

•

## **Geometrî:**

*Ji pêvajoyên destpêkê ên geometriyê heta pêvajoyên wê yên bi geometriya cebirê ..*

*Abdusamet Yîgît*

*Weşanên*

•  
•  
•  
•

Geometri  
@Abdusamet yigit

2021-Almanya-Berlin

ISBN 967-4-940987-35-2

**Pêşgotin:**

Geometri wê weke mijareka kûr ku wê, bi çavkaniya matematik û aqilê dahûrî ê felsefeyê û hwd re wê, pêşkeve bê. Bi temenê têngîna fîzîk û bûjenî û elementên wê yê ku ew bi wê pêşdikeve re wê dikarê wê, werênê ser ziman. Wê li ser rêgezan wê pêşkeve. Minaq rêgeza dualiteyê wê, di wê rengê de ku wê li ser nûqte û rastiyê re ku wê, dema ku wê yek wê gûharî wê di di hanîna ser ziman de jî wê, were ser ziman. Li ser têngîna rêgeza dualiteyê re ku mirov wê bêjê wê weke geometriya rastîyan

jî ku wê were sser ziman wê, di wê rengê de wê, xwediyê reng û temenekê fahmkirinê bê.

Minaq ku em li gorî têgîna rêgeza dualiteyê wê werênina ser ziman ku em A,B,C weke sê nûqteyên ku em weke yên sêkikekê wê werênina ser ziman. Keviyên wê em bi rengê pênaekirina weke bi referansî ên bi rengê BC, CA, AB wê weke rastîyî wê here bikin. Ku wê weke du hevrastiyên wê yên hevyeki nebin wê A, B, C, D re wê werênina ser ziman. Wê hingî wê bi keviyên re wê weke şeş-rastî bi awayê AD, BD, CD, BC, CA, AB re wê, derkevin. Di awayên hevrastiyên wê de jî wê, BCD, CDA, DAB, ABC wê karibê wê, di awayekê de wê, bigihijê encamê wê bi wê re. Lê ev wê bi denklema ku em li wê bihizirin wê, di awayekê de wê di awayên berfirehiyên wê yên ku ew di wê de werina kirin de wê, karibê gelek encamên ku mirov wê bigihijiyê de wê bi wê re wê, derxê li hole. Li vir tenê bo rengê deklema ê rêgeza dualiteyê em werênina ser ziman me ev denklema kirin çêkir. Lê wê berfirehbûyîna wê di awayekê de wê, zêdetirî wê, mirov dikarê wê, zêdetirî wê, di awayekê de wê, pêşbixê.

Di geometriyê de wê, pêvajoyên wê yên pêşketinê wê, di serî de ku em ji demên şariştaniyê ên sûmeran û heta roja me wan hildina li dest wê, di awayekê de wê, dem bi dem wê bi awayekê bi pêşketina aqilê me re wê di ahengekê de wê, çawa wê pêvajoyên pêşketinê wê bijî wê mirov dikarê wê, werênê ser ziman. Min li vir tenê mijare geometriyê bi temenekê fahmkirinê wê bi sînor wê hilda li dest.

Pêvajoyên geometriyê û fahmkirina wan wê temenekê fahmkirinê wê bi têgînî wê bi xwe re wê biafirênê. Ev jî wê ji wê aliyê ve wê giring bê. Di aslê xwe de wê, dema ku em di nava aqilmeşandinê de wê, dût û nêzîkatîyekê wê dikin ku wê werênina ser ziman. Rewşek fîzîkî wê salixbikin û ankû bûjenê têbigihijin em di awayekê de wê, bi temenekê geometriyê dihizirin. Di wê rengê de wê, geometri wê weke zanîna fîzîk û bûjenê wê, di nava fahmkirina me de wê xwe bi temenî wê bide nîşandin û dîyarkirin. Di dewama wê de wê, weke aliyekê wê yê din jî wê, mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê mijare geometriyê wê, di demên hemdem de wê zêdetirî wê li ser temenekê bi matematikî û cebirî re wê, derkeve li pêş û pêşkeve. Di wê rewşê de wê, geometriya cebirî û dahûrî wê, di wê temenê de wê, weke şewayekê fahmkirinê ê li ser rewşa fîzîk û bûjenê bi şenberî wê bi fahmkirinên xwe yên razberî re wê bike ku wê bide me. Di wê rengê de wê, weke aliyekê wê yê giring wê, di serî de wê, mirov dikarê wê weke aliyekê giring wê, fahmbikê û wê werênê

ser ziman. Aliyên geometriyê ên dîrok û felsefeyî wê, weke aliyna fahmkirinê, salixkirinê, dahûrkirin û gihiştina li fahmkirina wê bin. Wê li ser wan temenan re wê, temenê pêşxistinê ên bi wê re wê, biafirin. Di wê rengê de wê, di awayekê de wê, di serî de wê, mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê, geometri wê, di wê rengê de wê, bi teybetî dîroka geometriya kurdistanê û ankû mesopotamiya wê, di wê rewşê de wê, di awayekê de wê, pêvajoyên wê yên pêşketinê wê, di serî de wê, weke aliyekê giring wê, temenekê fahmkirinê wê bi xwe re wê, bidina çêkirin.

Piştî demên pêşketina serdemên kevnera ên felsefeyî û pê de wê, di aslê xwe de wê, çendî ku wê auklid wê bi element'a xwe wê, çerçoveyek salixkirinî wê bike wê, bi wê re wê dawî li awayên sentetîkî bîne û wê, derî li pêşketinê bi awayên cebirî, dahûrî û hwd re wê, vekê. Wê awayê auklid wê, di wê rewşê de wê di temenekê sentetîkî de wê, li ser çerçoveyek giştî bi hevraştên awayî û ankû şeklî re wê, di wê rengê de wê, dikarê wê, fahmbikê. Piştî jî wê, felsefe wê bi fahmkirina wê re wê jî wê, temenê derbaskirinê wê biafirênê. Ber vê yekê wê felsefeya geometriyê wê weke temenekê pêşketinê giring wê bi wê re wê, karibê wê biafirênê.

Pêvajoyên geometriyê wê, fahmkirina wan wê giring bin. Di roja me de wê, bi temenekê matematîkî pêşketina wê jî wê, di wê rewşê de wê, ji aliyekê din ve ku em ji wê re sedemekê bibînin wê ji ber wê bê ku wê aqil wê êdî wê li ser temenekê şenber wê dest pêşketina xwe wê bike bê. Di wê rewşê de wê, ev jî wê, weke aliyekê wê yê din ê giring bê ku mirov wê, di serî de wê weke aliyekê giring wê werênê ser ziman bê.

Geometri wê bi pêvajoyên pêşketina aqil re wê di ahengekê de wê pêşkevê. Wê, di dewama wê de wê, temenê xwe yê pêşketinê wê biafirênê. Li ser her dem û pêvajoya wê ya pêşketinê re wê êdî wê pêvajoyên wê yên din ên pêşketinê wê pêşketin û wê werin. ..

**Abdusamet yigit**

## Geometri

Di aslê xwe de wê dema ku em dîroka geometriyê wê hildina li dest wê pîrr zêde wê kevn wê herê. Di rewşa fahmkirina dîroka geometriyê de wê, mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê, di demên destpêkê ên şariştaniyê de wê li ser rewşên weke yên pîvandînen rastarastî wê, awayekê pîvandîne wê, were dîtîn. Di wê rengê de wê, ev wê bi demê re wê, di awayekê de wê, hin bi hin wê bi pêşketina aqîl re wê di awayekê de wê, weke ku em bi kifşkirinên geometriyê ên weke yên Auklid û hwd re wê, were pêşxistin. Îro di destê me de bineterên nivîskî ku em dikarin ji wan sûdbigirin ên weke tabletên ji demên hûrî, mîtannî û babil û ji misra kevn weke papirûsa ahmes û ku mirov dikarê navê wan werênê ser ziman wê, di awayekê de wê werina dîtîn. Di wan de wê, awayekê geometriyê pêşketî wê were kifşkirin.

Wekî din em wê jî dikarin wê werênina ser ziman ku wê, di bineterên nivîskî ên ku ji demên hûrî û mîtannîyan ku ew hatina kifşkirin wê, di wan de wê awayekê pîvandîna dirêheya çapa cemberekê û çarpkirina wê bi sê-qatî û hewirdora wê ku wê weke kji 12'an 1'ê ku wê bipîvîn wê were dîtîn. Ev hasibandinên ku wê bikin wê nêzî nirxa  $\pi$  wê, di awayekê de wê, weke ku miriov dibîne ku wê bê kirin. bi hildina sê-qatên wê re wê, beremberê  $\pi$  wê weke ku em dikarin wê werênina ser ziman wê were dîtîn. Wekî din wê pîvana bilindayî û temenê jî wê bi awayekê wê weke ku mirov dibîne wê were kirin. Ji aliyekê din ve jî wê, weke ku wê, di hinek bineterên nivîskî ên ji wan deman de wê were dîtîn û kifşkirin de wê nirxên  $\pi$  ku wê di rewşa wê de wê, 3 û /18 ku wê were bikarhanîn wê were kifşkirin. Di wê demê de ku wê weme mîla babil jî wê di roja me de wê, were zanîn beremberê heft mîlên roja me wê were dîtîn wê, di awayekê de wê, were hasibandin û wê, bênina ser ziman.

Di nivîsarên ji demên wan mana de wê, di awayekê de wê, mirov dibîne ku wê, hinek bi hin wê bi têgînek cebirî û ankû ku em weke di çerçoveya têgîna dîroka geometriya cebirî û pêşketina wê de ji wê demê werênina ser ziman wê, bi têgîna hasibandin û pîvana navberan û bi wê re hasibandinên bi rewşa çûyina bi ber rojê û hwd ve wê, di awayekê de wê, di nava zanînen wan de wê, were dîtîn. Di wê warê de wê, geometriya stêrzanîyî/astronomikî wê di awayekê de wê, di wê demê de wê, weke ku mirov kifşdikê wê di awayekê serkevî de wê bikarbênin.

Ji misra kevn 'papirûsa ahmes' ku wê were dîtin û kifşkirin wê, di wê warê de wê weke aliyekê giring wê, di dewama wê de wê mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê, di awayekê de wê, bi zêdeyî wê, derkeve li pêş. Di dewama wê de wê mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê, rewşên hasibandinên ku wê, di wê de wê, werina kifşkirin wê, di warê geometriya demê û ya herêmê de wê, têgihîştinek baş wê karibê bide me. Î ro ji demên hûrîyan û mîtannîyan wê, gelek nivîsên bizmarî ku ew dihên dîtin wê di wan de wê, rewşên weke danayên salane ku wê di wan de wê bi nivîskî hatina girtin wê werina dîtin. Di wê rewşê de wê, di wê rewşê de wê, di nava hasibandinên xwe de wê, weke ku mirov ji wan bineteran û ankû nivîsên bizmarî fahmdikê ku wê, di wê warê de wê, xwediyê têgihîştina hasibandinê û pîvandîna a li pêş bin. Wekî din wê di hinek nivîsên bizmarî de wê, dahatên li bawergehê ku wê, ew werina girtin û ankû di hinek nivîsan de wê, danayên xazîneya qasrê ku wê, weke mahsûl wê çî were hildan û wê çî wê were xistin wê di wê rengê de wê, were pîvandîna.

Di papirûsa ahmes de wê, di wê de wê, rewşên weke bi kifşkirina nirxê a pîvanî wê di wê rengê de wê, di awayekê de wê, weke aliyekê giring wê bi wê re wê, were dîtin. MInaq wê, di wê rewşa kifşkirina nirxa  $\pi$  de wê, weke nêzîkatîhya hemdem 22-7 wê bê zanîn. weki din wê di pîvane haqarekê de wê, di awayekê çarpkirinê de wê, bo dabaşkirina wê  $x \frac{22}{x} \times \frac{7}{22} = ew$  wê bikarbênin. Ji hin problemên ku ew dihên çareserkirin di wê de wê, weke ku mirov wê kifşbikê wê, hewldana kifşkirina nirxa wê, weke aliyekê giring wê xwe bide nîşandin. Di awayekê problemên papirûsa ahmes de wê, ya ku wê, werê dîtin mirov dikarê wê bi wê rengê wê di awayekê de wê, werênê ser ziman. Wê sepetek ku wê devê wê,  $4 \frac{1}{2}$  wê bê dayîn. Awayê wê yê serrûyî bê. Wê nivê wê weke qalikê hêkê ku em ji 9'an  $\frac{1}{9}$  hildin wê, 1 bimênê.yên mayîn ên din bihasibaninê wê bina 8'e  $\frac{1}{9}$  bihasibênin. Di encama wê hasibandinê de emê encama  $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$  bidest bixin. ku em bi awayekê din wê, ji wê  $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$  derxin wê demê wê, ya mayî 8'ê em bikin ku wê bibînin. Wê demê emê  $7 \frac{1}{9}$  bibînin. Ku em bi çarpkirinê wê bikin minaq bi awayê  $7 + \frac{1}{9}$ ,  $4 + \frac{1}{2}$  emê encama wê weke 32 bigihijênê.

Di dewama wê de ku em li ser rewşa çareserîya wê ya qadî re bihizirin emê wê bi wê re wê, karibin bi wê re wê pêşbixin. weke qad =  $(2x8 - 9)2 \times (wûcan)2 = 256-81 (wûcan)2$  bê. Di aslê xwe de wê, ev encama ku wê, derkeve li holê wê, di awayekê de wê, li ser wê hasibandina wê re wê weke ku wê, bi matematikî wê bê hasibandin û wê bi encamî wê ghiştin

li wê, encama ku wê derkeve wê,  $256-81 = 3$ . 16049 wê, encama ku wê mirov dikarê hema weke nêzî beremberê nirxa  $\pi$  wê werênê ser ziman bê.

Di problema 14<sup>min</sup> a papirûsê de ku wê, weke rewşeka hasibandina cismekê birrî ku wê bihasibênê wê, bi wê re wê, were dîtîn. di rewşeka weke ku wê dirêjehiya serî ku wê bi menek weke 2<sup>an</sup> wê bihasibênê û aliyê binî ku wê bi 4<sup>an</sup> wê bihasibênê ku wê, bilindahiya wê, 6 bê wê di awayekê de wê, weke ku wê encamaekê wê bênê ser ziman. Weke ku wê were dîtîn wê, bê hasibandin ku wê, hacma wê 56 kubik bê û ev jî wê, weke aliyekê ku em li gorî çerçoveya zanîna ku em bi wê dihênina ser ziman jî wê rast derkeve bê. Di dewama wê de wê, dema ku mirov wê li wê bihizirê wê, mirov wê bibînê ku wê bi wê rengê wê, di awayekê de wê, weke ku wê, bê hizirkirin. Minaq wê dema ku wê bê gotin ku ku piremidek bilindahiya wê ji 6an diafirê ku ew bilindahiya wê ji binî 4 û ji ser 2 bi rekî ku wê rasta wê were dîtîn. encam wê 16. Piştî wê, 4 li carî wê li hev were zêdekirin wê encam 8 bê. Ku rasta 2<sup>ê</sup> were hildan wê 4 bê. Piştî 16, 8 û 4lê zêde bikin wê encam bê 28 bê. Dema ku wê piştî wê, ji 6<sup>ê</sup> ku wê  $\frac{1}{3}$  were hildan wê encam wê 2 bê. piştî 28ê ducarê levkin wê bê 56. Ev wê weke awa û şêwayekê ku wê, ji papirûsê wê, were derhanîn a bi matematikî bê. Di wê derhanînê de wê, di awayekê de wê, weke bi awayekê bi dîmenê pêşî wê weke bi têngîna piramîdê wê, bi geometrikî û bi dîmenê din jî wê bi matematikî wê, di awayekê de wê, têngînekê wê bi xwe re wê, weke ku mirov wê kifşbikê wê bide me.

BI awayekê din wê, li ser wê rengê hasibandinê ê ji paipirûsê ku me di paragrafa li ser vê de wê hanî ser ziman wê, bi wê rengê wê ev jî wê were dîtîn ku wê, ku wê, di wê demê de wê, çawa wê piramîdek wê were pîvandin û hasibandinên wê werina kirin wê were zanîn. Minaq bi awayekê ku wê têngîna cebîrê jî wê di roja me d ewê were tevlikirin wê, di wê rengê de wê mirov dikarê wê werênê ser ziman.  $V = \frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$  wê, were dîtîn. Di wê rengê de wê, rengê fahmkirinê ê bi paipirûsê re ku wê bi wê re wê were dîtîn û kifşkirin wê, di awayekê de wê, weke aliyekê ku wê, di wê çerçoveyê de wê, bi têngîna cebîrî a geometrikî jî wê, weke çerçoveyek fahmkirinê a ku mirov wê, li vir wê, werênê ser ziman bê. Minaq di dewama wê de wê, jî mirov dikarê wê weke aliyekê din wê weke rewşa pîvandina qadê ku wê di wê de wê, werê ser ziman a bi rengê  $qad = 20$  ,  $b = (3 \ 15)h$  bê. Di dewama wê de wê, dema ku mirov wê, denkleme wê, bi geometriyî wê li wê bihizirê wê, çawa wê,  $h$  û  $b$  wê pêwîst bê ku ew were dîtîn wê, di encama wê de wê, derkeve li holê. BI denkleme ku wê, di wê de wê, were ser ziman wê, di awayekê wê weke 1

$2x + 4 = 10$  wê, di wê de wê, bi encamekê wê were dîtîn. Ji aliyekê din ve jî wê, denklemeke weke  $2x + x = 9$  ku wê werina kifşkirin wê, weke aliyên din ên ku wê bi encamê wê, di wê de wê, bên xwandin bin.

