیتین کۆمه‌له‌ن له تیوری ژماره‌کان و به‌شیکي سه‌ره‌کیه له بیرکردنه‌وه‌مان له و جیهانه. ئەگه‌ر چی کارکردن له‌گه‌ل ژماره‌کان په‌نگه وشک و بیزارکه‌ر بیت، سه‌ره‌پای ئەوه‌ش، هه‌رگیز نابیت ژماره‌کان و تیوری ژماره‌کان به‌که‌م بزانی، چونکه هه‌ر له‌سۆنگه‌ی ژماره‌کانه‌وه، پوو به‌رووی کۆمه‌لیک پرسیار زور قول و جدی ده‌بینه‌وه و کیشه‌کان چاره‌سه‌ر ده‌که‌ین. له‌به‌ر ئەوه‌ی ژماره‌ خۆبه‌شه‌کان بناغه‌ی دروستبوونی ژماره‌ سروشتیه‌کانن، بۆیه زۆریک له کیشه‌کان له تیوری ژماره‌کان په‌یوه‌ندی به ژماره‌ خۆبه‌شه‌کانه‌وه هه‌یه. له‌گه‌ل ئەمه‌ش، ژماره‌ خۆبه‌شه‌کان، چه‌قی تیوری ژماره‌کانه له گرنگی و به‌کاره‌ینانیان، که له کریپتۆگرافی (cryptography) و ئاسایشی و پاراستی ئیمپله‌کان،

یان گواستنه وه بانکییه کان، ئەمانه گشتیان بونیاتیکی ژماره ییان ههیه، که له نووسینی ژماره دابه شه کان (ژماره ی دابه ش) به هه ی لیکنانی خۆبه شه کان. دروستکردنی و کۆد له ژماره خۆبه شه کان رهنگه ئاسان بیت، به لام شکاندنیان، ئیجگار قورس و گرانه. ئەم لقه، په تی ترین لقی بیرکاریه.



سه لماندنه که ی ئیقید له مهر ناکوتایی ژماره خوبه شه کان

Euclid's proof of the infinite primes

ئیقید 3000 سال بهر له ئیستا، له پرتوکه که ی به ناوی دانه کان (elements)، دهیسه لمینیت که ناکوتا له ژماره ی خوبه شمان هیه، واتا کومه له ی ژماره خوبه شه کان کومه له یه کی ناکوتایه (Infinite). ئیقید بۆ سه لماندن ئه م راستیه، میتودی دژهه ک به کار دینیت بۆ ئه وه ی ئه مه بسه لمینیت، واتا پیچه وانه که ی گریمانان ده کات، وا داده نیت که کوتادار (Finite) له ژماره ی خوبه شمان هیه. به م شیوه یه، گریمانان ده کات: کومه له ی ژماره خوبه شه کان کومه له یه کی کوتاداره.

سه لماندن: وا داده نیتین که N ژماره ی خوبه شمان هیه. له بهر ئه وه ی N کومه له یه کی کوتاداره له ژماره ی خوبه ش، ئه وه ده توانین ژماره کانی ناو N به و شیوه ریز بکه یین: P_1, \dots, P_N . ئیستا له و چند ژماره خوبه شه ی هه مانه، ژماره یه کی تر دروستده که یین، ناوی ده نین x ، که x له هیچ یه ک له دانه کانی ناو N ناچیت، واته له ته واوی ژماره کانی ناو N جیاوازه. دروستکردنی x به م شیوه یه:

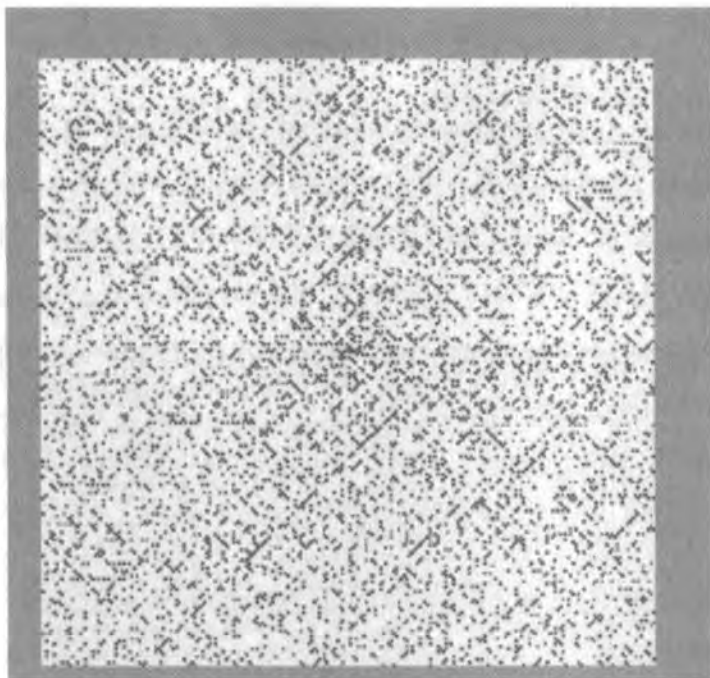
$$x = (p_1 \times p_2 \times \dots \times p_N) + 1$$

واته هه موو خوبه شه کان لیکده ده یین و دواتر کوی 1 ده که یین. ئیستا دوو ئه گه ر هیه، ئه ویش: x خوبه شه یان خوبه ش نییه؟

(1) ئەگەر x خۆبەش بیت، ئەو دەگەینە دژەیهک، چونکه ئیمه گریمانمان کردوو N کۆمهلهیهکی کۆتاداره و ههـموو ژماره خۆبەشەکانی تێدايه، کهچی ئیستا x یکمان دۆزیهوه، که خۆبەشە و له ناو N دانیه، که واته N کۆتادار نیه، ئەمەش واته N ناکۆتایه، واته، ناکۆتا ژماره‌ی خۆبەشمان هه‌یه.

(2) ئەگەر x خۆبەش نه‌بیت، واته x ژماره‌یهکی دابه‌شە، له‌بەر ئەوه‌ی هه‌موو ژماره‌یهکی دابه‌ش به‌هۆی لیکدانی چەند ژماره‌یهکی خۆبەش دهنووسریت، ئەوه x له‌ئنجامی لیکدانی چەند خۆبەشیک دهنووسریت. ئەگەر ئیستا x دابه‌شی هه‌ر یه‌ک له‌خۆبەشەکانی ناو N بکه‌ین ئەوه ماوه‌یهک دهمینیته‌وه، که ئه‌ویش بریتیه له 1، ئەمه واته x دابه‌شی هه‌یج یه‌ک له‌خۆبەشەکانی ناو N نابیت، وه له‌بەر ئەوه‌ی x له‌خۆبەشەکانی ناو N دروستکرا‌بوو، که واته x ته‌نیا دابه‌شی خۆی و 1 ده‌بیت، ئەمەش واته x ژماره‌یهکی خۆبەشە. ده‌رکه‌وت x خۆبەشە، به‌پێی خالی یه‌که‌م، که واته بۆمان ده‌رده‌که‌ویت x خۆبەشیکه و له‌ ناو N نیه، که واته ئەو گریمانه‌ی وتمان: کۆتادار ژماره‌ خۆبەشمان هه‌یه، هه‌له‌ ده‌رچوو. که واته پێچه‌وانه‌که‌ی راسته، که ناکۆتا ژماره‌ی خۆبەشمان هه‌یه

■



ئهم ویننهی سه‌رهوه، 400,000 ژماره ده‌نوینیت، که خاله
ره‌شه‌کان، ناماژهن بۆ ژماره خۆبه‌شه‌کان.