Lê di papirûsê de wê, weke aliyekê giring wê, çawa wê, di wê rewşê de wê, li ser awayê pîvan û hasibandinê li ser wê pîvandinê ên piramîdê ku wê werina dîtîn bin. Di wê rewşê de wê, ev wê weke aliyekê wê yê din ê giring wê xwe bi wê re wê, bide nîşandin ku wê, di wê rewşê de di awayekê geometrikî de wê li ser temenekê dîtbar ê fîzîkî û fahmkirina wê re wê, awayekê hizirkirinê wê bi wê re wê, were dîtîn. Ji aliyekê din ve jî bi têngîna çarçoşeyî ku ew wê were dîtîn û kifşkirin wê ew jî wê, di wê rengê de wê, di awayekê de wê, ji papirûsê wê were xwandin. Ew jî wê, di wê rengê de wê, bi awayê  $qad = 12$ ,  $b = 2$ ,  $4l$  ku wê li ser esasê dîtina  $l$  û  $b$  yê bê wê, were dîtîn. Di heman awayê de wê, bi sêkikê û ankû sêkoşeyê  $qad = 20$ ,  $h = 2$ ,  $2b$  wê, li ser temenê dîtina  $h$  û  $b$  yê wê, avakirî wê were dîtîn.

Di matematika demê a misrê de ku wê were dîtîn wê weke ku wê, Richard J. Gillings wê hewlbide ku ew serekeyek wê derxê wê bi bi têngîna ku wê weke têngîna birrînan a matematika misrê ku wê werênê ser ziman bi denklema  $4 = 1-4$  ê re wê, di awayekê de wê, di encamê de wê, werênê ser ziman. Gillings wê, weke bûjenên matematika misrê jî ku wê werênê ser ziman wê, di wê rewşê de wê, li ser wê re wê, di awayekê de wê, bihizirê û wê werênê ser ziman. Ev awayên matematika misrê bi rengê pêşketina wê, û têngîna wê ya bûjenî û hwd re em di çerçoveyekê de wê, di matematika demên hûrî û mîtannîyan de jî wê, bi awayekê pêşketî ji nivîsên bizmarî ên ji demên wan mana di wan de em dixwênin. Di dewama wê de wê, mirov dikarê wê weke aliyekê din wê werênê ser ziman ku wê, di wê rewşê de wê, matematika mesopotamîyî wê, di aslê xwe de wê, di wê rewşê de ku em wê weke navend wê herê bikin wê, ev aliyên weke aliyên matematika misrê jî wê, di awayekê de wê, dema ku em wan werênina ser ziman wê, di awayekê de wê, di wê temenê de jî wê, di çerçoveya hebûn û rengê pêşketinê de wê, wateyek wan wê hebê. ...

Di aslê xwe de wê, weke papirûsa misrê wê, di rewşên weke nivîsên bizmarî ên ku wê ji demên hûrî û mîtannîyan wê werina kifşkirin wê, di wê rengê de wê, di awayekê de wê, weke pêvajoyên geometrikî ên sentetikî wê, awayna şîrovevî ku wê bi şêwayên aqilmeşandinê û hwd re wê bên gihiştin li wan wê werina dîtîn û kifşkirin. Di wê rewşê de wê, dema ku wê pêvajoyên geometriyê heta Auklid wê, binerê wê, di



awayekê de wê, di şêwayê geometriya sentetikî de wê, di awayekê de wê pêşkeve. Geometriya sentetikî wê, li şûna ku wê weke ku wê di demên felsefeyê de wê, hin bi hin wê were kifşkirin wê, li şûna ku wê wê li ser komên nûqteyan re wê bibînê wê weke ku wê bi şeklî û awayî wê bibînê wê were ser ziman bê. Di roja me de wê, awayên geometriyî ên weke geometriya cebirî û dahûrî û hwd wê, di wê rewşê de wê, ber ku wê li ser van awayan wê pêşkeve wê, weke vajî hevdû wê, di wê rewşê de wê, bi wan r ewê were dîtîn. Di aslê xwe de wê, di awayekê de jî wê, rewşa têngîna hevrastaka rastîn ku wê, di nava du nûqteyan de wê, were pîvana bi cetwelê jî wê, di awayekê de wê, mirov karibê wê, weke rewşek sentetikî a geometrikî jî wê, werênê ser ziman. Di wê rewşê de wê, têngînên auklid wê, di aslê xwe de wê, dema ku mirov li rengê hizirkirina wî binerê û derpêşên wî yên bi pirtûka wî ya bi navê “element’ê de ku wê werina ser ziman jî wê, di wê temenê de wê, weke aliyna ku mirov dikarê werênê ser ziman bê.

Di nava şêwayên geometrikî de wê, piştê wê hin bi hin wê, di awayekê de wê, aliyên din ên geometrikî wê pêşkeve. Di wê rengê de wê, geometriya cebirî bê û ankû dahûrî û hwd bê ku wê bi aqilmeşandinê û hwd wê were ser zima jî bê mirov, dikarê wê, di awayekê de wê, weke derketina dervî têngîna geometriya sentetikî a ku wê bi awayekê nepenîparêzî wê xwe bide nîşandin kirin bê. Di wê rewşê de wê, şêwayê pîvan û hasibandinê ên di nava têngînên mîtolojikî û hwd de jî wê, di aslê xwe de wê bi wê re wê di awayekê de wê mirov dikarê wê, werênê ser ziman. Ber ku wê rengên hizirkirinên berê wê, di wê temenê de wê, ji wan wê were derhanîn weke derpêşna hizirkiri wê, êdî wê di wê rengê de wê, awayekê sentetikî wê bi xwe re wê bide nîşandin. Lê piştê wê, êdî wê, di temenekê nûqteyî, hevrastî û hwd de ku wê, têngînên geometriy wê pêşkevin wê, hin bi hin wê di dewama wê de wê, weke aliyna ku wê bi wê re wê, pêşkevin wê werina dîtîn. Ya ku wê, di awayekê de wê, di wê temenê de wê, weke temenekê hizirkirinê ê şenber wê, di aslê xwe de wê, biafirênê wê hebûna matematikê bê ku wê li pêşketinên weke geometriyên fizîkî, eliptikî, dahûrî, cebirî û hwd wê vekê bê. Di dewama dewama wê de wê, ev jî wê weke aliyekê wê yê giring ê din ku mirov wê, dikarê wê, di dewama wê de wê bi wê re wê li wê bihizirê bê.

Pêvajoyên pêşketinên geometriyê ên ku wê, pêşkevin wê, weke ku me di destpêkê de wê, bi papirûsa ahmes û encamên wê re hanî ser ziman wê êdî wê, nêvî bi nêvî wê, di şêwayekê de wê, bi awayekê matematîkî-dahûrî bê. Di wê rewşê de wê, di wê rengê de wê, di matematika

mesopotamiya de wê, di wê rewşê de rewşa ku mirov wê, dibînî ku wê, bi zêdeyî weke ku wê di nivîsên bizmarî de wê were dîtî wê, di rengekê dahûrî û cebirî de wê, hin bi hin wê awayekê pêşketinê wê bi wê re wê were dîtî. Ev jî wê weke aliyekê wê yê din ê ku mirov wê, dikarê wê, di awayekê de wê bi teybetî wê fahmbikê û wê werênê ser ziman bê. Di dewama wê de wê mirov dikarê wê, werênê ser ziman ku wê pêvajoyên geometriya mesopotamiya mirov dikarê wê di bin sê beşan de wê lêbikolê. Beşa pêşî a bi awayekê têgînî û sentetikî ku wê ji pêvajoyên destpêkê ên sentetikî bê. Pêvajoya duyem ên ku wê, nêvî bi awayekê geometriya sentetikî bê û nêvê din wê bi ber aliyên geometriyê ên weke dahûrî û cebirî ve wê herê bê. Pêvajoya dawî jî wê weke ku wê ji demên hûrî û mîtannîyan û heta demên medîya û hwd wê, di awayekê zelal de wê bi cebirî û dahûrî û ankû eliptîkî wê dest bi pêşketina xwe wê bikê wê, were ser ziman. Gotinên weke 'dunya weke tepsiyekê rast a' ku wê taqabûlî geometriya sentetikî bikin wê hin bi hin wê bête kirin berlêpîrsînê de di mejîyan de. Ev jî wê bi xwe re wê, di awayekê de wê, şêwayên nû ên hizirkirinê wê werênê li holê. Ji xwe wê, piştî wê, di demên felsefeyê de wê, gotinên weke 'dunya gilover a', 'roj weke navenda rêkadîza me ya' û hwd wê, bi dengî wê piştî wê werina ser ziman. Di wê rengê de wê, di awayekê de wê, di aslê xwe de wê, ev şêwayên hizirkirinê wê piştî wê, bi gotinkirinên ku wê bi wan wê bibin wê, piştî wê, temenê wan wê bi hizirkirinê wê hin bi hin wê bê tişkirin. Di wê rengê de wê, ev wê, weke aliyên din ên ku mirov dikarê wê, di wê rengê de wê, werênê ser ziman ku wê mijarên lêkolînê ên bi stêrzanî wê, di wê rengê de wê, di awayekê de wê, weke aliyekê din wê, xwe di awayekê de wê, bide çêkirin.

Mînaq pisagor wê, di dema hizirkirinên xwe de wê di nava hizirkirinên wî de wê, gotinên li ser 'giloveriya dunyayê' wê bête ser ziman. Di dewama wê de wê, di wê rengê de wê pîvandinên weke ji nûqtayekê li nûqtayekê wê hin bi hin wê li ser nûqtayan re wê dest bi hebûna wan wê were kirin. Di wê rengê de wê, di awayekê de wê, ev wê, êdî wê hin bi hin wê weke aliyên bi pêşketina aqil re wê bi demê re wê, bi zêdeyî wê pêşveçûna wan wê were dîtî.

Di wê rewşê de wê pêvajoyên felsefeyê ku wê mijarên weke rastiyê û şenberî û razberiya wê hin bi hin wê ji xwe re wê, bikê mijar wê ji vê aliyê ve jî wê temenekê fahmkirinê wê bi encamên wê re wê derxê li holê. Di dewama wê de wê jî mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê, heta ku wê piştî serdemên kevnera wê demê wê were demên serdemên

navîn wê, di wê rengê û awayê de wê pêvajoyên hizirkirinê wê zêdetirî wê, di awayekê de wê, bi têngînek hizirkirinê a fîzîkî ku wê bi têngînek dahûrî a felsefeyê û hwd ku wê bikê temenê xwe de wê, pêşkeve. Hizrên Gelilei wê, di wê rengê de wê, zêdetirî wê, di awayekê de wê, weke ku mirov wê, bi yên kepler û kopernik re hilde li dest wê zêdetirî wê, di wê temenê de wê, weke encamekê jî bin. Di wê rengê de wê, di aslê xwe de wê matematik wê, di awayekê de wê, weke aliyekê giring wê, xwe di dewama wê de wê bide dîyarkirin.

Di aslê xwe de wê, pêvajoyên hizirkirinê ên ku wê, di wê rengê de wê, werina dahûrkirin wê, ji gelek aliyan ve wê pêwîstî bi awayên fahmkirina wan wê hebê. Di wê rengê de wê, felsefeya mesopotamikî wê di awayekê de wê, zêdetirî wê, têngînek dahûrî wê, hê di demên xwe yên pirr zû de wê, di nava xwe de wê, weke zaroyek ku ew wê piştire wê werênê li dunyayê wê, pêşbixê û wê piştire wê encamên wê bi pêvajoyên felsefeyê û hwd re wê, xwe bidina nîşandin. Minaq pêvajoyên matematikê û hwd ku em î ro ji wan deman kifşdikin wê, di wê rewşê de wê weke aliyna giring ên fahmkirinê bin ku em di sserî de wan fahmbikin bin. Di wê rengê de wê, fahmkirina geometriyê wê, di aslê xwe de wê, serûwana wê û pêvajoyên pêşketinê wê, weke dîroka wê di awayekê pirr zêde demdirêj de wê bi temenbûna wê re wê pêşkeve û wê xwe bi demê re wê bide **nîşandin**.

Pêvajoyên pêşketina geometriyê wê dema ku mirov wê, werênê ser ziman mirov wê, nikaribê ji pêvajoyên pêşketina aqilê ku ew hewirdora xwqe fahmdikê dûr werênê ser ziman. Ev jî wê bi wê re wê, di aslê xwe de wê, tiştêkê din jî wê, bale me wê bide li ser wê. Di wê çerçoveyê de wê, di aslê xwe de wê, gotina felsefeyê û geometriyê bi hevdû re wê, têtikiliyek fahmkirinê a wan bi hevdû re çêbikin û gotina felsefeya geometriyê ji wê derhênin wê di awayekê de wê, karibê temenekê fahmkirinê biafirênê. Di dewama wê de wê jî mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê, di serdemên kevnera de wê, dema ku mirov wê, dibînê wê bi zêdeyî wê bi awayekê bi şîroveyî hanînên ser ziman ên weke yên filosofên demên kevnera wê, di wê warê de wê, karibê têngînekê bide me. Di çerçoveyekê de wê, ji fahmkirinên geometrikî wê, çendî ku wê bi derfet bê wê, weke ku wê Riemann wê bikê hewldana xwe gihandina li felsefeyekê di derbarê wê de û bi wê re çêkirina temenekê fahmkirinê wê ji aliyê din ve jî wê, weke ku wê mirov karibê bi heman şêwayê wê, bikê û wê temenekê fahmkirinê wê bi wê re wê çêbikê.

Di wê rewşê de wê, di wê rengê de wê, di aslê xwe de wê, şêwayê hizirkirinê ên weke felsefeyê û hwd wê, di awayekê de wê, weke ku mirov dikarê wê fahmbikê wê, ji navaroka xwe ve û awayê fahmkirinê û têkilidanîna bi argûmanî û hwd re wê, di awayekê de wê, weke ku mirov dibînê wê aliyekê wê yê geometriyî jî wê bi sehî (*intuition*) wê, bi wê re wê, hebê ku mirov wê, di serî de wê, fahmbikê û wê werênê ser ziman bê.

Klein wê, di awayekê de wê, dema ku mirov li şîroveyan wî yê geometriyî dinerê wê mirov bi wan re kifşdikê. Di şîroveyan xwe yê geometriyî de wê, di awayekê de wê, ji awayekê sentetîkî wê weke ku wê, dûrnekeve. Di wê rewşê de wê, ji ya gelemper bi ber ya din ve wê, di awayekê de wê, weke ku wê, bikê ku ew bi wê re biherikê û herê.

Felsefe wê, di serî de wê, di awayekê de wê, karê wê ew bê ku wê çawa wê, di awayekê de wê, temenekê fahmkirinê li ser temen, teorem, gotin û awayên geometrikî wê bide çêkirin û wê werênê ser ziman bê. Di wê rengê de wê, felsefe wê, weke temenekê fahmkirinê û ji aliyekê din ve jî wê, weke temenekê pêşketinî jî wê weyneke wê di wê de wê, bileyizê. Di wê rengê de wê, di serî de wê, mirov dikarê wê, weke aliyekê giring wê werênê ser ziman.

Ji aliye hizrî ve wê ti demê û carî mirov wê nikaribê bê temen pêşketinekê wê çêbikê. Di wê temenê de wê hizirkirinê di wê rengê de wê, di awayekê de wê, dema ku mirov wê, di wê rengê de wê li wê bihizirê wê, di wê rewşê de wê, mirov dikarê wê, biawayekê wê, fahmbikê. Di her rengê hizirkirinê de wê, awayekê geometriyî ê ku mirov wê, dikarê wê kêma zêde kifşbikê û wê werênê ser ziman wê hebê. Ev di romanek wêjeyî de jî wê wusa bê. Ev wê di pirtûkek felsefeyê de jî wusa bê. Wekî din wê di awayên din ên hizirkirinê ên weke bi zanyariyên din jî wê, wusa bê. Di wê çerçoveyê de wê, şîrove wê, di awayekê de wê, aliyekê ku wê, bi wê pêwîst bê ku ew were ser ziman wê, di awayekê de wê, weke ku wê, were ser ziman. Di wê rengê de wê, di awayekê de wê, mirov dikarê wê, werênê ser ziman.

Di aslê xwe de wê, di wê rengê de wê, pêşxistineka felsefeyî a bi temenekê geometriyî wê, di wê rengê de wê, di wê rewşê de wê, weke temenekê giring ê pêşketinê jî mirov wê karibê wê pêşwazî bikê bê. Di wê rengê de wê, di serî de wê, weke aliyekê giring wê mirov dikarê wê, werênê ser ziman. Felsefe wê, ev aliyê wê yê ku em wê dikarin wê li ser temenekê fahmkirinê bi dahûir wê, hildê li dest wê, bo geometriyê, matematikê, biolojîyê, fîzîkê û hemû beşên din ên zanîna jî wê mirov

karibê wê di wê rengê de wê, hilde li dest û wê werênê ser ziman bê. Di wê rengê de wê, weyna wê, di wê rengê de wê, weke aliyekê giring ê bi fahmkirinê, pêşxistinê, dana fahmkirinê, derxistina li têgihîştinê û hwd re wê, bide çêkirin.