خۆبه شه دووانه کان

Twin primes

خۆبه شه دووانه کان، ئهو ژماره خۆبه شاننه که مه و دای نینوانیان به کسانه. نه گهر سه رنجی ژماره خۆبه شه کانی بدهین $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 43, 47, 53, \dots$ له ناو کومه له ی ژماره خۆبه شه کان $11 \& 13$ ، $17 \& 19$ ، $29 \& 31$ ، $41 \& 43$ خۆبه شی دووانه، چونکه جیاوازی نینوانیان بریتیه له 2 به که. ههروهها $3, 5, 7$ ، 11 ، 13 ، 17 ، 19 ، 23 ، 29 ، 31 ، 37 ، 41 ، 43 ، 47 ، 53 ، 59 ، 67 ، 71 ، 73 ، 79 ، 83 ، 89 ، 97 ، 101 ، 103 ، 107 ، 109 ، 113 ، 127 ، 131 ، 137 ، 139 ، 149 ، 151 ، 157 ، 163 ، 167 ، 173 ، 179 ، 181 ، 191 ، 193 ، 197 ، 199 ، 211 ، 223 ، 227 ، 229 ، 233 ، 239 ، 241 ، 251 ، 257 ، 263 ، 271 ، 277 ، 281 ، 283 ، 293 ، 307 ، 311 ، 313 ، 317 ، 331 ، 337 ، 347 ، 353 ، 359 ، 367 ، 373 ، 379 ، 383 ، 389 ، 397 ، 401 ، 409 ، 419 ، 431 ، 433 ، 439 ، 443 ، 449 ، 457 ، 461 ، 463 ، 467 ، 479 ، 487 ، 491 ، 499 ، 503 ، 509 ، 521 ، 523 ، 541 ، 547 ، 557 ، 563 ، 569 ، 577 ، 587 ، 593 ، 599 ، 607 ، 613 ، 617 ، 619 ، 631 ، 641 ، 643 ، 647 ، 653 ، 659 ، 661 ، 673 ، 677 ، 683 ، 689 ، 691 ، 697 ، 709 ، 719 ، 727 ، 733 ، 739 ، 743 ، 751 ، 757 ، 761 ، 769 ، 773 ، 787 ، 797 ، 809 ، 811 ، 821 ، 823 ، 827 ، 829 ، 833 ، 839 ، 853 ، 857 ، 859 ، 863 ، 877 ، 881 ، 883 ، 887 ، 893 ، 899 ، 907 ، 911 ، 919 ، 929 ، 937 ، 941 ، 947 ، 953 ، 967 ، 971 ، 977 ، 983 ، 989 ، 991 ، 997 ، 1009 ، 1013 ، 1019 ، 1021 ، 1031 ، 1033 ، 1039 ، 1043 ، 1049 ، 1051 ، 1057 ، 1063 ، 1069 ، 1073 ، 1079 ، 1087 ، 1091 ، 1093 ، 1097 ، 1103 ، 1109 ، 1117 ، 1123 ، 1129 ، 1133 ، 1139 ، 1147 ، 1151 ، 1157 ، 1163 ، 1169 ، 1171 ، 1177 ، 1181 ، 1183 ، 1187 ، 1193 ، 1199 ، 1201 ، 1207 ، 1213 ، 1217 ، 1223 ، 1229 ، 1231 ، 1237 ، 1241 ، 1243 ، 1247 ، 1249 ، 1253 ، 1259 ، 1261 ، 1267 ، 1271 ، 1273 ، 1277 ، 1283 ، 1289 ، 1291 ، 1297 ، 1301 ، 1303 ، 1307 ، 1309 ، 1313 ، 1319 ، 1321 ، 1327 ، 1329 ، 1331 ، 1333 ، 1337 ، 1339 ، 1343 ، 1349 ، 1351 ، 1357 ، 1361 ، 1363 ، 1367 ، 1369 ، 1373 ، 1379 ، 1381 ، 1387 ، 1391 ، 1393 ، 1397 ، 1399 ، 1403 ، 1409 ، 1411 ، 1417 ، 1423 ، 1429 ، 1433 ، 1439 ، 1443 ، 1447 ، 1451 ، 1453 ، 1459 ، 1463 ، 1469 ، 1471 ، 1477 ، 1481 ، 1483 ، 1487 ، 1489 ، 1493 ، 1499 ، 1501 ، 1507 ، 1511 ، 1513 ، 1517 ، 1519 ، 1523 ، 1529 ، 1531 ، 1537 ، 1541 ، 1543 ، 1547 ، 1549 ، 1553 ، 1559 ، 1561 ، 1567 ، 1571 ، 1573 ، 1577 ، 1579 ، 1583 ، 1589 ، 1591 ، 1597 ، 1601 ، 1603 ، 1607 ، 1609 ، 1613 ، 1619 ، 1621 ، 1627 ، 1629 ، 1631 ، 1633 ، 1637 ، 1639 ، 1643 ، 1649 ، 1651 ، 1657 ، 1661 ، 1663 ، 1667 ، 1669 ، 1673 ، 1679 ، 1681 ، 1683 ، 1687 ، 1689 ، 1693 ، 1699 ، 1701 ، 1703 ، 1707 ، 1709 ، 1713 ، 1719 ، 1721 ، 1723 ، 1727 ، 1729 ، 1731 ، 1733 ، 1737 ، 1739 ، 1743 ، 1749 ، 1751 ، 1753 ، 1757 ، 1759 ، 1763 ، 1769 ، 1771 ، 1777 ، 1781 ، 1783 ، 1787 ، 1789 ، 1793 ، 1799 ، 1801 ، 1803 ، 1807 ، 1809 ، 1813 ، 1819 ، 1821 ، 1823 ، 1827 ، 1829 ، 1831 ، 1833 ، 1837 ، 1839 ، 1843 ، 1849 ، 1851 ، 1853 ، 1857 ، 1861 ، 1863 ، 1867 ، 1869 ، 1873 ، 1879 ، 1881 ، 1883 ، 1887 ، 1889 ، 1893 ، 1899 ، 1901 ، 1903 ، 1907 ، 1909 ، 1913 ، 1919 ، 1921 ، 1923 ، 1927 ، 1929 ، 1931 ، 1933 ، 1937 ، 1939 ، 1943 ، 1949 ، 1951 ، 1953 ، 1957 ، 1961 ، 1963 ، 1967 ، 1969 ، 1973 ، 1979 ، 1981 ، 1983 ، 1987 ، 1989 ، 1993 ، 1999 ، 2001 ، 2003 ، 2007 ، 2009 ، 2013 ، 2019 ، 2021 ، 2023 ، 2027 ، 2029 ، 2031 ، 2033 ، 2037 ، 2039 ، 2043 ، 2049 ، 2051 ، 2053 ، 2057 ، 2061 ، 2063 ، 2067 ، 2069 ، 2073 ، 2079 ، 2081 ، 2083 ، 2087 ، 2089 ، 2093 ، 2099 ، 2101 ، 2103 ، 2107 ، 2109 ، 2113 ، 2119 ، 2121 ، 2123 ، 2127 ، 2129 ، 2131 ، 2133 ، 2137 ، 2139 ، 2143 ، 2149 ، 2151 ، 2153 ، 2157 ، 2161 ، 2163 ، 2167 ، 2169 ، 2173 ، 2179 ، 2181 ، 2183 ، 2187 ، 2189 ، 2193 ، 2199 ، 2201 ، 2203 ، 2207 ، 2209 ، 2213 ، 2219 ، 2221 ، 2223 ، 2227 ، 2229 ، 2231 ، 2233 ، 2237 ، 2239 ، 2243 ، 2249 ، 2251 ، 2253 ، 2257 ، 2261 ، 2263 ، 2267 ، 2269 ، 2273 ، 2279 ، 2281 ، 2283 ، 2287 ، 2289 ، 2293 ، 2299 ، 2301 ، 2303 ، 2307 ، 2309 ، 2313 ، 2319 ، 2321 ، 2323 ، 2327 ، 2329 ، 2331 ، 2333 ، 2337 ، 2339 ، 2343 ، 2349 ، 2351 ، 2353 ، 2357 ، 2361 ، 2363 ، 2367 ، 2369 ، 2373 ، 2379 ، 2381 ، 2383 ، 2387 ، 2389 ، 2393 ، 2399 ، 2401 ، 2403 ، 2407 ، 2409 ، 2413 ، 2419 ، 2421 ، 2423 ، 2427 ، 2429 ، 2431 ، 2433 ، 2437 ، 2439 ، 2443 ، 2449 ، 2451 ، 2453 ، 2457 ، 2461 ، 2463 ، 2467 ، 2469 ، 2473 ، 2479 ، 2481 ، 2483 ، 2487 ، 2489 ، 2493 ، 2499 ، 2501 ، 2503 ، 2507 ، 2509 ، 2513 ، 2519 ، 2521 ، 2523 ، 2527 ، 2529 ، 2531 ، 2533 ، 2537 ، 2539 ، 2543 ، 2549 ، 2551 ، 2553 ، 2557 ، 2561 ، 2563 ، 2567 ، 2569 ، 2573 ، 2579 ، 2581 ، 2583 ، 2587 ، 2589 ، 2593 ، 2599 ، 2601 ، 2603 ، 2607 ، 2609 ، 2613 ، 2619 ، 2621 ، 2623 ، 2627 ، 2629 ، 2631 ، 2633 ، 2637 ، 2639 ، 2643 ، 2649 ، 2651 ، 2653 ، 2657 ، 2661 ، 2663 ، 2667 ، 2669 ، 2673 ، 2679 ، 2681 ، 2683 ، 2687 ، 2689 ، 2693 ، 2699 ، 2701 ، 2703 ، 2707 ، 2709 ، 2713 ، 2719 ، 2721 ، 2723 ، 2727 ، 2729 ، 2731 ، 2733 ، 2737 ، 2739 ، 2743 ، 2749 ، 2751 ، 2753 ، 2757 ، 2761 ، 2763 ، 2767 ، 2769 ، 2773 ، 2779 ، 2781 ، 2783 ، 2787 ، 2789 ، 2793 ، 2799 ، 2801 ، 2803 ، 2807 ، 2809 ، 2813 ، 2819 ، 2821 ، 2823 ، 2827 ، 2829 ، 2831 ، 2833 ، 2837 ، 2839 ، 2843 ، 2849 ، 2851 ، 2853 ، 2857 ، 2861 ، 2863 ، 2867 ، 2869 ، 2873 ، 2879 ، 2881 ، 2883 ، 2887 ، 2889 ، 2893 ، 2899 ، 2901 ، 2903 ، 2907 ، 2909 ، 2913 ، 2919 ، 2921 ، 2923 ، 2927 ، 2929 ، 2931 ، 2933 ، 2937 ، 2939 ، 2943 ، 2949 ، 2951 ، 2953 ، 2957 ، 2961 ، 2963 ، 2967 ، 2969 ، 2973 ، 2979 ، 2981 ، 2983 ، 2987 ، 2989 ، 2993 ، 2999 ، 3001 ، 3003 ، 3007 ، 3009 ، 3013 ، 3019 ، 3021 ، 3023 ، 3027 ، 3029 ، 3031 ، 3033 ، 3037 ، 3039 ، 3043 ، 3049 ، 3051 ، 3053 ، 3057 ، 3061 ، 3063 ، 3067 ، 3069 ، 3073 ، 3079 ، 3081 ، 3083 ، 3087 ، 3089 ، 3093 ، 3099 ، 3101 ، 3103 ، 3107 ، 3109 ، 3113 ، 3119 ، 3121 ، 3123 ، 3127 ، 3129 ، 3131 ، 3133 ، 3137 ، 3139 ، 3143 ، 3149 ، 3151 ، 3153 ، 3157 ، 3161 ، 3163 ، 3167 ، 3169 ، 3173 ، 3179 ، 3181 ، 3183 ، 3187 ، 3189 ، 3193 ، 3199 ، 3201 ، 3203 ، 3207 ، 3209 ، 3213 ، 3219 ، 3221 ، 3223 ، 3227 ، 3229 ، 3231 ، 3233 ، 3237 ، 3239 ، 3243 ، 3249 ، 3251 ، 3253 ، 3257 ، 3261 ، 3263 ، 3267 ، 3269 ، 3273 ، 3279 ، 3281 ، 3283 ، 3287 ، 3289 ، 3293 ، 3299 ، 3301 ، 3303 ، 3307 ، 3309 ، 3313 ، 3319 ، 3321 ، 3323 ، 3327 ، 3329 ، 3331 ، 3333 ، 3337 ، 3339 ، 3343 ، 3349 ، 3351 ، 3353 ، 3357 ، 3361 ، 3363 ، 3367 ، 3369 ، 3373 ، 3379 ، 3381 ، 3383 ، 3387 ، 3389 ، 3393 ، 3399 ، 3401 ، 3403 ، 3407 ، 3409 ، 3413 ، 3419 ، 3421 ، 3423 ، 3427 ، 3429 ، 3431 ، 3433 ، 3437 ، 3439 ، 3443 ، 3449 ، 3451 ، 3453 ، 3457 ، 3461 ، 3463 ، 3467 ، 3469 ، 3473 ، 3479 ، 3481 ، 3483 ، 3487 ، 3489 ، 3493 ، 3499 ، 3501 ، 3503 ، 3507 ، 3509 ، 3513 ، 3519 ، 3521 ، 3523 ، 3527 ، 3529 ، 3531 ، 3533 ، 3537 ، 3539 ، 3543 ، 3549 ، 3551 ، 3553 ، 3557 ، 3561 ، 3563 ، 3567 ، 3569 ، 3573 ، 3579 ، 3581 ، 3583 ، 3587 ، 3589 ، 3593 ، 3599 ، 3601 ، 3603 ، 3607 ، 3609 ، 3613 ، 3619 ، 3621 ، 3623 ، 3627 ، 3629 ، 3631 ، 3633 ، 3637 ، 3639 ، 3643 ، 3649 ، 3651 ، 3653 ، 3657 ، 3661 ، 3663 ، 3667 ، 3669 ، 3673 ، 3679 ، 3681 ، 3683 ، 3687 ، 3689 ، 3693 ، 3699 ، 3701 ، 3703 ، 3707 ، 3709 ، 3713 ، 3719 ، 3721 ، 3723 ، 3727 ، 3729 ، 3731 ، 3733 ، 3737 ، 3739 ، 3743 ، 3749 ، 3751 ، 3753 ، 3757 ، 3761 ، 3763 ، 3767 ، 3769 ، 3773 ، 3779 ، 3781 ، 3783 ، 3787 ، 3789 ، 3793 ، 3799 ، 3801 ، 3803 ، 3807 ، 3809 ، 3813 ، 3819 ، 3821 ، 3823 ، 3827 ، 3829 ، 3831 ، 3833 ، 3837 ، 3839 ، 3843 ، 3849 ، 3851 ، 3853 ، 3857 ، 3861 ، 3863 ، 3867 ، 3869 ، 3873 ، 3879 ، 3881 ، 3883 ، 3887 ، 3889 ، 3893 ، 3899 ، 3901 ، 3903 ، 3907 ، 3909 ، 3913 ، 3919 ، 3921 ، 3923 ، 3927 ، 3929 ، 3931 ، 3933 ، 3937 ، 3939 ، 3943 ، 3949 ، 3951 ، 3953 ، 3957 ، 3961 ، 3963 ، 3967 ، 3969 ، 3973 ، 3979 ، 3981 ، 3983 ، 3987 ، 3989 ، 3993 ، 3999 ، 4001 ، 4003 ، 4007 ، 4009 ، 4013 ، 4019 ، 4021 ، 4023 ، 4027 ، 4029 ، 4031 ، 4033 ، 4037 ، 4039 ، 4043 ، 4049 ، 4051 ، 4053 ، 4057 ، 4061 ، 4063 ، 4067 ، 4069 ، 4073 ، 4079 ، 4081 ، 4083 ، 4087 ، 4089 ، 4093 ، 4099 ، 4101 ، 4103 ، 4107 ، 4109 ، 4113 ، 4119 ، 4121 ، 4123 ، 4127 ، 4129 ، 4131 ، 4133 ، 4137 ، 4139 ، 4143 ، 4149 ، 4151 ، 4153 ، 4157 ، 4161 ، 4163 ، 4167 ، 4169 ، 4173 ، 4179