Minaq di derbarê bûjenên geometriyî de em çî dizanin û çawa dikarin wan bi awayekê fahmbikin wê, di wê rengê de wê, weke aliyekê ku em dikarin bi wê re wê fahmbikin bê. Di rewşên bi birhankirinê, fahmkirina xosletên wê, têkiliya elementên wê yên bi hevdu re wê di awayekê de wê, weke mijarên wê yên ku em dikarin bi felsefeyî wan fahmbikin û hildina li dest bin. Li ser temenekê geometriyî wê, bi awayekê şeklî û ankû awayî fahmkirin û ankû ji nûqteyê li nûqteyê mirov wê çawa dikarê wê fahmbikê û ankû wê wateya wê bi fahmkirinê wê çî bikê wê, bikê ku wê derxê li têgihîştinê. Wê dema ku em bi dahûrî wê bêjin ku  $ab=c$  bê wê demê wê  $c$  wê, xwediyê sê fektoran bê. Ku mirov wê bibirhankirina wê li ser wê bisekinê wê demê minaq wê mirov wê bêjê ku  $A$  ber ku wê hevgirtinek bê wê,  $a=de$  û di hinek awayan de  $jî$  wê  $d,e$  bê. bi goitnek din wê demê wê,  $c = deb$  bê. Wê demê wê,  $C$  wê, bi her sê fektorên xwe re wê, di awayekê de wê, werê dîtin. Di awayê fahmkirina geometriya dahûrî de wê, zêdetirî wê awayekê felsefeyî ê temenî wê xwe bi wê re wê, weke ku wê bide nîşandin. Di wê rewşê de wê, bo fahmkirina wê temenê wê, di awayekê de wê, li ser temenekê wê hizirkirina wê, bi awayekê wê, bi têgînek cebirî wê çawa wê bê hanîn li ser ziman wê weke aliyê wê yê ku wê geometriya hemdem wê, bi wê ve wê, temenê xwe yê pêşketinê wê bide nîşandin. Ji pêvajoyên geometriya klasik û kevn ta ya demên hemdem wê, di wê rewşê de wê, pêvajoyên wê yên ku ew bi matematikî û hwd ew hatina pêşxistin û bûhûrandin wê temenekê fahmkirinê wê, bi xwe re wê, biafirênê ku mirov wê, ji wê bi pêşxistinên geometriyî  $jî$  wê, weke temenekê wê hilde li dest û wê, fahmbikê bê. Tabi ku em ji aliyê têgîna epitemolojiyê ve wê, hilde li dest wê, geometri wê xwediyê temenekê matematikî û fîzîkî bê. Wê di wê rewşê de wê, weke aliyekê wê yê din ê giring  $jî$  wê, li ser wê temenê wê çawa wê bi hemû alî, obje û şubjeyên xwe re wê were fahmkirin wê weke mijareka wê ya fahmkirinê bê ku mirov wê, hilde li dest bê. Di awayên fahmkirinê ên matematikî ku wê, bi hijmarî, teromî, derpêşî û hwd re wê, bihizirê wê, bi temenekê mantiqî wê, di wê temenê de wê, di awayekê de wê, were dîtin. Lê di wê rewşê de wê, di awayekê de wê, mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê mijare fahmkirina aliyên wê yên ku ew li ser wan re pêşdikeve wê, bi têgînî wê li ser temenekê çawa wê, bê fahmkirin

wê, di wê rengê de wê, felsefe û bi teybetî jî epistemolojiya wê, bê fahmkirin. Min di lêkolîna xwe ya bi navê 'felsefeya matematikê' de wê, ji hinek aliyên ve bi temenî ew ji aliyên epistemolojikî ve hewlêda ku wan werênima ser ziman. Di wê rewşê de wê, gelek rewşên ku min di wê de hanîna ser ziman wê di awayekê de wê, weke ku wê bo matematikê wê, çawa wê werina ser ziman wê, bo geometriyê jî wê, bi heman rengê wê, di awayekê de wê, bi temenî mirov dikarê wê fahmbikê. Ber ku wê geometri wê li ser temenekê matematikê wê xwediyê temenekê fahmkirinê bê.

Di pêvajoyên pêşketinê ên hemdem de wê, weke aliyekê giring wê, çawa wê ghiştina li pêşketinek hemdem a geometriyê wê bibê û wê bi wê re wê dînya û hewirdor wê bi nerînekê wê were fahmkirin wê, di wê temenekê de wê hebûna temenê wê yê bi hizirkirîna wê giring û jîyanî bê. Di wê rengê de wê, di wê rewşê de wê, di serî de wê, di wê, weke aliyekê wê yê giring wê, di wê çerçoveyê de wê, ev wê weke aliyekê giring wê xwe di awayekê de wê, bide nîşandin. Armanca xwe gihandina geometriyek pêşketî ku ew wê, di wê xwe de wê, xwediyê hêzek vegotinê bê wê, di wê rewşê de wê, bi hebûna temenê wê yê fahmkirinê ve wê girêdayî bê. Di wê rewşê de wê, aqil û encamên wê yên ku ew bûna wê, di temenê wê de wê dikarê wê, di awayekê de wê, fahmbikê. Ghiştina li nerînel geometriyê û bi wê karîna ji nava teori û fahmkirinên cûda jî derxistina encamên matematikî û geometriyê û hwd wê, di wê rewşê de wê, bi hebûna temenekê wê yê fahmkirinê ve wê, girêdayî bê. Di wê rengê de wê, ew jî wê, bi wê re wê, xwe gihandina fahmkirinê ku mirov wê bi wê karibê bi wê fahmbikê, derkbikê û derxê li têgihîştinê û hwd.

Em dema ku li pêvajoyên pêşketina aqil binerîn wê bi wê, re wê minaq wê weke bi matematikê, geometriyê û hwd re wê, çawa wê hin bi hin wê, pêşkeve wê, gav bi gav wê were dîtin. Di dewama wê de wê, di demên felsefeyê de wê dema ku wê, li ser element, dîyardê û fenomenên wê re wê, bikê ku wê werênê ser ziman wê, piştê wê, mirov wê bi aqilê xwe wê fêrî fahmkirina wan aliyên bi tenê bi serê xwe ku ew wê derxê li têgihîştinê bê. Gotina fezeyê ku wê weke gotinek gelemper û razber bê wê, çawa wê, di wê de wê, xwe bigihênê li fahmkirinê wê, di wê temenê de wê bi wê re wê li wê bihizirê. Di wê rewşê de wê, pêşî bi teoriyên pêşketina wê û ankû bi derbarê wê de ku wê, bibin wê, bi wan wê bihizirê. Di dewama wê de wê, weke aliyekê din wê, di wê rengê de wê, di awayekê de wê, weke aliyekê giring wê, xwe bide nîşandin.

Bêgûman wê felsefe wê, wê bi awayên xwe yê pêşketinê wê temenên hizirkirinê ên di wê warê de wê karibin ji aliyê xwe ve wê, bidina çêkirin. Lê ev wê, bi serê xwe wê têrê nekê ku em di bi teybetî xwe bgiihênina temenekê fahmkirinê ê di wê warê de. Bi teybetî di demên hemdem de wê, bi dahûr wê felsefe wê, li ser temenê fahmkirinê û derxistina li têgihiştinê a temenên wê re wê, pêwîstîya ponijbûna bi awayekê bi teybetî bi giştî bi wê aliyê wê ve girêdayî wê hebê. Di wê rengê de wê, di roja me de wê, gotina geometriyê jî, ya matematikê û gelek zanînen din jî wê, di wê warê de wê, bi temenekê epistemolojikî ê jîyanî, fîzîkî û bûjenî û hwd re wê, di awayekê de wê, awayên wan ên fahmkirinê wê hin bi hin wê bê pêşxistin. Geometri wê, minaq wê li ser aksiyoman re wê ji nûqteyekê li ya din wê, di hevraştiya wê de wê, bi hijmarkirinê re wê, bikê ku wê fahmbikê. Di warê de geometriyê de wê, di nava felsefeyê de wê, dema ku wê bi temenekê wê, li ser hijmar û teoremên hijmarî re wê bê pêşxistin. Pisagor wê teoremên wî yê ku wî bi teoriya hijmaran re wê pêşbixê wê, di wê warê de wê, weke aliyekê wê yê giring bê ku mirov wê, di serî de wê, fahmbikê û wê, werênê ser ziman bê. Bi çavika hijmaran dest bi nerîna matematikê û geometriyê û hwd kirin wê, di wê rengê de wê, di awayekê de wê, geomeriyê wê bi ber awayekê dahûrî û cebirî ve wê, bidest birinê ve wê bide kirin. Minaq ku em teoriya anaxsimendros binerê wê têngîna ´epeiron´ê ku wê werênê ser ziman wê, di wê rengê de wê, awayekê wê yê fahmkirinê ê ku mirov wê, dikarê wê, fahmbikê bê. Hin bi hin weke matematikê derketina li pêş têngîna geometriyê wê bandûra wê di felsefeyê de wê, li ser temenekê dahûrî wê jî ya aliyê sentetîkî wê dûrbûnekê bi xwe re wê bide çêkirin. Ev jî wê, rêyên fahmkirinê ên weke matematikê, geometriyê û hwd wê, hin bi hin wê bi serê xwe wê weke aliyana fahmkirinê wê, derxê li pêş. ..

### **Hin bi hin pêşketina geometriyê bi serê xwe weke zanistekê**

**Geometri** wê dema ku mirov wê hilde li dest wê, di serî de wê, divê ku mirov wê, di bin sê beşan de bi serekeyî wê hilde li dest. Di aslê xwe de wê, gelek awayên wê yê ku em dikarin wê dbin wê û navê wê de wê hildina li dest. Di roja me de wê, dema ku wê, bahsa geometriyê wê, di demên hemdem de wê, bê kirin wê geometriya auklidiyan û ya ´der-auklidyan ku wê, bi navê ´hiperbolik´ jî wê were bi navkirin wê dikarin wê werênê ser ziman. Emê li jêr li ser wan aliyên bisekin in. Lê li ber berî ku em derbasî mijara xwe xwe bibin em di serî de wê dikarin wê weke aliyekê giring wê, di serî de wê, werênina ser ziman ku wê, di wê

rewşê de wê, di aslê xwe de emê, di awayekê dahûrî û şîrovevî ve wê, pêşî wê, di temenekê ku ew dikarê weke bi fahmkirinake destpêkê were fahmkirin de wê, hildina li dest. Emê mijarê di destpêkê de wê, di nava denkleman de wê nebin. Ji xwe li gori min ku ew mantiqê wê wê, bi şîrovevî û hwd ew hat fahmkirin wê, dewama wê de wê, weke aliyekê giring wê, di wê rengê de wê, di awayekê de wê, ew aliyên wê yên denkleminê jî wê, di awayekê de wê bi hesanî wê werina fahmkirin.

Di dewama wê de wê, weke aliyekê wê yê din jî wê, di dewama wê de wê, dikarin wê werênina ser ziman ku wê geometri bi aliyê wê yê felsefeyê û dîrokî jî wê, weke aliyna giring wê, di serî de wê mirov dikarê wê, hilde li dest. Ji aliyê dîrokî ve wê bi pêvajoyên wê yêmn pêşketinê re wê, bi temenekê pêşketinê wê bi wê dikarê were çêkirin û ew were ser ziman. Ji aliyê din ê felsefeyê ve jî wê, li ser temenekê fahmkirina wê bi awayên wê yên fahmkirinê û têgîn û rewşên wê ku ew çawa werina fahmkirin wê, di wê çerçoveyê de wê, di awayekê de wê, di destpêkê de wê, temenekê fahmkirinê wê biafirênê.

Di dewama wê de wê, jî mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê, geometri wê, di pêvajoyên wê yên pêşketinê ku em di destpêkê de wê, çavekê û nerînekê li wê bixin em dikarin wê di dewana wê de wê, werênina ser ziman wê, weke aliyekê giring wê pêvajoyên wê yên fahmkirinê wê werina fahmkirin. Di geometriya demên berê de wê, dema ku wê hin bi bin wê, bidest rijandina wê ya li ser qaxizê wê were kirin wê, di wê rengê de wê, di destpêkê de wê, weke aliyekê wê yê giring wê, xwe di awayekê de wê, bide pêşxistin. Felsefe wê, di wê çerçoveyê de wê, di aslê xwe de wê di demên kevnera de wê, weke ku em bi auklid û hwd re wê, dibînin ew wê, di destpêkê de wê, ew wan salixkirinên geometrikî ên ku ew wê, berê wî li meseopotamiya wê, wan pêşî wê derxê li têgihiştinê û wê wan wê, bi ya u wî ji wan fahmkirî wê balê nava felsefeyê û demên felsefeyê wê bikê.

Di wê demê de wê, hizirkirinên ku wê, werina kirin wê weke bi di nava hizrên demokrit, haraklit û hwd de jî wê, di awayekê de wê, di wê rewşê de wê, dikarê wê, bikirpênê û werênê ser ziman. Wekê din wê, piştî ku wê, felsefe wê, di wê rewşê de wê, bi kar û xabatên dunyawî re wê, alaquadar bibê wê, di awayekê de wê, weke ku mirov wê, dibîne wê, di aslê xwe de wê, pêşketina wê, xwe bi awayekê de wê, bi wê re wê bide dîyarkirin. Felsefe û demên wê, di wê rengê de wê, dema ku wê, pêşkevin wê, bi felsefeya xwezayê ku wê destpêka wê were kirin wê, hinekî wê, di aslê xwe de wê, bi hebûnek şenberî wê hebê. Felsefeya



xwezayî wê li ser rewşa wê ya fîzîkayî û hwd re wê ew wê ji xwe re wê, bikê mijar. Di dewama wê de wê, nîşanakên wê pêşketinê û rengê wê, bi felsefeya epîkur re jî wê, di awayekê de wê, were dîtin.

Di dewama wê de wê jî mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê, felsefeya demên kevnera wê, dema ku wê, bidest karê dunyayî ve wê bibê wê demê wê aliyekê din wê xwe bi wê re wê, bide dîyarkirin. Ew jî wê ew bê ku wê li gorî ya ku ew, berê hatî ser ziman weke vi felsefeye yazdanî û hwd re wê, çawa wê ew wê dunyawîti wê were fahmkirin û wê, li ser wê ya dunyawîtiyê re wê ya yazdanî wê divê ku mirov wê dikarê wê fahmbikê wê, di wê çerçoveyê de wê, weke aliyekê wê yê giring wê xwe bide nîşandin. Di felsefeya platon û piştî a Aristo de wê, di aslê xwe de wê, dema ku wê felsefe wê bi ber şîroveyên ontolojîkî ve wê herê wê, di wê rengê de wê, di awayekê de wê temenê wê hebê.

Felsefe wê ne belesebeb bê ku wê, matematîkê, geometriyê û hwd wê, di nava xwe de wê, kifşbikê û wê li ser wê re wê, di wê rengê û awayê de wê bidest pêşketina wê bikê. Di wê rewşê de wê, tiştî ku ew heyî wê, di aslê xwe de wê, di wê rengê de wê, bi wê re wê, weke temenekê fahmkirina wê xwe bide nîşandin. Di wê rengê de wê, di serî de wê, weke aliyekê giring wê mirov dikarê wê, di awayekê de wê, fahmbikê bikê û wê werênê ser ziman ku wê felsefe wê, di wê rengê û awayê de wê, xwe di awayekê de wê, bi wê re wê, bide pêşxistin.

Xweza û rastîya fîzîkî ku ew hebê wê, li ser temenekê fahmkirinê wê mirov dikarê wê bi çerçoveyek hebûnî a darêjkî re wê fahmbikî. Wê, dema ku em bahsa darêjkê û fîzîkê wê bi wê re wê bikin wê, di wê rengê de wê, hinekî jî wê, ji aliyekê ve ku em ji aliyê têngîna matematîkê û geometriyê û hwd ve wê li wê binerîn wê, weke ku em wê bikirpênin wê hişmendî û têngînek wê di destpêkê de wê bi me re wê çêbibê.

Di dewama wê de wê, di wê rengê de wê, ew wê, bi wê re wê pêvajoyên xwe yê pêşketinê wê, bi de çêkirin. Pêvajoyên fîzîkê ên ku yê ku em bi matematîkê û geometriyê re wê hildina li dest wê, ji aliyekê din ve jî wê, têngînekê wê bi me re wê bide çêkirin. Di aslê xwe de wê, têngîliya têngîna gûharîn û matematîkê, geometriyê û hwd jî wê, di wê çerçoveyê de wê, weke ku wê, aliyekê ku wê ew wan bikê berpîrsînê bi hevdu re de wê, xwe bide nîşandin.

Di rewşê de wê, felsefe wê, di wê rengê de wê, di awayekê de wê, weynek giring wê, wê bi wê bileyizê ku wê aqil û zanîna wê bi temenekê fîzîka ku ew heyî wê, bê hizirkirin. Piştî felsefeya xwezayê û pêvajoyên wê yê hizirkirinê wê, bi demê re wê, têngînen weke yê ku em dikarin

wê, bi wê re wê, bi têngînek ontolojikî jî fahmbikin wê, têngîna darêjkê wê xwe bide nîşandin. Li gorî mantiqê û felsefeya wê, darêjk wê, weke têngînek fîzîkî, bi awa, reng û şekil bê. Wê, di wê rengê û awayê de wê, di destpêkê de wê mirov dikarê wê bi awayekê giring wê, di destpêkê de wê, fahmbikê.

Di wê rewşê de wê, demê wê, dema ku wê bi awa û şekil bê wê, demê wê ew awa û şekil wê çawa wê werina fahmkirin wê, bi wê re wê, weke temenekê wê yê fahmkirinê wê hin bi hin wê matematik û geometri wê pêşkeve. Geometri wê, di destpêkê de wê, weke têngîneka ku wê bi wê navber û ankû ji nûqtayekê li nûqtayekê ku wê werê fahmkirin wê, were dîtin. Pêvajoyên pêşketinê ên geometriyê ku wê li mesepotamiya wê pêşkevin wê di wê rengê û awayê de wê, regekê hizirkirinê wê bi xwe re wê, di awayekê de wê, weke ku wê bidina me. Di dewama wê de wê mirov dikarê wê, weke aliyekê wê yê giring wê, di serî de wê, dikarê wê fahmbikê û wê werênê ser ziman.

Di dewama wê de wê, ev wê, weke aliyekê wê yê din ku mirov wê, dikarê wê balê bikişênê li ser wê bê. Têngîna koordinat, referans û hwd wê, weke aliyekê ku mirov wê, dikarê wê bi têngîna geometriyê re wê li wê bihizirê wê werênê ser ziman bê. Geometri wê, di destpêkê de wê, bi hesanî wê mirov dikarê wê, ji nûqtaya a li nûqtaya bi wê, navbera wê xwediyê çî dirêjehiyê bê wê, bi wê re wê, di awayekê de wê, bi wê bihizirê wê bikê ku wê fahmbikê bê. Di wê rengê û awayê de wê, di serî de wê, weke aliyekê wê yê giring wê, mirov dikarê wê werênê ser ziman.

Di wê rewşê de emê li jêr werina ser wê jî. Di geometriya dahûrî a Auklidyen de wê, çawa wê, di awayekê de wê, weke li ser awayekê rastê wê, minaq bi a, b, c û bi wê re ku wê nûqta jî wê weke (x, y) wê, bi hijmarîyên bûhûrîner wê, di awayekê wê weke li ser dûzrasta wê, bi denklemî wê weke  $ax + by + c = 0$  ku wê dikarê were pêşxistin wê, (x, y) wê, koma rêzî duheviyên wan jî wê weke ku wê bi awayekê tememî wê di wê de wê, bidina nîşandin. Bi wê wê auklidyen wê weke têngînek gerdûnî wê were û bibê wê, di aslê xwe de wê wê, li ser wê temenê wê weke awayekê modelî wê bi xwe re wê, weke ku wê biafirênê. Di dewama wê de wê weke aliyekê wê yê din jî wê mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê rewşa wê, di wê rengê de wê, weke aliyekê modelî wê, di awayekê de wê, li ser rewşa wê bide nîşandin. Bi çend gotina ku mirov bahsa geometriya auklidyen bikê bo salixkirina wê ya li ser wê temenê wê li vir wê weke ku wê, di destpêkê de wê pêwîst bê. Li rastîyekê wê, dervî wê ji nûqtayekê wê tenê hevrastek wê karibê were xêzkirin. Di

dewama wê de wê bènê ser ziman ku wê geometri wê li ser dûzlemekê bê. Weke aliyekê din jî wê werênê ser ziman ku wê sêkoşeyek sêkik wê her sê koşeyên wê, wê, hevrastên wê yên hundûrîn wê, giştîya wan wê, 180 rêja bê. Wê, di wê rengê de wê, ev her sê rêgez wê, weke awayê modela geometriya auklidyan wê bènina ser ziman.

Di dewama wê de wê dema ku em wê werênina ser ziman wê Auklid wê dema ku wê wan aksiyoman wê bide wê bi wan re wê, bo çêkirina modelekê bin. Model wê, fêdeya wê ew bê ku wê, weke ku me di denklema li jor de hanî ser ziman ku wê, yan wê, di awayekê dahûrî de wê, pêşbixê û yan jî wê wergerênê li rengê razber ê cebirî ku ew bi wê werênê ser ziman bê.

Di çerçoveya têgîna geometriya dahûrîner de wê, dema ku mirov wê bihizirê wê, di serî de wê mirov dikarê wê bi wê werênê ser ziman ku wê, çawa wê li ser wê re wê hasibandinê wê bikê bê. Di warê hizirkirina bi têgîna geometriya dahûrîner re ku wê, bi koordinatên rêzî wê, bikarhanîna wan wê, di aslê xwe de wê, dîroka wan wê, heta demên gûtî û hûrîyan wê herê. Piştê li misrê jî wê di awayekê de wê mirov dibînê ku wê bê kirin. Yê ku wê, weke ku wê bi felsefeyî wê, şîroveyek wê pêşbixê jî wê piştê wê, Apollonius bê. Di dewama wê de wê, di awayekê ku wê, denkî yên roja wê, şîroveyek dahûrîner a geometri ku wê were pêşxistin wê rastî dema Nicole Orseme bê. Orseme wê, di warê dahûrîyên xwe yên geometriyî de wê, denklêmên rastî û duzlemê wê, ew wê, bi awayekê şîroveyî wê weke ku wê pêşbixê.

Di aslê xwe de wê, dema ku em di awayekê hemdem de wê, li rengên destpêkên şîroveyî bigerihin wê, di awayekê de wê, Descartes û Pierre wê, di awayekê de wê, şîroveyên wê werina kirin. Descartes wê, di aslê xwe de wê, di awayekê de wê, dema ku ew geometriyê wê kifşdikê wê, di awayekê de wê weke ku ew wê li xoşa wî herê û wê ew wê, di wê rengê de wê, bikeve nava hewldana hanîna wê ya li ser ziman de. Di wê rewşê de wê, wê rengê geometriya ku wê, Di awayekê de wê weke ku em di nava **pergalek kartezyeni** a di awayekê asayî de wê çawa wê li pergale koordinatê wê bihizirê wê, were dîtin. Ku em bi wê weke  $(x, y)$  wê, weke hevrastiya wê bihizirin wê, di awayekê de wê, rastî hevdû werin di nûqte  $O$ ê de wê, ew wê, li wê bihizirê. Ku koordinatê  $x$ ê ew navberê bidina nîşandin wê, li ser xalekê ku ew hatî kifşkirin re wê, li ser koordinate  $y$ ê re wê, weke ku wê descartes ku wê werênê ser ziman wê, di awayekê helesonîyî de wê, çawa wê, lev bèn wê werênê ser ziman.

Geometriya Descartes wê, di aslê xwe de wê, di awayekê de wê, geometriya dahûrîner bê û wê, di awayekê de wê çawa wê, bi têkilî û awayekê cebirî wê ew wê, were têkilîdanîn, fahmkirin û pêşxistin wê, di wê rengê de wê, temenekê hizirkirinê wê were çêkirin. Piştî ronansê wê, realism wê, di awayekê de wê, weke nirxek hizirkirinê wê hin bi hin wê di nava hizir de wê bicih bibê û wê, di dewama wê de wê, di awayekê de wê, rengê hizirkirinê jî wê bi xwe re wê, bide nîşandin. Di dewama wê de wê, di awayekê de wê, ev wê, weke aliyekê din jî wê, rewşa fîzîkê û dahûrînerina wê, di awayekê matematîkê û rengên wê yên weke geometriyê û hwd re wê, êdî wê, di awayekê de wê, were pêşxistin.

Wê dema ku mirov wê, li ser têgîna bûjenê û hwd re wê bi wê bihizirê wê, demê mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê, bûjen wê dema ku ew digûharê û cih di gûharênê wê, bi wê re wê, weke ku wê awayekê geometrikî jî wê bi wê rengê wê bi xwe re wê bide dîyarkirin. Dem û rê wê, li ser wê re wê, di awayekê de wê, karibin werina pîvandî. Ya ku wê, di destpêkê de wê, descartes wê bikê wê, bûjenê wê daxê li rewşa geometriyê û wê bi wê re wê, weke rewşek dahûrîner wê ew wê pêşbixê. Di awayekê de wê, rêkûpêktiya wê, zanîna pîvane wê û hwd wê, di awayekê de wê weke aliyekê wê yê ku ew bi heyînî wê bi wê dikarê wê li wê bihizirê bê. Di geometriya razber de wê, piştî bi dahûrînerîya cebirî û hwd re ku wê pêşkeve û pê de wê, di wê rewşê de wê, bi têkiliyek teybet re wê, tenê wê bi cerba fîzîkê, bûjenê û hwd re wê, xwe bigihênê temenekê fahmkirinê. Ya ku mirov wê, bi asoyî wê, dikarê xwe bigihênê têgihîştina wê, di wê rengê de wê, weke aliyekê wê yê ku mirov wê, dikarê wê, di serî de wê, weke aliyekê giring wê li wê bihizirê bê. Geometriya dahûrîner wê dema ku ew pêşkeve wê, hingî wê bi awayekê cebirî wê, pêşxistina wê, weke têgîn û temenekê ku wê bi wê nepeniyên xwezayî jî wê werina fahmkirin û wê mirov wê xwe li wan bigihênê zanîne wê, bi wê re wê, weke aliyekê wê yê bi wê hizirkirinê ku wê bi wê bê kirin bê. Di awayekê de wê, weke ku em bi matematika Brouwer re wê dibînin wê di awayekê sehî (intuition) de ku wê, pêşbixê wê, weke deriyekê hizirkirinê ê razber wê, bi wê re wê, xwe di awayekê de wê, bi geometriya dahûrîner re wê, xwe bi temenekê hizirkirinê wê bide nîşandin. Di wê rewşê de wê, sînore hizirkirinê ku wê, rewşa fîzîk û bûjenê wê heta deverekê wê ji xwe re wê bikê çavkanî û temen û wê bi wê bihizirê wê, piştî wê bi têgîna 'ya ji wê wirdetir' ku wê bi wê bikê ku wê li wê bihizirê wê, di wê rewşê û rengê de wê, di awayekê de wê êdî wê sehî û asoya wê, bikeve dewrê de.

Wê, di pêşengîya zêhnî de wê seh wê pêşkeve û wê bi awayekê sentetîkî û dahûrî û hwd jî wê, bi awayekê zêhnî wê, pêşveçûna fahmkirina xwe wê, bide nîşandin. Di serdemên hemdem û destpêka wan de wê, rêgezêk hizirkirinê a realist ku wê di nava têngîna geometriyê de jî wê xwe bide çandin û dîyarkirin wê bibê. Ew jî wê, ew bê ku wê dema ku mirov ya ku ew nizanibê wê rast herê nekê bê. Wê hinekî jî wê dema ku mirov wê têngîna sehê (intuition) wê di wê li wê bihizirê wê hinekî wê, weke derketina li ser wê rêgeza hizirkirinê re wê, di awayekê de wê, xwe bide nîşandin. Bi têngîna dervî ya ku ew rast dizanim jî wê rast hebê weke realiteyekê wê, di wê rengê û awayê de wê, di serî de wê mirov dikarê wê bi wê re wê, di awayekê de wê, werênê ser ziman bê.

Di wê rewşê de wê, dema ku mirov wê rewşa sehê wê di wê xalê de wê, werênê ser ziman wê, aso û seh (intuition) wê, di awayekê de wê, têkiliyek wan ya fîzîkî wê, weke ku wê çawa wê bi têngînek geometriyî wê bi hevdû re wê bê danîn wê weke mijare geometriya razber ku wê bi awayekê cebirî û wê di dewama wê de wê pêşkeve jî bê. Di wê rewşê de wê, di aslê xwe de wê, di wê rewşê de wê mijare têkiliya aso û sehê ku mirov wê hilde li dest wê, di wê rewşê de wê, ev wê ne tenê wê weke mijareka lêpîrsîner a têngîna geometriyê bê. Wê her wusa wê weke mijareka matematikên din jî bê. Brouwer wê dema ku wê, wê têngîna 'metamatika sehê (*intuition*)' wê derxê li pêş ew, dibê ku ew di farqê de bê û ankû ne di farqê de bê wê, di awayekê de wê weke ku wê balê bikişênê li ser wê alî û awayê jî.

Di wê rewşê de wê dema ku wê, mijare sehê (intuition) wê, derkeve li pêş bi têngînek asoyî a fîzîkî û bûjenî wê, di wê rewşê de wê, mijare têkiliya fîzîkî û matematikê, geometri û fîzîkê û hwd re wê, xwe bi awayekê wê bikê berlêpîrsînê de. Di wê rewşê de wê, di matematikê de wê, seh wê, di aslê xwe de wê, di wê rengê de wê, ew wê di destpêka hizirkirina bi xwe re de wê, ew wê têngîna û întûbayê wê bide me ku weke ku wê, weke têngînek ser-fîzîkî bê wê hizrekê wê bikê ku ew di mejiyê me de wê bide çêkirin. Lê li vir wê rewşa pîvana bi demê û hwd re wê, di wê rengê de wê, di awayekê de wê, weke temenekê wê hizirkirinê ê fîzîkî jî wê ji aliyê xwe ve wê bi wê re wê weke ku wê biafirênê.

Di mijare dahûrkirinê de wê, di wê rewşê de wê, di dewama wê de ku wê bi matematikî wê were kirin wê geometri wê weke aliyekê beşkirinê a ji hevdû ku wê bi xwe re wê pêşbixê wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê wê yê giring wê xwe bide nîşandin. Dahûrîti wê, heta ji wê were ku wê ji hev beşkirinê wê weke aliyekê wê ji xwe re wê weke temenê

fahmkirinê wê bênê li holê. Di wê rewşê de wê, di felsefeya wê de wê, heta roja me de wê li ser wê re wê, pîrsek weke 'sînore beşkirinê' wê hertimî wê di awayekê de wê were pîrsîn û wê, di dewama wê de wê, bi wê re wê, weke aliyekê hizirkirinê bi dahûrkirinê re ku wê were fahmkirin bê.

Li gorî wê, çendî ku wê rewşek wê tevlihev jî bê wê, di awayekê de wê, weke ku mirov wê, dikarê wê werênê ser ziman wê, ji hevdû wê, bi beşkirinê wê were dahûrkirin. Her beş wê, weke qata tamê wê di awayekê de wê, biafirênê û wê weke fahmkirina wê ya giştî jî wê, di xwe de wê weke ku wê bihawênê bê. Di wê rewşê de wê, têkiliya beş û tamê a bi hevdû re wê, di wê rewşê de wê, weke ku em di geometriya auklidyan û yên piştire weke ku wê, *geometriyên der-auklidyanî* jî di wan de wê, li wê were hizirkirin û wê hewl were dayîn ku ew were fahmkirin. Di mijare têkiliya qat û tamê de wê, di dewama wê de wê, weke aliyekê mijarî ê dahûrkirinê wê, xwe di wê rewşê de wê, bide nîşandin. Di aslê xwe de wê, qat û ankû beş ku wê weke mirov wê dibînê bi têgîna geometriyê wê hem wê weke beşek ji ya tamê wê were dîtîn û hem jî wê weke hebûnek tamî a bi serê xwe jî wê, were dîtîn. Di wê rengê de wê, beş û ankû qat wê, di aslê xwe de wê, rewşek wê ya geometrikî a di wê rengê de ku mirov wê fahmbikê wê xwe bi wê re wê bide dîyarkirin.

Di mijare fahmkirina bi geometriyê de wê, descartes wê sê aliyên weke temenê fahmkirinê ên bi rengê seh, derxistin û hijmartinê wê bi wê re wê, werênê ser ziman. Di rewşa wê de wê, temmenê weke ku ew weke çar rêgezên di temenê wê de ew dihênê ser ziman ê weke dahûrê, rêz, hijmartin û wê weke aliyekê din û ankû rêgezêk din jî wê, têgîna têgînê wê werênê ser ziman. Wê, ji aliyekê din ve jî wê dema ku ew dihênê ser ziman wê li ser temenê têgîna gûmanparêziyê re wê bi wê ku wê, weke ku ew dihênê ser ziman wê karibê mirov xwe bigihênê têgîna xwezayê û fahmkirina wê.

Di mijare têgîna geometriyê de wê, di wê rewşê de wê, têgîna geometriyê a 'eliptikî ku wê werênê ser ziman weke ku wê, rastiyên hevrast nîn in, geometri wê li ser kûreyekê bê û wê, Wê rûyên aliyê hundirîn ê sêkikê wê giştîya ji 180 wê zêdetir bê. Wê, di wê rengê de wê, di awayekê de wê, werênê ser ziman. Di wê rewşê de wê, ev têgîna geometriyê wê di awayekê de wê, têgîna *eliptikî* ku wê kapler wê di awayekê de wê, bi wê bihizirê wê, ji aliyekê ve wê, weke bi aliyekê wê mirov dikarê wê bi wê ve girêbide û wê werênê ser ziman.