ژماره یه کی جووتی (even) سروشتی k ، ئه وه ناکوتا جووته (Piar)
ژماره خو به ش هه یه که جیاوازی نیوان ئه و خو به شانه بریتیه له k .

واته، ئه گه $k=10$ ، ئه وه ناکوتا جووته خو به ش هه ن که جیاوازی
نیوانیان بریتیه له 10.

	2	3		5	7			11	13			17	19
		23					29	31				37	
41		43			47				53				59
51					67			71	73				79
		83					89					97	
101		103			107	109			113				
					127			131				137	139
						149	151					157	
		163			167				173				179
181								191	193			197	199
								211					
		223			227	229			233				239
241								251				267	
		263				269	271					277	
281		283							293				
					307			311	313			317	
								331				337	
					347	349			353				359
					367				373				379
		383					389					397	

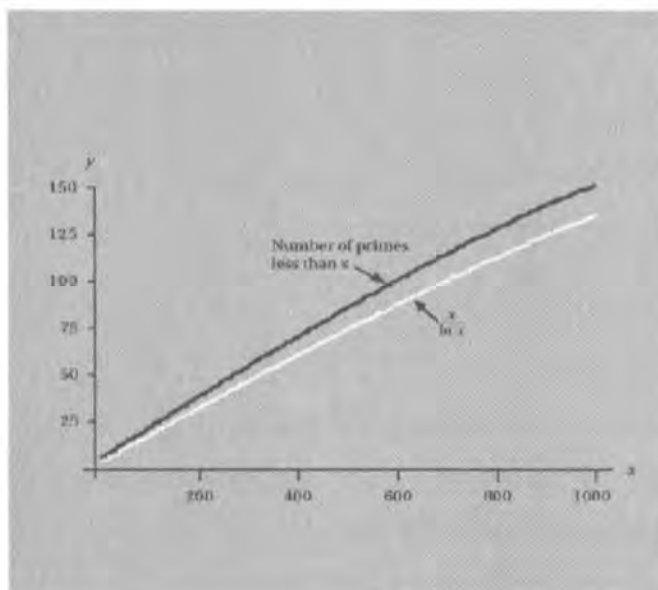
بیردۆزی ژماره خۆبه‌شەکان

Prime number theorem

بیردۆزی ژماره خۆبه‌شەکان ده‌کریت بیردۆزیکى هیوا به‌خش بیت، له‌هه‌مان کات بیردۆزیکى سه‌رنج پراکتیشیه. له‌ رینگى ئەم بیردۆزه‌وه ده‌زانین که له‌ خوار ژماره‌ی x چەند ژماره خۆبه‌ش هه‌یه. ئەویش به‌هۆی ئەم یاسایه‌وه $\frac{x}{\ln(x)}$ ، واته‌ ئەگەر بمانه‌وی بزانین له‌ خوار 100 چەند ژماره‌ی خۆبه‌ش هه‌یه، ئەوه ئەمه‌ شیکار ده‌کەین: $\frac{100}{\ln(100)}$

به‌ هۆی خشته‌ی ژماره خۆبه‌شه زانراوه‌کان، 'کارل گاوس' توانی ته‌فسیری ئەوه بکات که چەری ژماره خۆبه‌شەکان به‌ نزیکه‌ی ده‌کاته $\frac{1}{\ln(x)}$. ئەمه‌ش واتای ئەوه‌یه ئەگه‌ری دۆزیـنه‌وه‌ی خۆبه‌شـیک، له‌ مه‌ودایه‌کی بچوک به‌ پانی d و له‌ ده‌وروبه‌ری x ، به‌ نزیکه‌ی ده‌کاته: $\frac{d}{\ln(x)}$. ئەگەر ئەمه‌ پاست بیت، ئەوه کۆی (total) ژماره خۆبه‌شەکانی بچوکتەر له‌ x به‌ نزیکه‌ی ده‌کاته ته‌واوکاری چەریه‌که‌ی $\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$. ئەمه‌ش هەر به‌ نزیکه‌ی ده‌کاته‌وه: $\frac{x}{\ln(x)}$.

ئهم وینهی خوارهوه ئهوه پيشان دههات كه هیلدی ژیر $\frac{x}{\ln(x)}$ بریتیه له هۆکاربهندی نزیکهیی هیلکهی سهروهه كه بریتیه له ژمارهی خۆبهشکانی خوار x . بهلام ئهوه ئاشکرا دهکات كه ئهنجامی راسته قینه مومکینه به بهکارهینانی ده رپرینیک له بیرکاریدا بزاندريت، كه پنی دهوتریت نهخشهی زيتا ریمان (Riemann zeta fuction)



نەخشەى زیتا ریمان

Riemann zeta function

نەخشەى زیتا ریمان ، بریتییە لەو نەخشەییەى که زۆر بە توندی پەيوەستە بە چۆنییەتى دابەشبوون و بلاوبوونەوهى ژمارە خۆبەشەکان. ئەم نەخشەى بریتییە لە زنجیرەیهکی ناکوتا. وەک لەم شیۆهێ خوارەوه خراوەتە ڤوو:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots = \prod_{p \text{ prime}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

کاتیکی \prod بریتییە لە لیکدانى راده جیاوازهکان. بەهۆى بەکارهینانى تەکنیکی بەردهوامى شیکاریی (analytic), ئەو نەخشەى ζ دەتواندریت فراوانتر بکریت بۆ نەخشەى شیکاریی لە ژمارە ئاویتەکان, $s \neq 1$ لەگەل کارکردن و وردبوونەوهى زیاتر, ئەم هاوکیشەى که لە وینەکه دراوه بەرهم دیت. که ئەمەش پەيوەندییهکی زۆر تەواوه لە نیوان کۆى لۆگاریتمى سروشتى لە ژمارە خۆبەشەکانى بچوکتەر لە x , x^z خۆشى و x^z که لەو شوینەى که نەخشەى زیتا له بهای z دهکاته سفر. بۆیه ئەگەر زانیمان نەخشەى زیتا له کوی ئەنجامهکی دهییت سفر , ئەو تەواوی ئەوهی دەمانهوی بەدهستمان دهکەویت له مەر ژمارە خۆبەشەکانى بچوکتەر له x . له مەوهش کیشەیهک سه‌ریه‌لدا و تا

هه نووکهش په کلانه بۆته وه، ئه ویش گریمانه ی ریمان (Riemann hypothesis).

$$\sum_{p \text{ prime}, m \geq 1, p^m \leq x} \ln p =$$

$$x - \sum_{z: \zeta(z) = 0} \frac{x^z}{z} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$$