Lê di aslê xwe de wê, weke aliyekê din ê geometriyî wê, dema ku mirov wê li wê bihizirê wê, derketina li holê a geometriyên der-auklidiyan bin. Wê, di wê rewşê de wê, ev jî wê, weke aliyekê din ê ku mirov dikarê wê di awayekê de wê weke aliyekê hizirkirina hemdem ku wê dikarê wê werênê ser ziman bê. Piştî ronansê wê di wê rengê de wê hizirkirinên nû wê pêşkeve. Di wê rewşê de wê, matematika Pisagor û ankû teorema wî, di awayekî de wê, weke ku wê di nava cûreyên geometriyî ên ku ew dihên pêşxistin de wê weke yên berê wê dihên pêşxistin de wê, di awayekê de wê, weke têngîneka ku wê, temenekê ku wê, çendî ku ew wê, ji hev cûda wê werina li ser ziman jî lê wê di aslê xwe de wê, bi têngînek matematikî ku wê bi wê re wê, mirov karibê wê bi temenekê fahmkirinê wê werênê ser ziman bê. Minaq geometriyên weke yên hiperbolik ku mirov weke geometriyên der-auklidiyan jî wê dikarê wê werênê ser ziman wê, di wê rengê de wê, dikarê wê, weke aliyekê din wê bi wê re wê, werênê ser ziman. Ev şêwayê geometriyî wê, di şêwayê fahmkirina wê de wê, weke ku mirov wê, bi awayekê klasikî wê dikarê wê fahmbikê wê, bêtê ser ziman ku wê, Ji der-rastiyekê ji nûqteyekê ji hevrastekê zêdetirî wê karibin werina xêzkirin. Geometri wê li ser awayekê vajî ê kûreyî bê. Wê aliylên hundirîn ên sêkikekê wê, ji 180'yê wê piçûktir bin. Wê, bi wê re wê, ev wê, weke aliyekê wê yê ku mirov wê dikarê wê, bi wê re wê, werênê ser ziman bê. Wekî din wê bêtê ser ziman ku wê, ji du nûqtayan wê rastiyek wê derbas bibê. Beremberê hevdû ku wê, hevrêza wan wê, wekhev bê wê, wekhev bin. Wê bi heman rastiyê wê, du rastiyên din wê, hevrast bin. Eger ku wê, rastiyek ku wê bi hevdû re di hevrêziyekê de bin wê, du rastiyên wê bibirre wê, hingî wê, ya din jî wê karibê bibirre û ankû ne birrê. Ev rêgezên geometriya der-auklidiyan wê, di wê rewşê de wê, di aslê xwe de wê, di awayekê de wê, dema ku mirov wê, bi wê hizirê wê, intîbaya ku wê rastiyekê û rastiyên din wê bi wê ve wê girêbide û wê fahmbikê ku wê bide me wê, di aslê xwe de wê, weke aliyekê wê yê ku mirov wê, di serî de wê, weke aliyekê din wê dikarê wê bi wê bihizirê bê.

Geometriya auklidiyan wê, bi zêdeyî wê, formeliyek wê weke ya bi rengê weke ji aksiyomên bi rengê  $8 + 5 = 13$  û hwd wê pêkwere wê hebê ku mirov wê, dikarê wê di serî de wê, werênê ser ziman bê. Wê, minaq wê dema ku wê beremberê rêgeza geometriya der-auklidiyan a dawî ku me hanî ser ziman wê, di wê de wê, rêgeze ku 'bi heman rastiyê re di hevrêziyê de bê wê, du rastî wê hevrast bin.' Di wê rengê de wê, di wê rewşê de wê, têngîna wê ya ku mirov wê, di awayekê de wê, bi wê rengê

wê bi wê bihizirê wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê wê yê din jî wê, dikarê wê, bi awayekê wê werênê ser ziman. Weke rêgeza wê ya din jî wê beremberê wê mirov dikarê wê jî wê bi têtîna auklidî wê werênê ser ziman ku wê bêjê ku 'eger rastiyeke ku ew bi hevdu re ku ew du hevrastiyên wê ku ew hebin wê yekê ji wan wê birrê wê, teqez wê ya din jî wê bibirrê. Di wê rewşê de wê, dema ku wê yek birrî wê ya din jî wê, şartê birrîne wê dênê li ser wê, di wê rengê de wê, di awayekê de wê, auklidyên wê, weke ku wê, bi awayekê formeli wê xwe di wê rengê de wê, werênê ser ziman. Lê di aslê xwe de wê, vajî wê wê ku ew weke der-auklidyên ku wê werênê ser ziman jî wê, di aslê xwe de wê, xwe ji awayekê formeli wê rizgar nekê. Ber vê yekê wê, der (auklidyên) wê ku mirov wê bi wê bihizirê wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê din ku wê, di heviyekiyekê de wê, têtîliyê teoremî wê bi matematikî wê di temenî de wê bi wê were fahmkirin wê, dikarê wê, bi awayekê wê, werênê ser ziman. Mînaq wê dema ku wê, geometriya der-auklidyên wê bêtî ser ziman ku wê, ' ... ti car wê, bi hevdu re ne di heman dirêjehiyê de bê' ku wê werênê ser ziman geometriya auklidyên wê bi têtîna 'du rastiyeke bi hevdu re ku ew hevrast bin wê bi hevdu re di heman dirêjehiyê de bin.' Di aslê xwe de wê, di wê rewşê de wê, dema ku mirov wê, bi wê bihizirê wê, ev wê, weke aliyekê wê yê ku mirov wê, di wê çerçoveyê de wê, ji aliya din ve jî wê dikarê wê bikê mijare fahmkirinê. .. Di têtîna geometriya der-auklidyên de wê, dema ku me têtîna ' ... ti car wê, bi hevdu re ne di heman dirêjehiyê de bê' me, li wir wê cihê gotina mihtemel weke ya 'du rastî' .. ku wê di dewama wê de ew, dewama hevokî a bi rengê ' ... ti car wê, bi hevdu re ne di heman dirêjehiyê de bê' were nivîsandin vala hişt. Di wê rewşê de wê, di wê rengê de wê, di wê rewşê de wê, ev wê, ber ku wê, di awayekê de wê, karibê weke têtîneka nûqteyî ku mirov wê, di sserî de wê bi awayna din jî wê dikarê wê binivîsê bê.

Di rewşa geometriya dahûrîner de wê, têtîna hebûna du rastiyan a li gorî hevdu ku ew hevrast bin wê, rek û ankû bi hevzê ku ew levketin wê demê wê, ev herdu rastî wê, biryara wê karibin bi rewşa xwe re **bidin**. Bi teybetî, 1)  $m_1 = m_2$  ku ew hebê , ya (hey)  $\theta = 0$  jî wê tam bê. Li gorî wê  $0 \leq \theta < \pi$  ku ew bû wê  $\theta = 0$  bê. Di wê rewşê de wê, du rastiyeke hatin dayîn wê weke derketîya wan hevrast bê. Mînaq 2)  $m_1 \cdot m_2 = -1$  bê, ya  $\theta$  bêreng û  $\theta = \pi/2$  bibê. Dîsa di wê rengê de wê du rastî wê lihevdu wê rek bin. Mînaq  $x - y + 3 = 0$  û  $3y + 3x - 9 = 0$  ku em bikin hevzêya rastiyeke wê bibînin wê ,  $y = x + 3$  û  $y = -x + 3$  di awayekê de wê, xwe bide nîşandin.



Di çerçoveyek têtîna a geometriya dahûrîner de wê, di wê rengê de wê, bi awayekê wê, dikarê wê werênê ser ziman. Di dewama wê de wê, weke aliyekê wê di wê rewşê de wê, rewşa rastiye ên hevkeş ku mirov wê li vir wê bibîr bixê wê, dikarê wê, di dewama wê de wê, weke aliyekê din wê, werênê ser ziman.

Di mijare têtîna geometriyê de wê, dema ku em bi teybetî geometriya auklid wê li berçav bigirin û wê bêjin wê weke ku me li jor bi denklema  $8 + 5 = 13$ ê re wê hanî ser ziman wê, di awayekê de wê, di nava wê de wê valahiyên di wê de wê di awayekê de wê piştê wê, di awayekê de wê werina kifşkirin û wê werina dagirtin. Di wê rewşê de wê, dema ku em bahsa wê aliyê têtîna geometriya auklid bikin wê, di wê rewşê de wê, di awayekê de wê, piştê bi gelekî re wê, ev alî wê, di sê pêvajoyên sereka de wê, li dûv hevdu bi rêyên çareseriyê ku wê di dewama wê de wê werina pêşxistin re wê bê xwestin ku ew wê were dagirtin. Aliyê pêşî wê weke ku me bi wê denkemê re hanî ser ziman wê, bi awayekê sereka û serrûyî wê, ji aliyê auklid ve wê were pêşxistin. Lê aliyên din wê piştê wê, pêvajoya duyem wê, ji aliyê Gauss û Pasch wê were farqkirin û wê di awayekê de wê ew wê bixwezî ku ew wê çareseriyê ji wê re wê pêşbixin. Piştê wê di dewama wê de wê hewldanên weke bi armanca pêşxistina pergale aksiyomî ku wê pêşxistin wê, hin bi hin wê werina pêşxistin û wê, di dewama wê de wê werina çêkirin. Di wê warê de wê, xabatên di wê warê de ku wê bi matematikî wê werina kirin wê, di aslê xwe de wê, weke aliyekê giring wê, di pêşveçûnên matematikî de jî wê, bandûra xwe wê ji aliyekê ve wê, bidina nîşandin. Di dewama wê de wê, di aslê xwe de wê weke pêvajoya sêyem a pêşxistina wê ya bi berdeyamî wê piştê wê ji aliyê Hilbert û Birkhoff ve wê, ji aliyekê ve wê bê xistin weke mijar û wê, di wê dewama xabatên Gauss û Pasch de wê, ew wê pêşxistinên ku wê, bi aksiyomî wê were pêşxistin wê bibin. Hilbert wê, lêkolîna xwe di wê warê de wê, wê, bi temenekê wê weke ku wê ew wê werênê ser ziman wê pergale ku ew ji 21 aksiyoman wê pêkwere wê ew wê pêşbixê. Di wê rengê de wê, ev jî wê, weke aliyekê din ê ku mirov wê dikarê wê di dewama wê de wê, werênê ser ziman bê. Wê bi xabatên Hilbert û Birkhoff re wê, pêşxistina bi pergale aksiyomî ku wê were pêşxistin wê, di awayekê de wê, piştê wê, di pirtûkên fêrbûnê ên dibistanî de jî wê ew wê, cih bigirê. Di wê rengê de wê, ev wê weke aliyekê giring ê weke pêvajoyek pêşketinê ku em bi wê re wê, li ser wê bisekin in û wê werênina ser ziman bê.

Ji aliyekê din ve jî wê dema ku em bahsa temenê têngîna geometriyê ku wê bi matematikî wê, werênê ser ziman wê, bi Bîrkhoff re wê, xabate Hilbert a bi navê “Grundlagen der Geometri” wê, di wê warê de wê, di awayekê matematikî de wê ew wê werênê ser ziman. Wê, di dewama wê de hilbert wê li ser temenekê hijmarî ê Asalî wê ew wê bikê ku wê werênê ser ziman. Ev jî wê, weke ‘nûqte’, ‘rastî’, ‘hevrêz (dûzlem)’ û hwd wê, weke gotinên bêsalixkirî ku wê werênê ser ziman wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê bi temenî ê geometriya Auklid wê werênê ser ziman. Li ser wê temenê wê, weke aliyekê din wê bi awayekê wê bi sêkikê wê bi tememkirinê wê werê ser ziman. Di warê salixkirinê de wê sêkik wê di awayekê de wê weke ku mirov wê dikarê wê kifşbikê wê bêalî wê di awayekê de wê, dikarê wê werênê ser ziman. Yanî wê weke rewşek ne salixkirî jî wê karibê were dîtin.

Di wê rewşê de wê, Hilbert wê dema ku ew wê werênê ser ziman wê, bi navê bûjenî wê ‘nûqte’, ‘rastî’, ‘hevrêz (dûzlem)’ û hwd ku wê werênê ser ziman wê, weke aliyekê din jî wê, di dewama wê de wê gotinên ku ew wê werênê ser ziman wê weke gotinên ku ew wê têteliya nava wan wê çawa wê salixbikê wê ew wê werênê ser ziman. Minaq wê rastîyek wê li gorî wê karibê li ser hevrêzê bê û ankû ankû wê karibê nebê. Nûqteyek wê karibê li ser rastîyekê û ankû hevrêzêkê bê û ankû ne li ser bê. Nûqteyek wê karibê di nava du nûqteyên din bê û ankû ne di nava wê de bê. Wê, di wê rengê de wê, dema ku mirov wê, di wê rewşê de wê, hilde li dest wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê wê yê din ê giring wê, dikarê wê, di wê rengê de wê, werênê ser ziman ku wê mijare têteliya hevserîtiyê wê, weke têteliyek nava ‘qatên rast’ û hevrêzan ku wê bide nîşandin bê. Wê, di wê rengê de wê, di awayekê de wê, xwediyê temenekê salixkirinê bê.

Hilbert wê, di wê rewşê de wê, li ser temenekê salixkirinîyê û ankû wateyîyê wê, bahsa du rastîyan bi hev re dikê wê, bête ser ziman ku “wê, dema ku wê, du rastî û ankû du qatên hevrast ( û wekhev) bi awayekê sehî (zêhnî) ew *qatkên rastîyê* direjehiya wan û an jî pîvane hevrêziya wan wekhevdu bûyîna wan wê bi wate bê’ wê werênê ser ziman. Lê di aslê xwe de wê, dema ku mirov wê, di wê rewşê de wê li wê bihizirê wê weke aliyekê din jî wê di wê mijarê de wê, weke aliyekê razber û ankû şenber wê, mijare têteliya awayekê din ê bi dîmenî ya wê rastîya sehî û ya rewşa bûjenî wê bi hevdu re wê danîna wê, di awayekê sehî de wê çendî ku wê weke ku wê li wê wekheviyê wê were lêgerîn jî lê wê, di aslê xwe de wê, ew wê, weke aliyekê wê yê din ku ew mirov wê li wê wê

kifşbikê û wê pêşbixê bê. Di wê rewşê de wê, ev wê, weke aliyekê ku wê, di wê rewşê de wê, wê, rewşa geometriyê wê di aslê xwe de wê, di çerçoveya dîyarîya formeliya wê de wê, bide dîyarkirin jî bê.

Di awayê hizirkirina sehî de wê, du alî wê, hevdû temem bikin. Aliyekê wê, weke ku em dikarin wê bi hesanî wê kifşbikin wê aliyê sehî (intuition) bê. Aliyê din jî wê, li gorî wê, rewşa bi wê hevrastîya wê ya ku ew bi asoyî wê weke rastiyeke ku mirov dikarê wê bi wê re di ahengekê de wê ji wê derxê û wê bi wê bihizirê bê. Di wê rewşê de wê aliyê duyem wê xwe di aliyê yekem de wê ber ku wê di heviyekiyekê de wê bide hiştin wê hinekî wê weke ku wê zor bê ku ew, were kifşkirin. Di wê rewşê de wê, ev jî wê, weke aliyekê wê yê din ku mirov wê, di serî de wê kifşbikê û wê werênê ser ziman bê. Di têngîna rastîn û asoyê de wê, di wê rewşê de wê, têngîna geometriyê wê, pêwîstîya wê fahmkirineka ku ew bi hevdû re ew bi wê ji hevdû werina derxistin wê hebê. Di wê rewşê de wê, ev jî wê weke aliyekê wê yê giring wê xwe di wê rewşê de wê bide dîyarkirin. Di mijare rastîn, hevrastî û asoyê de wê, dikarê wê, bi wê rengê wê, bi wê re wê mirov dikarê wê, di awayekê de wê, werênê ser ziman. Aliyê ku wê Hilbert wê bi wê bihizirê wê, di awayekê de wê, weke awayekê serrûyî ê rewşek fîzîkî-rastînî a geometriyî a bi têngînên wê yên bi gotinkirinî bin. Lê li vir wê aliyekê geometriyê wê ew wê hebê ku wê hertimî wê, di dema pêdeçûyina wê de wê, weke aliyekê hertimî wê kifşkirinê wê bi xwe re wê bide çêkirin jî wê bi wê re wê, di awayekê de wê bi wê rengê wê werênê ser ziman.

Di dewama wê de wê, di awayekê de wê, dema ku wê Hilbert wê aksiyomên xwe wê werênê ser ziman wê bi têngîna “wê hema herdû nûqtayan wê ku wê di xwe de wê, bihawênê wê rastiyeke wê hebê” ku wê werênê ser ziman wê, di wê rengê de wê, di aslê xwe de wê, di awayekê ji aliyê giştîyê ve wê, weke ku wê, hilde li dest. Aliyê ku wê bi aksiyomî wê bi wê bihizirê wê, weke rastîn û nûqte ku ew bêî ku ew werina salixkirin ku ew bên dayîn wê, di wê rengê de wê ji ya rengê salixkirina Auklid cûdatir wê were danîşandin. Lê di wê rewşê de wê, ev rengê ku wê Hilbert wê, bi têngîna nûqtê û rastînê û salixnekirina wan re wê, bide nîşandin Wê, di awayekê de wê weke ku wê dema ku mirov wê li têngîna Auklid û rengê wî yê ku wî hanî ser ziman wê bi wê bihizirê wê, di awayekê de wê weke ku ew çendî wê weke di dîmenekê salixkirî de wê werênê ser ziman jî lê wê di dîmenekê din ê salixnekirî de wê, weke ku wê bikê ku ew ji aliyekê din ve jî wê bide fahmkirin wê hizrek û întûbayek wê bi mirov re wê çêbibê.

Em wusa bihizirin ku em P weke koma nûqtayan û L'yê jî weke ya rastîyan wê, bihizirin. Di dewama wê de wê weke bûjena A jî wê weke nûqtayekê ku mirov wê bi wê bihizirê wê, P(A) wê, bi wê rengê wê were dîtin. Bo bûjenê C jî L(C) em dikarin wê tefkir bikin. Ku nûqtaya A li ser li ser rastîya C'yê bê û an jî ku wê, rastîya C'yê wê nûqtaya A'yê ku ew bikê nava xwe de wê, em dikarin bi rengê  $A \in C$  wê binivîsênin. Wê li gorî wê weke ku wê, me ji gotina Hilbert hanî ser ziman wê, weke du nûqtayên ji hev cûda ku ew di xwe de di hawênê wê rastiyek hebê. Bi derpêşî bi awayê P(A) û P(B) dikarê were nivîsandin. Bi matematikî jî wê weke ku wê hilbert wê bide nasîn bi rengê  $\forall A, B ((P(A) \wedge P(B)) \rightarrow \exists C (L(C) \wedge A \in C \wedge B \in C))$  dikarê wê werênê ser ziman.