گريمانه‌ی ريمان

Riemann hypothesis

گريمانه‌ی ريمان، بریتيه له يه کيک له کيشه کونه چاره‌سەر نه‌کراوه‌کانی بیرکاری. گريمانه‌که له لایه‌ن بیرکاريزانی ئەلمانی 'ريمان' خۆيه‌وه ئاراسته‌کراوه که هەر له‌سەر نه‌خشه‌ی زيتا ريمانه، که ئايا ئەم نه‌خشه‌يه له چ نرخیک ده‌کاته سفر؟ له‌کاتيک له نه‌خشه‌که چەندین خال-نرخ هەن که تیدا ده‌کاته سفر، که ريمان خۆی باسی ئەو خالانه‌ی کردووه. ئەو سفره‌ی له‌و خالانه‌وه به‌دهست دیت، پێان ده‌وتریت سفری بێبەر (trivial zeros)، ئەو خالانه‌ش بریتین له ژماره جووته نەرینبه‌کان: $-2, -4, -6, \dots$ ئا به‌م شیوه. وه به‌همان شیوه چەند خالیکی تر هەن که تیدا نه‌خشه‌که دیسانه‌وه تیدا ده‌کاته سفر، ئەو خاله‌ش ئەو شیوه‌ی هه‌یه: $\frac{1}{2} + ix$ کاتيک x ژماره‌یه‌کی راستیه و i بریتيه له ژماره‌ی ئاوێته-خه‌یالی $\sqrt{-1}$ ، واته راسته‌هێلکی ستونیمان هه‌یه که به‌شه راستیه‌که‌ی ده‌کاته $\frac{1}{2}$ ، که نه‌خشه‌که له هەر خالیکی سەر ئەو راسته‌هێله ده‌کاته سفر، پرسیاره‌که ئه‌وه‌یه: ئەگەر نه‌خشه‌که تەنیا له خاله‌کانی سەر ئەو راسته‌هێله ده‌کاته سفر ئەوه بیسه‌لمینه، یان هیچ خالیکی تر هه‌یه له دهره‌وه‌ی ئەو راسته‌هێله نه‌خشه‌که تیدا بکاته سفر؟

ئەم گريمانه‌يه‌ی ريمان يه‌کيک له‌و چەند پرسیاره شیکارنه‌کراوانه‌ی که له لایه‌ن په‌يمانگای کلای بیرکاری، خه‌لاتی بۆ ته‌رخانکراوه.

Clay Mathematics Institute Millennium Problems

واته نهگهه بتوانی ههه کام لهو پرسانه یه کلابکه یته وه، نه وه ده بیته خاوه نی یه ک میلیون دۆلاری و چندین خهلاتی تری جیهانی. به هه مان شیوه، بیرکاریزان "ده یقید هیلیبیرت" چندین پرساری هه یه که تا ئیستا شیکاریان بۆ نه دۆزراوه ته وه.

سه بارهت به سفره کانی نه خشه ی زیتا پیمان، تا ئیستا 10 ترلیون سفر دۆزراوه ته وه له سه ره نهو راسته هیله ی له سه ره وه باسمان کرد، به لام له گه له وهش نه م پرسه هه به یه کلانه کراوه یی ماوه ته وه، چونکه وتمان بیرکاری له گشتیه وه بۆ به ش داده کشتیت.



چه ماوه سپیبه که به شی راستی و هیله بۆره کهش به شی خه یالی ده نیون له نه خشه ی پیمان زیتا بۆ $\frac{1}{2} + ix$. نه خشه که ده بیته به سفر، کاتیک هه ردوو چه ماوه که هاوکات به یه که وه سفر بن-ته وه ره ی x بیرن.

سیانهی فیساکورسی

Pythagorean triple

سی ژماره‌ی ته‌واوی سروشتی $a, b, & c$ پێان ده‌وتریت 'سیانه‌ی فیساکورسی' ته‌گه‌ر بیت و نه‌و سی ژماره‌یه پاسه‌دانی هاو‌کیشیه‌ی فیساکورس بکه‌ن: $a^2 + b^2 = c^2$. بو نمونه (3,4,5) سی ژماره‌ی فیساکورسین - سیانه‌ی فیساکورسین، چونکه: $3^2 + 4^2 = 5^2$ که ده‌کاته: $9 + 16 = 25$. نه‌مه‌ پروونه که ناکوتا سیانه‌ی فیساکورسمان هه‌یه، چونکه به جاراندردنی هه‌ر پیکه‌اته‌یه‌کی سیانه‌یه‌کی فیساکورسی به ژماره‌یه‌ک، نه‌وه دیسانه‌وه سیانه‌ی فیساکورسی به‌ره‌مدیت، واته ته‌گه‌ر (3,4,5) هه‌ر یه‌ک له ژمارانه جارانی 2 بکه‌ین (6,8,10) نه‌وه نه‌مانه‌ش ده‌بنه سیانه‌ی فیساکورسی، چونکه $6^2 + 8^2 = 10^2$. سیانه‌ی فیساکورسی به‌ه‌زی رێسایه‌که‌وه ده‌تواند ریت بدۆزین، نه‌ویش به‌و شیوه‌یه: دوو ژماره‌ی سروشتی x و y ده‌ست نیشان ده‌یکه‌ن به‌و مه‌رجه‌ی $x > y$ دواتر پیکه‌وه‌به‌ستانی نه‌و دوو ژماره‌یه به‌و شیوه‌ی خواره‌وه:

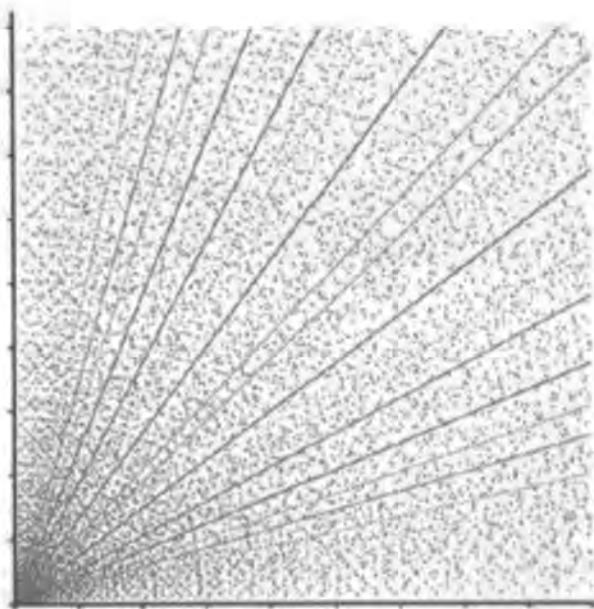
$$a = x^2 - y^2$$

$$b = 2xy$$

پاشان:

$$a^2 + b^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) + 4x^2y^2 \\ = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$$

بۆیه، ئەو سییانه بریتییه له $(x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2)$. دەبیت
هه‌موو سییانه فیساکۆرسییه‌کان بتواندریت له‌سه‌ر ئەم شیوهیه
بنوسریت.



نواندنی سییانه‌ی فیساکۆرسی به هیلکاری.

داوین بیردۆزی فیرمات

Fermat's last theorem

دواین بیردۆزی فیرمات، یه کیک بوو له کیشه کونه چاره سه رنه کراوه کانی تیوری ژماره کان، به جۆریک ئەم کیشه یه نزیکه ی 350 سالی خایاند تا تواندرا یه کلابکریته و! کیشه کهش له لایه ن ئەندریو وایه لس (Andrew Wiles) له په یمانگای نیوتن له کامبریج له سالی 1995 یه کلابکرایه وه، واته سه لمیندرا.