Di wê rengê de wê, di aslê xwe de wê dema ku mirov wê, bi têngî wê li wê bihizirê wê, di awayekê de wê, weke ku wê, Hilbert wê, ew wê bikê wê, mirov dikarê wê bi aayekê serrûyî wê bi wê rengê wê, werênê ser ziman û wê binivîsê. Lê ji aliyekê din ve jî wê, ne tenê wê ew wê giring bê ku mirov wê, bi awayî wê bivîsê bê. Wê, giring bê ku mirov wê zanibê ku wê binivîsê û wê werênê ser ziman bê. Di wê rengê de wê, ev wê, weke aliyekê din wê, hingî wê, bi dîmenî wê karibê weke aliyekê din jî wê, tevî mijarê bikê û wê temen û derfetek hizirkirinê a bi zêdetirî bi dîmenî wê di wê rengê de wê bide afirandin.

Li vir wê, giringî û wateya dîmenê û fahmkirina bi wê çi bê? Di aslê xwe de wê ji aliyekê ve wê, weke ku me li vir hanî ser ziman wê di awayekê de wê giringiya wê hebê. Lê ji aliyekê din ve jî wê, weke aliyekê din ê ku mirov wê dikarê wê, di wê rewşê de wê, bi têngînekê wê ji aliyekê din ve jî wê fahmbikê bê.

Di wê rewşê de wê, dîmen wê karibê rengê denkle mî ê bi wê dihê ser ziman wê bi xwe re wê bide gûharandin? Di wê rengê de wê, di wê rewşê de wê, ev jî wê weke aliyekê din ê ku mirov dikarê wê bi mijarê re wê li wê bihizirê û wê werênê ser ziman **bê**. Ji hêla geometrikî ve wê, dîmenek weke bi awayekê koordinatî a hijmarî re ku wê weke pêwîstiyekê wê ji nûqtayekê wê bide danîşandin bê. Xêzek wê dîmenek bê. Û ankû mirov dikarê wê weke dîmenekê wê bibîne û wê werênê ser ziman. Têgînek plangerî wê, di wê de wê du dîmenî wê hebê. Wê feze wê sê dîmenî wê, d i wê de wê, hebê. Wê jî wê, bi rengê weke dîmenê 'n a fezeyî wê, xwediyê koordînatek bi n'yê bê. wê nbi awayekê denkle mî weke  $[X_1, X_2, X_3, \dots, X_n]$ . Minaq wê hevrêz wê du dîmenîya wê ji aliyekê ve wê hebê.

Di alsê xwe de wê, bi demê re wê dikarê wê bi awayekê sê dîmenî jî wê werênê ser ziman. Lê li vir wê, di awayekê de wê, dema ku mirov wê bi wê dihizirê wê, dikarê wê ji aliyekê din ve jî wê, kifşbikê û wê werênê ser ziman ku wê, aliyên din ên weke hevrasî, rêzî û hwd wê, ew jî wê, di awayekê de wê bi wê rengê wê mirmov dikarê wê, werênê ser ziman. Bi têngîna dîtbariyê re wê, di awayekê de wê, bi têngîne 4-dîmenî wê, di awayekê de wê, werênê hanî ser ziman. Di awayekê de weke bi têngîna 'hêsta şeşem' ku em li vir li mijarê bihizirin wê, têngînek din wê bi dîmenî wê xwe tevî wê bikê. Di wê rewşê de wê, di awayekê de wê, weke aliyekê din ê ku ew bi wê were fahmkirin wê, di wê rengê de wê mirov dikarê wê, werênê ser ziman. Em dema ku wê, tenê wê bi awayê wê yê makanîkî wê bi wê rengê wê bi wê bihizirê û wê werênê ser ziman wê, di wê rengê de wê, weke aliyekê din wê, weke bi întûbayî fektora hişmendiyê wê dervî wê, di awayekê de wê, weke ku wê were dîtin.

Di matematikê de wê, dîmen wê, di awayekê de wê dema ku em wê li ser têngîna bûjenê re wê werênina ser ziman wê, li ser hebûna wê bûjenê wê rêjeya derfeta tevgerîna wê bê. Bi gotineka din wê li ser wê, weke nûqteyekê bi sînor wê, wûcana wê bi xwe re wê werênê ser ziman. Bo salixkirina wê, nûqteyê wê, ya pêwîst wê, parametre û ankû referansên wê yên weke serbixwe bin. Minaq wê, dîmenê nûqteyê wê sifir bê. Wê, dîmenê xêzekê wê yek bê. Nûqte wê li ser xêzekê re wê bi aliyekê de wê, tevger bikê û ankû wê bi aliyê din ve wê herê di awayekê dûzrastî de. Dûzrastî û ankû dûzlem wê, du dîmenên wê bin. Dîmen wê di bûjenê de wê, ku wê weke aliyekê li wê bûyî wê hebê. Wê weke xosletetê hundirînî ê wê bê. Ji aliyekê din ve jî wê qada ku wê bûjen wê dagir bikê wê, bi wê re wê, di awayekê de wê, bi awayê wê û ankû çapa wê re wê, di awayekê de wê, dikarê wê bi dîmenî wê bi wê fahmbikê. Minaq wê dema ku wê, ji aliyê ya xwarî ve wê werênê ser ziman wê, di çerçoveya hebûna wê xwariyê de wê, di awayekê giloveriya ku ew ji nûqteyê destpêkê wê, bi awayekê wê hebê. Di çerçoveya têngîna auklidî de wê dema ku wê xwariya giloveri wê werênê ser ziman wê, weke têngînek serbixwe ku wê tevî hundirîya fezeyî wê newê kirin wê, di awayekê serbixwe de wê, weke du-dîmenî wê di awayekê de wê were hanîn li ser ziman. Di auklidê de wê feze bi  $n$  û dîmenê wê jî wê bi  $E_n$  wê were dîtin. Di awayên din ên fezeyî de wê, bi dîmenî wê,  $E_n$   $n$  wê dîtkin. Di awayekê sabîtî ya dîmenîya  $E_n$  wê biqasî nîvgogekê ( $\epsilon$ ,  $\epsilon$ ) wê bê. Di awayekê herêmî de ku mirov wê, werênê ser ziman wê,  $E_{n1}$  wê bi awayekê dîmenê enduktîfî wê bi xwe re wê werênê li holê. Ev jî wê, di awayekê

de wê, dema ku wê mirov li wê bihizirê wê, bi têngîna E'yê wê, çendî ku wê hemhizir wê hebê jî lê wê dema ku mirov wê li wê dihizirê wê, rewşên fezeyî ên qadî ên ji hev cûda jî ku ew hena bi wê re divê ku mirov wan ji berçav dûrnekê. Ev jî wê weke aliyana din ên ku mirov dikarê wan di awayekê de wê, der-wê di awayekê de wê, werênê ser ziman.

Ev wê bi xwe re wê, têngîna dîmenê astbilind wê di awayekê de wê bi xwe re wê, di awayekê de wê derxê li holê. Temenê fahmkirina têngîna dîmenê astbilind wê çendî ku wê ji aliyekê ve wê heta hizrên Descartes jî wê bê birin jî lê wê, di awayekê de wê, Riemann wê, bi nivîsa xwe ya bi navê têngîna dîmenê a pirralî ku wê bi navê “Theorie der vielfachen Kontinuität” wê binivîsênê de wê, di awayekê de wê, werênê ser ziman. Ev wê li ser têngîneka hijmarî a  $\acute{k}$ varsí ku wê bi temenê pêşxistina hijmarên çarî ku wê were pêşxistin wê, bi têngîna berfirehtirkirina hijmarên tevlihev re wê, di awayekê de wê were ser ziman. Di dewama wê de wê, weke aliyekê wê yê giring wê, di serê de wê, mirov dikarê wê, werênê ser ziman. Di dewama wê de hizrên William Rowan Hamilton ku wê di awayekê de wê, bi têngîna sê-dîmenîya fezeyê a mekanîkî ku wê werênê ser ziman re wê, dikarê wê, di awayekê de wê, fahmikê. Hamilton wê, di awayekê de wê, quaterniyon wekî dabeşkirina du xetên rêvekirî di cîhek sê-alî de diyar kir. Bi gotineka din wê di valahiya sê-dîmenî de wê du vegûhezînêr û ankû rênîşandar wê, weke satîran wê bibin salixkir. Ji aliyekê din ve jî wê, weke di heviyekiyekê de wê, du vektorên ku wê, zêdebibin wê, bînenê ser ziman. **Quaterniyon** wê, bi awayekê wê, di darêjkê de wê bînenê nûmînêrkirin. Minaq ku wê li gorî ku wê, Hamilton ku wê, werênê ser ziman ku em denklema wê werênina ser ziman wê bi wê rengê  $a + b \mathbf{i} + c \mathbf{j} + d \mathbf{k}$ . Di wê rewşê de wê, weke hijmarên rastîn wê, a, b, c, d bin. Wê weke temenê quaterniyonêr jî wê, bi  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  re wê, were dîtin. Ev temenê quaterniyon wê, di matematika saf de wê, bînenê bikarhanîn. Lê di matematika kirinî û ankû pîretîkî de jî wê, di awayekê de wê, weke aliyekê ku mirov dikarê bikarhanîna wan bibînenê **bin**.

Vektorên li fezeyê wekî tîne pênasekirin mirov dikarê wê hinekî li ser wê di wê çerçoveyê de wê li ser wê bisekinê. Minaq bi xalê  $A = (a_1\mathbf{i}, a_2\mathbf{j}, a_3\mathbf{k})$  û  $B = (b_1\mathbf{i}, b_2\mathbf{j}, b_3\mathbf{k})$ , sê qat rêzkerî  $(b_1\mathbf{i} - a_1\mathbf{j}, b_2\mathbf{k} - a_2\mathbf{i}, b_3\mathbf{j} - a_3\mathbf{k})$  hevdû dike. Ev neqşekirin ne  $1\mathbf{i} - 1\mathbf{k}$  e ji ber ku ji yekê zêdetir beşa xeta dîrektîf bi vê sêpleta rêzkerî re tîkildar bibê. Di komekê de wê, rêzikên rêgez ên li fezeyê ku ew tîne pênasekirin wê, weke  $A = (1, -1, 0)$ ,  $B = (4, 2, 1)$ ,  $C = (0, 2, 3)$  binûqte tîne dayîn. Nûqte weke ku em di D'yê de wê

bibînin ku heman vektorê temsîl bike. Lê ji aliyekê din ve jî wê temenê quaternyonî jî wê bi têngînek (bin)komî bi rengê (**i, j k**) bide nîşandin. Di awayekê de wê, çareserîya wê ya formeli,  $(4 - 1, 2 - (-1), 1 - 0) = (d1 - 0, d2 - 2, d3 - 3)$   $(3, 3, 1) = (d1, d2 - 2, d3 - 3)$   $3 = d1$   $3 = d2 - 2$   $5 = d2$   $1 = d3 - 3$   $4 = d3$   $D = (d1, d2, d3) = (3, 5, 4)$  bê. Li fezeyê, dabeşa du vektoran, vektor bi hejmarek rastîn dikê. Ji ber ku ew, pênasên ku ew dihilberin, dirêjahiya **vektor** û vektorê yekîneyê dişibin ên rewşa bi dû rewşên ku ew di wan de bi hevdû re werina salixkirin.  $A \hat{=} B$ ,  $B = b1, b2, b3$   $A = a1, a2, a3$  bi awayekê çêkerî wê encamê wê bi wê rengê wê werênê li holê. Bi awayekê rêzkerî  $b1 - a1, b2 - a2 - b3 - a3$  wekî koordînatên vektor  $AB$  dihên li holê.  $AB \hat{=} CD$   $AB \cong CD$  wê, weke rewşa wê ya ku wê bigihijiyê wê xwe bide danîşandin. Ev rewşa ku me hanî ser ziman wê bi awayekê geometrikî wê li ser şêwayê vektorê re bê. Wê demê wê dema ku em di wê rewşê de wê, li wê bi quaterniyonan li ser çerçoveyek cebirî re wê, bi wê bihizirê û wê ji aliyekê din ve wê bi wê bihizirê. di wê rewşê de wê ev wê tiştêkê din wê, di awayekê de wê, bide nîşandin ku wê, denkleme ku wê çendî ku ew tam jî bê wê, di awayekê de wê weke ku em wê di wê rengê de wê kifşdikin wê bi matematikê û ankû geometrikî wê, derfeta bi berdewamî pêşxistin û ji wê domandina wê, di awayekê de wê, bi wê rengê wê hebê û wê xwe bi wê re wê, bide nîşandin. Di denkleme me ya li jor de wê, hijmarên me yên temenî wê, bi komî ( $A, B, C$ ) bin. Weki din wê, koma hijmarên  $(0, 1, 2, 3, ..)$  jî wê, ji aliyê wê din ve wê, dikarê wê, werênê ser ziman. Wê, di wê rewşê de wê, li vir wê, hijmarên binkomî ku wê bi ber wan ve wê çûyin bibê wê, di awayekê de wê, weke ku mirov dibênê wê, di wê de wê, derfeta pêşxistin û ankû kifşkirina dîmenên din jî wê xwe bi wê re wê, di awayekê de wê bide **nîşandin**.

Mînaq di roja me de wê, bo nerîn û grafikên komputurî, biyên girafikî, dahûrkinin, hasibandin bi awayekê sê dîmenî ku wê werina kirin, di warê hevrastên Euler ku wê werina ser ziman, metrisên zîvronek û hwd de wê, werina bikarhanîn. Di roja me de wê, dema ku em rewşa zimanê matematikê wê bi wê hildina li dest de jî wê, mirov dikarê wê bi wê re wê, werênê ser ziman ku wê, quaterniyon wê weke ser hijmarên rastîn re wê, têkiliyên çar (4) dîmenî û beşkirinên bi restû û hwd de wê, bi rewşek cebirî wê, xwe di awayekê de wê, di rewşa hanîna li ser ziman de wê bidina dîyarkirin. Wê cebira quaterniyonê jî wê bi **H** yê were ser ziman. Ev jî wê di awayekê de wê, di fezeyê de wê, bi cebirî ku wê di astek duyem de jî wê weke xwediyê darêjkekê û ankû rewşek weke wê bê wê

bi wê were ser ziman û ankû wê bi wê were ser ziman. Hamilton wê di encama hizirkirinek dirêj ku wê serê xwe wê bi wê li ser jihevbeşkirin û çarpkirinê ku wê biwastênê û wê bixwezê ku wê fahmbikê ku wê çawa wê, wê koordinatên du nûqtayên fezeyê wê çawa wê bèn hasibandin ku wê bixwezê wê fahmbikê wê bi wê êdî wê bigihijê wê encama wê fahmkirinê. Di dema ku wê Hamilton wê li ser wê bisekinê de wê, Ferdinand Georg wê, bi awayekê wê li dora salên 1877'an wê kifşbikê ku wê, beşkirinê wê di cebirê de wê, bi awayekê dîmenî û dawîyî wê, bi encambûnê wê bi xwe re wê werênê wê, kifşbikê. Di wê rewşê de wê, sê awayên cebirî wê weke bi hijmarên tevlihev, quaterniyonan û hwd ku wê bi bi hijmarên weke **R, C, H** û hwd werina nimînêrkirin wê hebin. Ev jî wê di dema çareserkirinê de wê, di destpêkê de wê heta dîmenê sêyem jî wê, di awayekê de wê awayekê fahmkirinê wê bi wê re wê, bide dîyarkirin.

Çerçoveya hizrên Hemilton wê di awayekê de wê, dema ku wê li wê were hizirkirin wê, di pêvajoya fahmkirina wê de wê, ji du aliyan ve wê mirov dikarê wê bi awayekê têkilîdar wê fahmbikê û wê werênê ser ziman. Yek wê, di awayekê de wê, weke di çerçoveyek têgînek demên hemdem de wê, bi awayekê xosletên quaterniyonan ên cebirî wê bikirpênê bi nêzîkatîyek zêdetirî a geometrikî bê. Di wê rewşê de wê, ev wê weke aliyekê wê yê din ku mirov wê, di serî de wê, werênê ser ziman Bê. Hemilton wê, di aslê xwe de wê, di awayekê de wê, weke ku mirov wê, di nameya wî ya ku wê ji hevalê xwe John T. Graves re wê binivîsênê û wê bê sedema kifşkirina trêne hizrê jî wê, di wê de wê, bahsa hebûna herêkirina dîmenê çarem ê fezeyî wê bikê. Asta pêşketina me ya îroyîn wê, sînor wê bi pêşketina wê re wê, di awayekê de wê taqabûlî heta dîmenê çarem pêdeçûyînê û dibê ku ew hinekî ji wê zêdetir bibê bê. Lê di aslê xwe de wê, di wê rewşê de pêdeçûyîn ya bi ji dîmenê li dijî li astên din ên bilindtir wê dema ku pêşketina me çendî ku ew zêdetirî bû û mazintir bû wê, hem bi wê re wê bibê û hem jî wê weke pêwîstîyeka fahmkirina bi wê re ku wê mirov wê bi aqilê xwe wê bixwezê ji ew jî wê wirdetirî fahmbikê jî bê. Di wê rewşê de wê, em dikarin wê bêjin ku em, bixwezin û nexwezin jî wê, di wê pêvajoya pêşketinê û yên piştê de wê, hertimî wê, di wê warê de pêşdeçûyîn wê bibê. Her dîmen wê, hinekî jî wê bi temenekê zanînî wê tevlihevtir bê. Lê çendî ku mirov pêpelokên bûhûrî (yên [dîmenên] ku ew bi zanînî di fahmkirinê de hatina derkkirin û bi aqil li wan serwerî bûya) û pê de wê, yê li ser wêtirî jî wê hertimî wê, weke têgînekê wê xwe li fahma me bide.



Di wê rewşê de wê, têgîna bisînoriyê û ankû bidawîyîyê wê, ji aliyekê ve wê newê wê wateya ku em di wê rewşê de di sînorekê de bisekin in jî bin. Li vir di aslê xwe de em, çi ji têgîna bidawîyîyê û ankû bisînoriyê fahmdikin wê, weke aliyekê din ê ku em di wê ahengê de wê **fahmbikin** bin.

Di wê rewşê de wê, ev jî wê weke aliyekê wê yê ku wê, di wê rewşê de wê, di awayekê de wê, di rewşên hizirkirinên bi cebirî û hwd de wê, navbera ku ew hafî qadkirin wê, bi wê re wê hin bi hin wê, çerçoveyek hizirkirinê ku wê, bi wê re wê, temenê hizirkirina fezeyê û kifşkirina bi çar-dîmenî a wê re wê, bi xwe re wê werênê. Di wê rewşê de wê, ev rengên pêşketinê wê, bi xwe re wê, di awayekê de wê, bi alikariya geometriya cebirî û dahûrî û hwd re wê, di awayekê de wê, hin bi hin wê bi matematikek zelal ku wê ew hasibandin wê werina kirin re wê, ew wê, temenê wê yê fahmkirinê wê di awayekê de wê bê çêkirin. Di aslê xwe de wê ev rewş wqê, tiştê din wê bi xwe re wê werênina ser ziman. Ev jî wê, di awayekê de wê rewşên fîzîk û geometriyê ku wê, di fezeyê de wê, bi denkmên Maxwell û kînamatik ku wê werina bikarhanîn û wê bi wê bikin ku ew xwe bigihênina li encamekê wê, bi karhanîna wê piştê wê, bi quaterniyonan wê salixkirina wan wê bê kirin. Di wê rewşê de wê, bi demê re wê, alaqaya li fahmkirina bi cebirî a quaterniyonan û di dewama wê de a *hijmarên 'hiperkompleksî'* ku wê werina fahmkirin wê zêdetirî wê, di awayekê de wê, xwe bi wê re wê, bide nîşandin. Ev jî wê, bi demê re wê, alaqayaka ku wê, di temenê pêşxistinek bi pêşketina geometriya cebirî û matematika saf re wê, di awayekê de wê, xwe bide nîşandin. Matematik wê, di awayekê de wê, fahmkirina wê ya bi geometrikî wê, di wê rewşê de wê, li ser temenekê giring wê xwe di awayekê de wê bide nîşandin. Di mijare fahmkirina rewş û darêjkên tevlihev de wê, weke pergalek hizirkirinê wê hin bi hin wê xwe di awayekê de wê, bide nîşandin. Lêkolîn û hizirkirinên dervî auklidyen wê, di wê çerçoveyê de wê, zêdetir bibin, di encama fahmkirineka ku ew wê têra baş fahmkirinê a di wê warê û warên din ên ku ew bi wê werina fahmkirin wê nekê de.

Di aslê xwe de wê, di wê rewşê de wê, hizirkirinên li ser geometriyê wê, di wê warê de wê, di awayekê de wê, weke aliyekê giring ê hizirkirin û pêşketina aqilê mirov êdî mirov dikarê wê pênasebikê û werênê ser ziman. Di wê rengê û awayê de wê weke aliyekê wê yê din ê giring wê, di serî de wê, dikarê wê werênê ser ziman û wê fahmbikê. Di warên dahûrkirinên **vektorî** de wê, **quaterniyon** jî wê heman fenomenê wê salixbikin. Wê di wê wê rewşê de wê, di dewama wê de wê, quaterniyon

wê, di dewama pêşketina wan de wê, bê têtînek ku wê bi wê matematik û fizîk baştir were fahmkirin. Di wê rengê de wê, di serî de wê mirov dikarê wê weke aliyekê wê yê din ê giring wê werênê ser ziman ku wê, ev jî wê, di encama pêvajoyek fahmkirinê de wê, xwe di awayekê de wê bide nîşandin.

Geometri wê di demên berê de wê, weke têtînek ku wê bi zêdeyî wê, qadên hevrast û hevrêz wê, di awayekê de wê, fahmbikê bê. Wê, di wê rewşê de wê, di awayekê de wê, dema ku em gotina hevrast û hevrêzê wê, di awayekê de wê, salixbikin em dikarin wê, di serî de bi gotina hevrastê wê, werênina ser ziman. Gotina hevrastê wê, di wê de wê, bi têtînek fahmkirinê ku wê, temenê wê li ser têtîna rastîyê û beremberê rastîyê ku wê, rewşa wê de wê, were fahmkirin. Hevrastî wê, rêyek ku ew di wê de wê, berê wê, rastîyê wê bi wê ve bê wê, li ser wê re wê, di awayekê de wê, dikarê wê fahmbikê û wê werênê ser ziman. Her hevrast wê, di awayekê de wê, temenekê wê yê bûjenî wê hebê. Ku em xêzê wê weke komeka ji nûqtayan wê pêktê wê, di wê rewşê de wê, werênina ser ziman wê demê wê, ji nûqtayê li nûqtayê wê weke hevrastek bê. Wekî din di dewama wê de wê, hevrêz wê, di awayekê de wê, em dikarin wê, di wê rengê de wê, salixbikin ku wê, li ser têtîna hevrastîyê re wê, di wê rêzbûyîna li dûv hevdû li ser wê esasê wê rastîyê û hevrastîyê re wê, di awayekê de wê, dikarê wê bi wê re wê salixbikê û wê werênê ser ziman. Wê, di wê rengê de wê, ev wê, weke aliyekê wê yê giring wê, di serî de wê, dikarê wê werênê ser ziman. Hevrêz wê, di xwe de wê, bi têtînek kirdeyî wê hem têtîna rastîyê û hem jî ya rêzîyê wê, bihawênê li ser temenekê hevîyê û ankû bi hevdû re bûyîn û fahmkirina wan a bi hevdû re.

Di wê rewşê de wê, weke aliyekê din wê, dema ku em wê, di dewama wê de wê, bi têtîna geometriyê re wê, di serî de wê, werênina ser ziman wê, di dewama wê de wê, weke aliyekê giring wê, di serî de wê, salixkirinên gotinî wê, di aslê xwe de wê, di awayekê de wê, weke aliyekê giring wê, xwe di awayekê de wê bidina nîşandin. Salixkirin wê, di wê rengê de wê, rewşên fahmkirina şewayên koordinatê û her wusa rewşên wê yên ku ew di wê rewşê de ew bi wê werina fahmkirin jî wê, di têtînekê geometriyê û fahmkirina wê de wê temenê wê biafirênê. Di wê rengê de wê, ev wê weke aliyekê wê yê giring wê, di serî de wê mirov dikarê wê, weke aliyekê giring wê, werênê ser ziman. Di mijare têtîna geometriyê de wê, pêvajoyên wê yên pêşketinê ên destpêkê wê weke ku em bi demên kevn ên mesopotamiyê re wê dibînin li kurdistanê wê, di

awayekê de wê, rewşên weke yên stêr, navberan û hwd wê bikê ku wê fahmbikê bê. Wê bi têtînek stêrzanî û hwd re wê pêşkeve.

Lê di demên pêşketina aqilê felsefeyê û hwd de wê, di awayekê de wê, di rewşên weke hasibandinê ên li ser temenekê fahmkirinê ê giring de wê, xwe di nava rewşên afirandinê ên weke bi hûnerî û hwd de jî wê bide nîşandin. Minaq wê, di çêkirina peykelê de wê, hasibandinên rewşên weke yên bi pîvanî ên laşî ku ew weke wê çêbikê wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê din ku em dikarin bi têtîliya geometriyê û hûnerê û hwd re wê bi hevdû re bikirpênin bê. Di dewama wê de wê, di wê rengê de wê, hasibandinên weke bi wê rengê ên bi hûnerî ku ew weke wê çêbikin wê, bi rêjeyekê wê werina çêkirin. Wê jî wê weke ku wê, di roja me de wê, were salixkirin wê bi têtîna *rêjeya zêrîn* ku wê were salixkirin wê dikarê wê bi wê werênê ser ziman.

Di mijare geometriyê û salixkirinên wê de wê, aliyekê wê yê fahmkirinê ê giring wê, piştî wê hin bi hin wê bi aqil re wê, li ser fahmkirina qadê, fezeyê û hwd re wê pêşkeve. Wê, di wê rewşê de wê, rewşa fezeyê û fahmkirina wê ya bi dîmenî wê, di awayekê de wê, di wê rengê de wê, bi wê re wê, were dîtin.

Geometri wê, di demên serdemên navîn de wê hin bi hin wê bi têtîne cebirî wê dest bi pêşketina xwe wê bikê. Di wê rewşê de wê, têtîna geometriya cebirî ku wê weke ku wê, di roja me de wê, were salixkirin ku ew rewşên negûharîner ên weke yên bi qadên topolojikî lêbikolê û di dewama wê de wê, di awayekê homeomorfizmî de wê, çînîkirinê ku wê bide çêkirin wê, bi wê were wê weke bi têtînek cebirî re wê li ser esasê dîtin û kifşkirina negûharînîyên cebirî bibinê re wê bibê. Di dewama wê de wê jî wê, mirov dikarê wê, werênê ser ziman ku wê, weke aliyekê giring wê, hemû alî jî wê, di awayekê di hevrenîya homotopiyî de wê, çawa wê werina çînîkirin wê bi wê re wê, li ser wê bisekinê. Di wê rewşê de wê, rewşa wê weke aliyekê wê yê giring wê xwe bide nîşandin. Li vir di dewama wê de ku em, bi nerînekê li topolojiya geometriyî bidin û wê di dewama wê de wê bi gotinekê wê werênina ser ziman wê, di zane min de wê weke ku wê vegotinbar bê. Ber ku ev wê, bi awayekê salixkirina bi cebirî wê çawa wê, di awayekê de wê, temenekê fahmkirinê wê li ser esasê kifşkirina bi qadê re wê bikê wê, awa û renekê fahmkirinê wê bi xwe re wê bide dîyarkirin. Em bi kortasî wê empatiyê li ser têtîna topolojiya geometriyî re wê bikin û wê di wê rengê de wê, dikarin wê salixkirinek bi wê rengê wê, di dewama wê de wê, bidina çêkirin. Minaq em bi hizirin ku wê, manifoldek bi dîmenî ku ew bi  $D^y$  em bihizirin.  $\hat{U}$

em wusa bi hasibênin ku wê ji N'yê wê, dîmenekê n'yê wê di M'yê de vêşarî em hizirbikin. Di dewama wê de em wusa bi hasibênin ku wê,  $x \in N$ , ku wê, bi navê N herêmek wê hebê wê,  $x$  jî wê, herêma wê dûzrastiyê bê. Wê demê wê  $U \subset M$ , ku wê weke cêwîyên topolojikî ên  $x$  bin. Wê demê wê,  $U \sim U \cap N$  re dikarê wê, bênê ser ziman. Lê li vir wê, di awayekê homeomorfiki ( $\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_d$ ) wê salixkirina ku mirov wê bikê wê, di dewama wê de wê, di awayekê de wê, di wê rewşê de wê, weke qada binî  $\mathbf{R}_n$  ji  $\mathbf{R}_d$  wê, di awayekê de wê, weke awayekê standardî wê xwe bide nîşandin. Di dewama wê de wê, weke ku wê rewşek homeomorfizikî weke  $U > R$  wê bi dîmenî wê hebê û wê  $U \cap N$  wê, di awqayekê de wê, levkirineka wê ya bi  $\mathbf{R}_d$  re wê weke ku wê hebê wê, bê kifşkirin.

Ev rewşa ku wê di awayekê dûzrastî a topolojikî de ku wê di geometriyê de wê, were ser ziman wê, di awayekê de wê, weke ku em bi dîmenekê wê re wê, dikarin wê, di wê rewşê de wê, di rewşekê de wê, werênina ser ziman. Di wê rewşê de wê, di aslê xwe de wê, rewşa geometriyê wê, di wê rewşê de wê, di awayekê kifşkirinê de wê, di wê rewşê de wê, kifşkirina bi wê re wê, di awayekê de wê, bi zêdeyî wê, di awayekê de wê, xwe bi wê re wê, bi pêşxistina bi fahmkirinê re wê, bi awayekê asoyî wê bide nîşandin. Di têtîna geometriyê de wê, weke aliyekê ku wê, di wê rewşê de wê, zêde ne xwediyê temenekê sakixkirinê bê û ez di wê baweriyê de me ku wê, weke aliyekê temenî ê kifşkirinê ê di wê de wê, hertimî wê, di temenê rê dîtina di temenê pêdeçûyinê de ku wê bi sehî û ankû zêhnî wê hebê jî wê, di wê rewşê de wê, gotina asoyê bê. Di wê rewşê de wê, gotina asoyê wê, dema ku em bi topolojikî i geometriyê û fahmkirina wê dihizirin wê, di wê rengê de wê, zêdetirî wê, di awayekê de wê, xwe bide nîşandin. Di dewama wê de wê, weke aliyekê wê yê giring wê, ev wê, xwe bide nîşandin.

Li vir wê temenê fahmkirina gotina asoyê wê di têtîna geometriyê de wê, çi bê? Di aslê xwe de wê, di wê rewşê de wê, dema ku mirov wê, bi wê bihizirê wê, weke aliyekê sazûmanî ku em dikarin weke di rengê dîmenekê din ê vektorî û ankû quaterniyonan wan referansên bi têtîna asoyê re ku em dikarin xwe bigihêninê de wan bi wê rengê salixbikin û werênina ser ziman. Wê, di wê rewşê de wê, dema ku em di fahmkirin û hişmendiya wê de pêde diçin wê ew wê weke ku wê têtînek bi dîmenî wê di mejî de wê bi xwe re wê bide çêkirin wê, di wê rengê de wê, di awayekê de wê, têtînekê wê, di aslê xwe de wê, weke ku wê, di awayekê de wê, bide çêkirin. Di wê rewşê de wê, têtîna asoyê wê, di awayekê de ku em wê, li gorî têtîna fezeyê wê bi wê bihizirin wê, di awayekê wê

weke bi tégîna demê, wûcan û tégîneka qadî a salixkirî û hwd re wê, bi awayekê wê, bi hişmendiyek berfirehdibê re wê, xwe di awayekê de wê, di mejî de wê bide şaqkirin. Di wê rewşê de wê, ev jî wê weke aliyekê wê yê din ê ku mirov wê dikarê wê werênê ser ziman ku wê, geometri wê, ti carî wê, ji fahmkirinê dûr wê bêaso wê nebê. Wê di serî de wê weke aliyekê wê yê giring wê, mirov dikarê wê, di awayekê de wê, bi wê re wê salixbikê û wê werênê ser ziman. Di dewama wê de wê, weke aliyekê giring wê, tégîna asoyê wê, ji aliyekê ve wê, weke tégînek fîzîkî a ne bûjenî wê xwe di mejî de wê, bi hîs û sehekê (*intuition*) wê bide dîyarkirin. Ev jî wê, weke aliyekê wê yê din ê kifşkirinê wê, di wê rewşê de wê, dikarê wê, fahmibikê. Di nava çerçoveya geometriya cebirî de wê, weke dîmenekê din ê ku em weke awayekê li wê kirî û ankû ew bi wê re di ahengekê de wê, were fahmkirin wê, bi wê re wê, di awayekê de wê, mirov dikarê wê bi wê re wê li wê bihizirê û wê fahmbikê. Di aslê xwe de wê, ev alî wê, di awayekê û rengekê teybet de wê, derfetê wê bide me ku em tégîna geometriya cebirî bi wê û dîmenekê wê bihizirin û wê, kifşbikin û bi wê hinekî wê werênina ser ziman.