ده قی کیشه کهش ئەوه بوو: ئەم هاوکیشه یه: $x^n + y^n = z^n$ کاتیک $n \geq 3$ شیکاری هیه کاتیک x, y & z سی ژماره ی سروشتین؟ "ئەندریو وایه لس" سه لماندی که شیکاری نییه! بۆ نمونه ئەگه سه یر بکه ین کاتیک $n = 2$ ، ئەوه ده بیته یاسای فیسگۆرس، که له بابته ی پیشوو بینیمان ناکوتا سیبانه ی فیسگۆرسی هه ن که پاسه دانی هاوکیشه که ده کن. به لام بۆ $n = 3$ ، هیچ سی ژماره ی سروشتی نادۆزیته وه که پاسه دانی ئەم هاوکیشه یه: $x^3 + y^3 = z^3$ بکات! ئەندریو سه لماندنه که ی له سه ر تیوری برکه هیلکه بیه کان (Elliptic curves) داپشت.

فیرمات ئەم کیشه ی له په رتوکه که یدا ئامازه پیندا له سالی 1637، که ده لیت: میتۆدیکم دۆزیوه ته وه بۆ سه لماندنی ئەم شته.

'It is impossible to separate a cube into two cubes, or a fourth power into two fourth powers, or in general, any power higher than the second, into two like powers. I have discovered a truly marvelous proof of this, which this margin is too narrow to contain.'

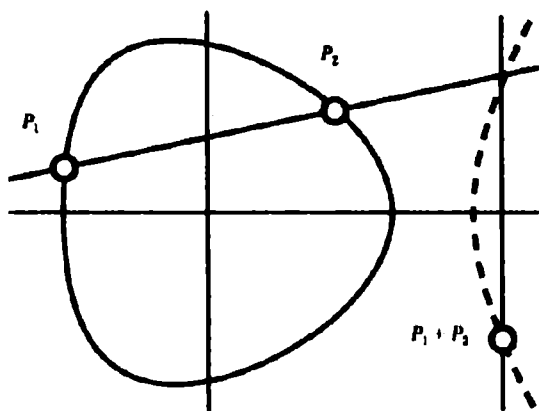
Pierre de Fermat

مه‌حاله شه‌ش پالوه‌ک جیابکه‌ینه‌وه بۆ دوو شه‌ش پالوی تر، یان بنچینه و هینزکی چواری بۆ دوو بنچینه و هینزی چواری، یان به شیوه‌یه‌کی گشتی، هر هینزیک گه‌وره‌تر له دوو، جیابکریته‌وه بۆ هینزی هه‌مان شیوه، بۆیه‌ش سه‌لماندنکی ناوازه‌م له هه‌مبه‌ر ئه‌وه دۆزیوه‌ته‌وه، به‌لام ئه‌م لیواره (په‌راوینزه) تا بلینی بچوکه‌-ته‌سکه بۆ له‌خۆگرتنی هه‌موو ئه‌مانه. (فیرمات)

خاله ریژهییهکانی سهر چهماویهک

Rational points on a curve

خاله ریژهییهکان، ژماره‌ن یان به‌های نه‌خشه‌یه‌که که ده‌تواندیریت به‌هوی ریژه‌ی نیوان دوو ژماره‌ی سروشتی ته‌فسیر بکریست و بنووسریت. ناسینه‌وه‌ی خاله ریژهییهکانی سهر چهماویه‌کی ناته‌واو (هیلکه‌یی) یارمه‌تیده‌ر بوو بۆ سه‌لماندنی دوا‌ین بیردۆزی فیرمات: $a^n + b^n = c^n$ نه‌گه‌ر بیت و هاوکیشه‌که‌ی بیردۆزی فیرمات: $a^n + b^n = c^n$ دابه‌شی c^n بکه‌ین ده‌گه‌ینه: $\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n = 1$. نه‌گه‌ر شیکاره‌گه‌لیک بۆ نه‌و هاوکیشه‌یه‌ه‌بیت، نه‌وه‌ ده‌بیت نه‌و شیکارانه‌یه‌که‌گریته‌وه‌بگونجیت له‌گه‌ل خاله‌کانی سهر چهماویه‌که: $x^n + y^n = 1$ کاتیک x و y ژماره‌ی ریژه‌ین. بۆ چه‌ماوه‌ی: $x^2 + y^2 = 1$ ناکۆتا ژماره‌ ریژه‌یی بوونی هه‌یه، بۆیه‌ نه‌و هاوکیشه‌یه: $a^2 + b^2 = c^2$ ناکۆتا شیکاری هه‌یه، واته‌ ناکۆتا سیبانه‌ی فیساکۆرسی بوونی هه‌یه. بۆیه‌ نه‌گه‌ر n گه‌وره‌تر بیت له‌ 2 یان زیاتر، نه‌وه‌ شته‌کان ئالۆزده‌بن. نه‌و په‌یوه‌ندییه‌ش له‌ نیوان خاله‌ ریژه‌ییه‌کانی سهر چه‌ماوه‌کان و شیکاره‌ ته‌واوه‌کان بۆ هاوکیشه‌کان، بۆته‌ هه‌ولیکه‌ی نزیکتر بۆ لیکۆلینه‌وه‌ له‌ پیکه‌ی په‌کتربرینی نیوان چه‌ماوه‌ به‌رده‌وامه‌کان و خاله‌ ریژه‌ییه‌کان. بۆ چاماره‌یه‌کی ساده‌ و ساکار، ناکۆتا خالی ریژه‌یی هه‌یه، یان هه‌یج خالی ریژه‌یی بوونی نییه‌. چه‌ماوه‌ زۆر ئالۆزه‌کان چند خالیکی ریژه‌ییان هه‌یه.



گروپینک، که هه لگپی سیفتهی ئالوگۆرپییه ده کریت په یوه ندی هه بیت به برگه یه کی هیلکه یی (Elliptic curve). راسته هیلکه ی سهره وه دوو خالی دیار-ئاشکرای له خۆگرتووه (P_2 و P_1) که چه ماوه به کی بریوه له خالینک (خالینی سییه م)، وه وینه دانه وهی ئه و خاله به گویره ی ته وه ره ی X ئه وه گروپینکی ئاویتته ی دوو خالیمان پهن ده دات، ئه ویش: ($P_2 + P_1$).

گریمانهی بریتش-دایر

The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture

گریمانهی بریتش-دایر، یه کیکه له کیشه چاره سه رنه کراوه کانی بیرکاری، که یه کیکه له کیشانهی که خه لاتیکی یه ک میلیون دیناری بو ترخان کراوه له لایه ن په یمانگای کلای بیرکاری. ئەم کیشهیه به هه مان شیوهی "نه خشی زیتا ریمان" یه که له ژماردنی ژماره خوبه شه کانه وه سه رئاوکه وت. ئەم گریمانهیه ده لیت: ده بیت هه مان زنجیره توانی هه بیت بو ژماردنی خاله ریژه یه کانی سه ر چه ماوه یه کی هیلکه یی (rational points of an elliptic curve). چه ماوه ی هیلکه ییش ئەو چه ماوه یه که ئەو شیوه ی هه یه:

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

کاتیک A و B دوو ژماره ی ته واون، که ئەم هاوکیشهیه چه ماوه کی دوو به شه یان یه ک به شه. به شیوه یه کی ورد، به هـۆی چه ماوه یه کی هیلکه یی، "بریتش و دایر" چۆنییه تی دروستکردنی زنجیره کی توانی له گه ل کۆلکه کانی $\frac{a_n}{n^s}$ پیشاندا، وه کاتیک $s=1$ ، گریمانه کی ئەوه یه: ده ریبه که کی نا کۆتا (Infinite) خالی ریژه یی بوونی هه یه، وه یان که کی کۆتادار (Finite) خالی ریژه یی له سه ر چه ماوه ی له م شیوه یه هه یه؟

ئەم کیشه یه به شیوه گشتیه کی تا ئیستا یه کلانه بوته وه، به لام گریمانه که بوونی ئەوه ی لی دیت که راست بیت بو هه ندی باری شان.

ئەمەش چەقی تیگەیشتنە لە نەخشەیی لەو شینۆ، که تا چ راده یەک دەکریت بە کاربەیندريت بۆ دیاریکردنی ژمارەیی تایبەتمەندییەکانی تیۆرییەک.

Clay Institute Millennium Problems

P versus NP

The Hodge conjecture

The Poincaré conjecture ✓

The Riemann hypothesis

Yang–Mills existence and mass gap

Navier–Stokes existence and smoothness

The Birch and Swinnerton–Dyer conjecture

ئەو چەند پرسیارەیی که خەلاتی 'یەک ملیۆن دولاری' بۆ تەرخان کراوە بۆ ئەو کەسەیی بتوانیت یەکیک لە مانە یەکلابکاتەوە شیکاربکات.

گریمانەى گۆلدباخ¹⁰⁸

Goldbach Conjecture

گۆلدباخ ماتماتیکزانى ئەلمانییە کە لە ساڵی 1690 لە دایک بوو و ساڵی 1764 گیانی سپاردوو. گۆلدباخ لە هەمان کاتدا یاساشی خویندوو. دواى تەواوکردنى خویندنى له زانکۆى رۆیال، بۆ چەندیش شوینى تر گەراوه، وەک: ئیتالیا، هۆلەندا و فرנסا، لەم گەرانەش چاوى بەچەندین ماتماتیکزانی دیار و بەرزى کەوتوو، وەک: (لیبینز-ئۆیلەر-بېرنۆلى) کە تاوتویى کارەکانى خوینى لەگەل ئەماندا کردوو، بۆیە لەگەل ئۆیلەر بېردۆزیکیان هەیه پىنى دەلین: Goldbach-Euler theorem. گۆلدباخ لە ساڵی 1742 کاغەزىک بۆ "ئۆیلەر" دەنیریت و تىدا باسى مەسەلەیهک-گریمانە دەکات کە لە خوارەوه وینەکەى دانراوه.

گریمانەکە: هەر ژمارەیهکی جووتى له 2 گەورەتر، دەتواندريت له ئەنجامى کوکردنەوهى 2 ژمارەى سەرەتایى (خۆبەش) بنوسریت.

نمونه: ... $3 + 3 = 6$, $3 + 5 = 8$, $7 + 3 = 10$, $7 + 5 = 12$

زۆریک له ماتماتیکزانان پىیان وایە ناتوندريت ئەمە بسەلمیتریت، واتە سەلماندى شتىکی قورسە کە ئەمە بۆ هەموو ژمارەیهکی جووتى ئەرىنى راستە، بۆیە له نىوان سالەکانى 2002 بۆ 2000 یەک میلیۆن

¹⁰⁸ ئەم بابەتە لە پەرتوکهکە باس نەکراوه، بەلام بە پىوستم زانى کە لێره دایینم.

دولار وهک خلات ترخانکرا بۆ ئه و کسه ی که بتوانیت ئه م گریمانه یه کلابکاته وه، به لام کس نه بوو، هه تا هه نووکه ش کس نییه!

factus, nisi hypothese, ut videtur ab eis fieri non fuerit, sed
 a ratione, quae sicut numerus unius modo in die operatur
 divisibilis habet, auf solche Weise will ich ein neue conjecture
 bezeichnen: daß jede Zahl welche sich zu einem numerus primis
 zusammengesetzt ist ein aggregatione finiten numerorum
 primorum, (ob alle man will) zu verstehen mit sehr genau sein
 sich auf die congruenz einander mitteilen. zwei Gruppen

$$A = \begin{pmatrix} 101101 \\ 101101 \\ 101101 \\ 101101 \\ 101101 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 101101 \\ 101101 \\ 101101 \\ 101101 \\ 101101 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 101101 \\ 101101 \\ 101101 \\ 101101 \\ 101101 \end{pmatrix}$$
 Zwei folgen mir ganz differenzieren, je demeritum von
 den Primen!
 Si v. sit functio ipsius x. cuius modi ut factus v = c. numerus
 cujus, determinari poterit x per c. et reliquis constantibus in functio
 one expressas, poterit etiam determinari, subter ipsius x, in equa
 tione v = (x+1)(x+2) ... = (x+n)(x+n+1) ... = (x+n-1)(x+n-2) ...
 Si recipiatur coram cuius ad ipsa sit x, applicata hoc sit
 summa seriei $\frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ posita n. pro exponente terminorum, hoc est,
 applicata = $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{x^4}{4 \cdot 2^4} + \dots$ dic, si fuerit
 ad ipsa = 1, applicatum pro = $\frac{1}{2} = 1/2$: sed hoc capitale = 1
 1/2 1/2 1/2
 2 2 2
 3 3 3
 4 4 4
 vel major infinitum.
 Isti seriem mit aller anfertigung der funktionen
 einer durch die anderen regelmäßig bei den
 Maccus 7. Jan. 11. 1742. J.

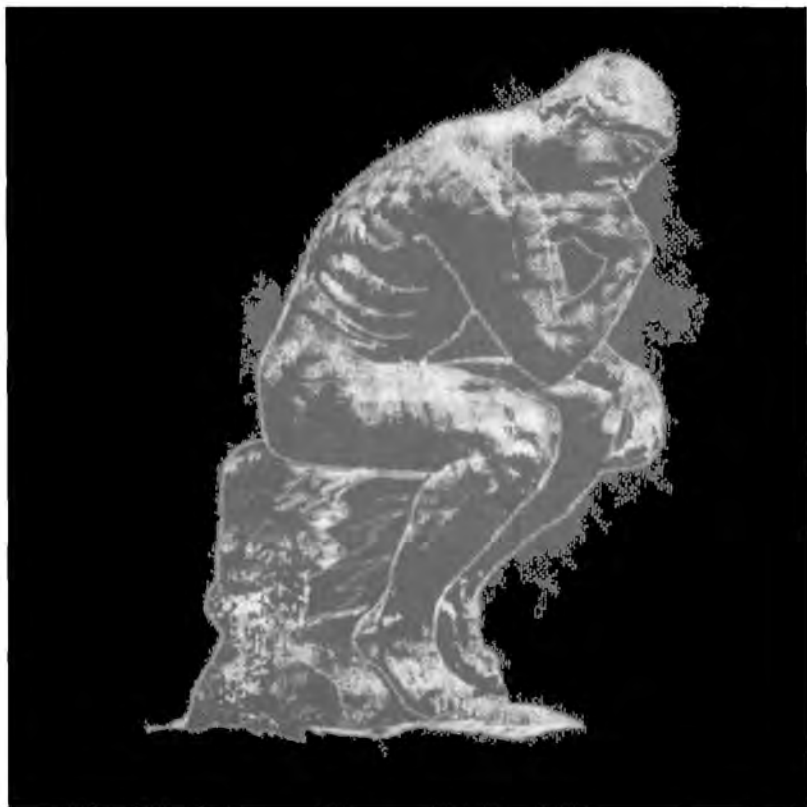
دهقی نامه‌کی گۆلدباخ بۆ ئۆیله ر له هه مبه ر گریمانه که.

به‌نامه‌ی لاینگلاندس

Langlands program

به‌نامه‌ی لاینگلاندس، به‌نامه‌یه‌که که ئه‌و پرسانه‌ی به شیکار نه‌کراوی ماونه‌توه، هه‌موویان له ژیر چه‌تریک کۆده‌کاته‌وه، به‌و مه‌رجه‌ی که په‌یوه‌ندییه‌ک ئه‌و پرسانه پیکه‌وه به‌سستیته‌وه له تیوری ژماره‌کان و تیوری گروپ. له‌گه‌ل به‌کخستینکی ریټینچوو بو زۆربه‌ی بابته‌کانی بیرکاری؛ ئه‌وانه‌ی که ماوه‌یه‌کی زۆره بی‌ری مرقایه‌تیان به‌خۆیانته‌وه سه‌رقالکردوه به شیوه‌یه‌کی جیاکراوه. به‌که‌م هه‌ول بو ئه‌م کاره له لایه‌ن بیرکاریزانی که‌ندی رۆبیرت 'لاینگلاندس' له ده‌وروبه‌ری سالی 1960 بوو. گریمان‌ه‌کان له‌م به‌نامه‌یه شیوه‌ی فره‌ه‌نگیک وه‌رده‌گرن که هاوتا و گونجاو بیت، له‌گه‌ل پیشنیازکردنی ئه‌وه‌ی: ئه‌گه‌ر چه‌ند ئه‌نجامیک له تیورییه‌ک راست بوو، ئه‌وه هاوشیوه‌ی ئه‌نجامه‌که راسته بو ئه‌و پرسیارانه‌ی ده‌که‌ونه ناو به‌نامه‌که، ئه‌مه‌ش له سایه‌ی سیپه‌ری ئه‌نجامی ئه‌و پرسه‌ی که له ناو به‌نامه‌که به‌کلاکراوه‌توه.

ئه‌م به‌نامه‌یه هه‌ویتی سه‌لماندنی 'دواين بیردۆزی فیرمات'ی داپشت به کاریگه‌یی ئه‌نجامه‌کانی به‌نامه‌که‌ی لاینگلاندس. له‌گه‌ل ئه‌وه‌شدا، چوونه پیش به‌هۆی به‌نامه‌که‌ی لاینگلاندسه‌وه له‌مه و هه‌ندی ئاراسته‌ی تر، هیشتا چه‌ندین کیشه هه‌ن هه‌ر به شیکارنه‌کراوی- به‌کلانه‌کراوه ماونه‌توه. سه‌په‌رای ئه‌وه‌ش، به‌نامه‌ی لاینگلاندس به‌کخستینکی ناوازه‌ی بیرکاری هاوچه‌رخه.



ژێدەرەکان:

بۆ وەرگیران و دوزینهوهی واتای بەشیکێ زۆری زاراوهکان، سووڤم لەم چەند فەرهنگەیی خوارهوه وەرگرتوو:

- i. فەرهنگی خال، کوردی-کوردی، شیخ محەمەدی خال، چاپی دووهم، 2015
- ii. فەرهنگی بیرکاری، ئینگلیزی-عربی-کوردی، نەوزاد عمر محیدین، 2013
- iii. فەرهنگی فیزیاء، ئینگلیزی-عربی-کوردی، نەوزاد عمر محیدین، 2013
- iv. فەرهنگی ئۆکسفۆرد، ئینگلیزی-کوردی، زانەر محمد، 2011
- v. فەرهنگی تەکنۆلۆژیای زانیاری، ئینگلیزی-کوردی، زانستپەرورانی کورد، وەشانی دووهم، 2011
- vi. پیناسە و ڕاڤەیی زاراوهکانی کۆمپیوتەر، ئاراس نوری نەحمەد، 2012
- vii. فەرهنگی ئاناھیتا، کوردی-کوردی. (<http://ferheng.info>)
- viii. فەرهنگی بیرکاری، ئینگلیزی-ئینگلیزی، چاپکراوی زانکۆی Oxford concise dictionary of Oxford university press..mathematics

دەربارەى ۋە رىگىز و ئامادەكار:

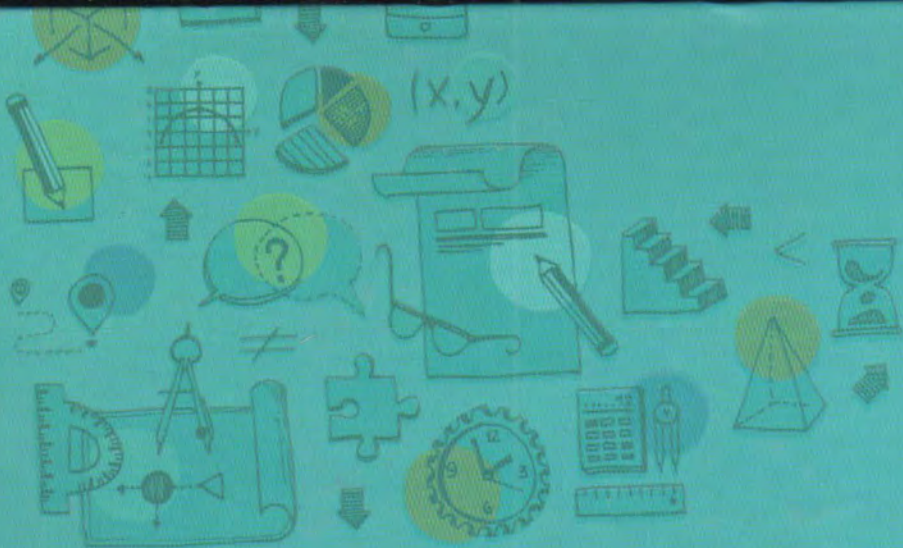
(ئوسامە تحسىن پىربال) بەكالورىيۇس لە پەروەردەى بىركارى بە
پەلى يەكەم (ئاستى زۇر باشە)، سالى 2018، زانكۆى سەلاھەدىن-
كولىژى پەروەردە.

خاۋەنى بلۇكى بىركارى بۇ كورد. نووسىن و ۋە رىگىزنى چەندەھا
بابەت سەبارەت بە بىركارى و پەروەردەى بىركارى.

دەمە زىنەرى "يانەى بىركارى" لە زانكۆى سەلاھەدىن، كولىژى
پەروەردە، بەشى بىركارى، سالى 2016 - 2018 .

بەشدارىكردن لە "ھەشتەمىن كۆنفراسنى زانستى" كولىژى
پەروەردە، بۇ تويژىنە ۋە كانى قوتابيانى قۇناغى چوارەمى كولىژى. (2018)

بەشدارىكردن لە "كۆنفرانستى بىركارى، بىركارى پەتى و
پەروەردەى بىركارى" زانكۆى تىشك. (2017)



پەرتوکی "بیرکاری" لە چەند خۆلەکیک" بە کێک

بوو لەو پەرتوکانەى که زۆر بە وردى خویندمەوه و زۆر
سەرنجى ڕاکێشام، پەرتوکیکە، که ئەتوانم بڵێم؛ نزیکەى
70 لە سەدى مەعەریفەى بیرکاری لە خۆگرتووه، وه ک
نووسەریش خۆى باسى ئەکات. لە گەل ئەمەش،
پەرتوکه که جگه لهوهى ئاشنات ده کات به هەندى بابەت
و چەمکی زۆر گرنگ، کێشه بیرکاریه
شیکارنە کراوه کانیشت پێ دەناسینیت.



07501269689
07511408868

hakem1423@yahoo.com
renwen2009@yahoo.com

سڵێمانس - بازاری ئاوباریک - نهۆس بەکەم
بەرنامەر کاسۆمۆل - موکاس زەمارە (١٦)



٨٠٠٠ هەزار دینار

ISBN: 978-9922-626-07-9