Geometriya cebirî wê, di awayekê de wê dema ku em li wê binerin wê, di wê rewşê de wê, weke tégîneka ku wê, çawa wê bûjenên cebirî û nêzîkatîya geometriyî wê bênê li hevdû bikê û wê bi wê re wê, werênê ser ziman bê. Di wê rewşê de wê, di awayekê de wê, dema ku mirov wê li wê bihizirê wê mirov dikarê wê di dewama wê de wê, werênê ser ziman ku wê, di awayekê de wê, di geometriya cebirî de wê, denklêmên cebirî wê, di awayekê de wê, weke awayekê fahmkirin û kifşkirinê wê di wê de wê, xwe bidina nîşandin. Pêşketina têkiliya cebirê û geometriyê wê, di rewşa fahmkirina fezeyê de wê, di wê rewşê de wê, dema ku mirov wê, hilde li dest wê, di awayekê de wê, bi wûcanî wê çawa wê, di awayekê de wê dema ku wê, berfirehbûn wê bibê wê, di awayekê sazûmanî de wê ji hev dûrketineka ku wê bi tégîne ji hev belevbûnê ku mirov dikarê wê werênê ser ziman wê, di awayekê de wê, were dîtin. Einstein wê, ji hevdû belevbûnê wê, weke çawa wê, ji hevdû felişînê wê bi wê rengê wê werênê ser ziman. Lê di aslê xwe de wê, di awayekê de wê, dema ku mirov wê, bi wûcanî wê, werênê ser ziman wê, di wê rengê de wê, di awayekê di nava sêkika dîmenî a kişînakorsê û ankû kişînaardê, sazûmana fîzîkî, hebûna bûjenî û hwd de wê, ew wê bibê wê, di awayekê de wê, dikarê wê, werênê ser ziman. Di wê rewşê de wê, di nava fezeyê de ku em bahsa hebûna rêkadizan bikin weke minaq ku wê bahsa **rêkadiza** ku wê dunya me di wê de wê bijî wê, demê em di wê rewşê de

wê, çawa dikarin wê di awayekê dîmenî ê fezeyî de wê fahmbikin wê weke aliyekê din ê ku me divê ku wê ji aliyekê ve wê, hildina li dest bê. Di wê rewşê de wê, mijare rewşa kîşînakorsê (**gravity**) ku mirov wê, hilde li dest wê, awayekê de wê, rewşa fîzîkê wê, di awayekê de û di payekê de wê, di hebûna wê de wê, weke ku wê weynek wê ya ku ew bi wê bileyizê jî wê hebê. Di wê rewşê de wê, rewşên weke deformabûyîna fîzîkî û hwd ku wê bibin jî wê, di awayekê de wê bandûr û hebûna wê, di awayekê de wê, dikarê wê bahsa wê bikê û wê fahmbikê. Di dewama wê de wê, weke aliyekê din wê, di dewama wê de wê, mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê, rewşa hebûna kîşînakorsê wê di wê, aslê xwe de wê, weke aliyekê giring bê ku mirov wê, hilde li dest bê. Di wê rewşê de wê, dever bi dever rewşên pirr tûrî ên bi bûjenî, rewşên weke sar û germ wê weke awayna ku wê, di wê de wê, weke aliyana ku mirov dikarê wê bi wê ve girêdayî wê hilde li dest bê.

Kîşînakorsê wê, di wê awayekê din de jî wê mirov dikarê wê hilde li dest û wê, werênê ser ziman wê, rewşa germê wê weke ku wê, di awayekê manyatikî de wê, weke ku wê bandûra wê li wê hebê. Wê, di wê rewşê de wê, minaq wê pêlek ji germiya rojê ku wê bibê wê, heta deverên bi hazaran milyon salan wê, dûrtirîn wê xwe bide nîşandin wê, ne di çerçoveya wê, rewşa hêza wê pêlê bê. Wê ji aliyekê din ve jî wê, di wê rewşê de wê, di rewşa wê de wê, weke ku wê wê ji hêza tahfanê cûdatir wê şewayekê din ê pêlî wê, weke bi têkiliya elemenên wê yên temenî ku ew bi hevdû re wê têkiliyê didênin û her ku têkiliyê yekê bi ya din re danî û ew ya din jî wê bi yek din re wê dênê û hwd re wê, di awayekê de wê weke ku wê, ew wê heta deverên pirr cûda û dûr ên ku ew ji rewşên pêvan û hasibandinê ên bi tahfan û hwd ku wê bibin wê pirr zêdetirî û cûdatirî wê di awayekê de wê dîmenekê wê bi xwe re wê bide nîşandin. Ev wê, weke aliyekê din ê ku mirov wê, dikarê wê bi wê fahmbikê. Di dewama wê de wê jî wê mirov dikarê wê, werênê ser ziman ku wê, di wê rewşê de wê, têkiliya elementan wê di awayekê wê weke ku mirov wê kifşbikê wê herî hindik wê di wê çerçoveyê de wê, sê-dîmenî wê xwe di awayekê de wê bide dîyarkirin. Ev wê weke aliyekê din wê xwe bide nîşandin. Minaq bi têgîna geometriyê li navaroka atomekê hizirin û wê, rewşên wê yên ku em dikarin wê bi **geometriya atomî** û hwd re wê, werênina ser ziman wê, di wê rewşê de wê, di awayekê de wê, weke aliyekê wê yê teybet wê, di wê reng û awayê ku em wê dihênina ser ziman de wê, hebê. Wê rewşa geometriya atomê wê, minaq wê weke di nava rewşa giştî de wê, weke ku em çawa ku em herêm bi

herêm rewşên kişînakorsê bi cûdahiyên wê re wê werênina ser ziman wê, di rengekê wê weke wê de jî wê, di awayekê de wê, dîmenekê û temenekê hizirkirinê wê weke ku wê bide me. Minaq ku em têngîna kişînakorsê a ketina sêvê ji darê wê li berçav bigirin wê, ew rewşa wê ya korsî wê mirov wê bo rewşa neketina sêvê li berçav bigirê. Yan jî ku em sêvê û rewşa wê ya ketina wê weke matelyalekê wê herêbikê wê, demê em ya rewşa vajî wê weke 'dij-matelyalê (antimatter)' ku em bi wê bihizirin wê, di wê rewşê de wê, heman rêgez wê, çawa wê bo wê bûhûrîner bê. Di wê rewşê de de wê, dema ku em di atomê de protonê wê bi têngînek pozitiv wê werênina ser ziman wê vajî wê, *protona negativ* wê, di awayekê de wê, weke aliyekê wê yê fahmkirinê wê xwe bide nîşandin. Wê weke rewşek bûjenî a vajî rewşa bûjenî a asayî jî wê, di awayekê de wê, dikarê were salixkirin. Di wê rewşê de wê, dema ku em di çerçoveya têngîna fezeyî de wê, bi wê aliyê wê bihizirin wê karibê weke aliyekê ku ew têkiliya dem-fezeyê û kûtle-vejenê vebêjê? Di aslê xwe de wê, weke aliyekê ku wê, di wê rewşê de wê, dema ku wê, 'kuanta' yên Max Blanck û hwd re jî wê dikarê li wê bihizirê. Paul Direc wê, bi matematikê wê bikeve nava hewldanakê ku ew denkmên wê di awayekê de wê pêşbixê û wê werênê ser ziman.

Minaq wê di vejenê de wê, dema ku wê, bi wê hêzek tahfanê wê were çêkirin wê weke hêza ne tahfanê wê ya vajî wê dikarê wê bi wê re wê li wê bihizirê. Di aslê xwe de wê, di wê mantiqê de ku mirov aqilekê bi wê bimeşênê wê mirov di wê rewşê de wê bi wê re wê kifşdikê ku wê, weke aliyekê giring wê herdû ali wê di awayekê de wê bi hevdû re wê di ahengekê de wê weke ku wê hebin û wê, hevdû di ahengekê de wê bidina girtin. Wê dema ku wê aliyekê ahenge wê, xirabibê wê weke ku wê aliyê din wê xirabibê wê di dîmenekê de wê rengekê fahmkirinê û têngînî wê, bênê li ber hiş û fahmkirinê.

Di wê rewşê de wê, mijare têngîna kişînakorsê wê, dema ku mirov wê ji van aliyan ve wê li wê bihizirê, wê di aslê xwe de wê weke ku mirov wê bi fîzîkî û ne fîzîkî wê hinek rewşên din ên ku ew pêwîstin ku ew ji wê werina fahmkirin wê weke ku wê bi wê re wê hebin. Di wê rewşê de wê, dema ku mirov wê, têngîna negativ a kişînakorsê wê li wê bihizirê û wê werênê ser ziman wê, bi aliyê wê yê kişînakorsê ê negativ re wê aliyê pozitiv wê weke ku em li ser aliyê pozitiv ê negativ ku wê kifşdikin re wê, di awayekê de wê, xwe di dîmenekê fahmkirinê de wê weke ku wê bide nîşandin. Di wê rewşê de wê, bi wê rewşê re wê, weke ku em kifşbikin wê, li şûna aliyekê negativ û pozitiv wê du aliyên negativ û du

aliyên pozitiv wê, di wê rengê de wê, di awayekê lihevdû çaprazkirî ku ew bii hevdû re di ahengekê de werina fahmkirin wê weke ku wê bi hevdû re di dîmenekê de wê bijîn. Di wê rewşê de wê, dema ku mirov wê, di awayekê de wê, werênê ser ziman wê ev rewş wê, weke aliyekê wê yê din jî wê, di dîmenekê de wê weke ku wê bide me.

Bi denklemlî wê dema ku ev aliyê bi çar aliyê ê bi têtîngênê pozitiv û nagativê re ku me hanî ser ziman wê, bi matematika wê, û denklemlên wê yên ku ew bi wê werina pêşxistin wê, di aslê xwe de wê, wê hinekî din wê karibin wê ji hevdû wê derxin û wê bidina fahmkirin. Wê, di awayekê de wê, ji aliyekê din ve jî wê, mirov dikarê wê, di dewama wê de wê, werênê ser ziman ku wê ev wê, weke ku mirov wê, ji aliyekê ve wê, dikarê wê werênê ser ziman wê, di awayekê de wê, bi têtîngênê wê xwe bide nîşandin. Di mijare matematikê û li her çar aliyan bi wê rengê hizirkirin wê, di wê rewşê de wê, di awayekê din de jî wê, bi denklemlî wê tiştêkê din jî wê bi xwe re wê weke ku wê bide nîşandin. Ew jî wê ew bê ku mirov dikarê wê, di awayekê din de wê, kifşbikê û wê werênê ser ziman ku wê, di wê rewşê de wê, di wê rewşê de wê, di awayekê de wê tûraka têtîkiliyan a pirralî û pêşxistina wan wê di awayekê de wê bi xwe re wê, bide nîşandin. Ev tûra têtîkiliyan ku wê li ser wê re wê xwe bide nîşandin wê, di awayekê de wê dema ku mirov wê bi wê li dem-fezeyê bihizirê wê, di wê rewşê de wê, aliyekê giring ê vegotinbar wê bi xwe re wê, weke ku wê biafirênê. Di wê rewşê de wê, dema ku em bi aliyê pozitiv re wê, pêşî bi A salixbikin û aliyê wê yê din bi B salixbiikin wê, B wê, di xwe de wê, weke ku wê potansiyek a ji A'yê wê bihawênê. Di wê rewşê de wê, vajî wê, ku em B'yê li wê bihizirin em di heman rewşê de wê, di wê de wê, ji A'yê wê a wê di wê de wê, hebê. Wê, di wê rewşê de wê, ev wê, weke kevirna bingihînê wê di hevdû de wê, di awayekê de wê xwe bidina nîşandin. Lê heman rewşê wê dema ku em ji aliyê têtîngênê nagativê ve bi heman rengê wê hildina li dest wê, dîsa wê, di awayekê weke wê de wê, kifşkirin wê di wê de wê, hebê. Çendî ku wê di dîmenekê de wê, weke ku wê, ji hevdû cûda wê, di awayekê de wê, temenekê fahmkirinê wê bidina me jî wê, di wê rewşê de wê, rewşa aliyê nagativ wê, aliyê wê yê nagativ bi C'yê û yê pozitiv ê nagativê bi D'yê ku em wê werênina ser ziman wê, demê wê, di wê de wê, bi heman rengê wê, di awayekê de wê, di C'yê de wê ji D wê d' wê di wê de wê bi temen bê û wê, di D'yê de wê, ji C'yê wê c wê bi temen bê. Lê ku em di awayekê din de wê, demê aliyên pozitivê wê, di wê de wê, bicih bikin wê, di wê rewşê de wê, bi **Xa** û **Xb** wê, di wê de wê, bihizirin wê demê



wê, di awayekê de wê, destpêka têkiliya di nava wê de wê bi renekê wê tûra xwe ya têkiliyî wê bidest dayîna dîyarkirinê wê bikê.

Em ji aliyekê din ve jî wê, bi awayekê wê li wê bihizirin wê, di renekê de wê, dema ku em li rewşa aliyê pozitiv û negativ bihizirê û bi aliyê din ê negativ û pozitiv bihizirê wê, di wê rewş de wê, di awayekê de wê, çawa awayî ku wê, derkeve li holê wê jî ji wê beremberê wê, bi aliyê pozitiv de her çar awayan weke aliyekê bi hasibênê û beremberê wê, çar-awayên din bi wê bihizirê û bi heman rengê bi aliyê din ê negativ bi heman rengê li wê bihizirê wê, di awayekê de wê, dualî wê, ji xwe derhanîna wê werênê li holê. Ev wê, di awayekê de wê, di awayekê de wê, bi wê rengê wê, bi berdewamî wê mirov dikarê ji her aliyên van wê li wê bihizirê.

Di awayê hizirkirinê de wê, mirov dikarê wê bi wê re û di dewama wê de wê, werênê ser ziman ku wê têngîna dij-bûjenê wê, di awayekê de wê, dema ku mirov wê, bi têngîna kişnakorsîyê re wê, li wê bihizirê wê, weke têngîne ku wê ew wê bide ardê û pûçbikê û ankû wê di awayekê de wê, bi rewşek bi darêjkkirinê wê di rewşekê de wê, weke temenekê berdewamanî ê fahmkirinê bê. Dij-bûjenî û ankû antî-mataliyali wê, di awayekê de wê, weke ku wê, dema ku mirov wê, di mantigê têngîna 'antî ..' de wê li wê bihizirê wê, weke bi têngînek vajî wê awayekê wê têngînek hizrî wê bide me. Lê di aslê xwe de wê, di awayekê de wê, irov nikarê wê bi tememî wê bi wê rengê wê, di awayekê de wê, fahmbikê. Di awayekê de wê, ya antî û ankû 'dij' wê, di awayekê de wê, hebê bi heyîna xwe re. Wê, di wê rewşê de wê, ev wê, weke aliyekê wê yê ku mirov wê, dikarê wê, di awayekê de wê bi wê bihizirê. Û wê dema ku em bi têngîna kişnakorsiyê û hwd wê bi fezeyê wê li wê dihizirin jî wê, di aslê xwe de wê, kifşkirina wê, di awayekê de wê, weke aliyekê fezeyê û rewşa wê ya bi sazûmanî, xwegirtî û hwd jî wê, di awayekê de wê, bi wê re wê aliyekê wê biafirênê. Wê dema ku em bi aliyê pozitiv wê, di awayekê de wê, xatekê wê bi awayekê vejenî ê dagirtî wê, bi wê bihizirê wê, di awayekê din de wê, beremberê wê di wê de wê, aliyê wê yê negativ wê hebê. Di wê rewşê de wê, ev wê, weke rêgezê wê xwe di awayekê de wê bide nîşandin. Wê, bi têngîna vejenê ku mirov wê fahmbikê wê, bûhûrîna li hevdu û ankû bûyîna weke aliyê din ê *antî* li xwe wê, di wê rewşê de wê, di awayekê de wê, weke xosletekê wê xate wê pêşketinê wê, di renekê de wê bide nîşandin.

Bi têngîna kişnakorsîyê ku mirov wê li wê bihizirê wê, di awayekê de wê, teorîya korsîyê, minaq a einstein wê bahsa ketinê a bi tiştê re wê,

bikê. Di wê rewşê de wê, bi awayekê wê antî wê di fezeyê de wê neketin wê di awayekê de wê, weke ku mirov wê, dikarê wê kifş bikê wê, di wê rewşê de wê, hebê. Mînaq ku em pozitronê weke antî elektronê bibînin wê, di awayekê de wê, ji aliyekê din ve jî wê bi wê re wê di heviyekiyek nîrxî de jî wê bi wê re wê mirov divê ku wê werênê ser ziman. Ji aliyekê ve wê, dema ku em wê, li wê dihizirin em digihijin wê hisiyetê ku wê, aliyekê bûjen û ankû mateliyaliya ku ew heyî wê, ew ya antî wê, bi afirênê di hebûna wê de. Wê, di wê rengê de wê, di kombinyonekê de wê ew wê bi wê re wê hebê, weke ku em çawa bi rewşa kişînakorsiyê wê, bi wê re wê, ya ne kişîne wê, bi wê re wê kifş dikin. Dema ku wê, ji palasotkek êgir wê agir wê pêkeve û ew agirê pêketî wê, di wê rewşê de wê, di wê rewşê de wê, çî kombinyon wê, di temenê wê de wê ew hebê ku ew wê dide çêkirin. Yan jî wê, dema ku em weke ku wê, were gotin ku 'qulkên reş' ku ew bi germehiya wê re wê, ser rêjeye bi milyonî re bê wê, demê wê, ya antî wê, di rewşek asayî a ku wê, ew germî wê, bandûrê nekê de bê. Di wê rewşê de wê, heman tiştê bo rojê jî wê dikarê wê, bi wê rengê wê werênê ser ziman.

Di wê rewşê de wê, di rewşa jîyanê de jî wê, ji aliyekê ve wê, temenê wê li ser vejenê bê. Lê di wê rewşê de wê aliyê din ê ne weke vejenî wê hebûna fîzîkî û bûjenî a ku ew afirîya wê bi xwe re wê, bi têngînî wê weke ku wê temen bikê. Di wê rewşê de wê kombinyona nava wê rewşa fîzîkî-bûjenî û ya vejenê ku ew bi wê dikeve tevgerê de wê, di wê rewşê de wê têngînekê wê, di aslê xwe de wê bide me. Çendî ku wê bûjen wê bi rewşa wê ya fîzîkî wê, bûjenî jî bê wê bi awayê wê yê darêjkî ku ew ji wê afirîya wê, weke ku ew ne ji wê bê wê, di awayekê de wê, dij wê di awayekê de wê, xwe bide dîyarkirin, çendî ku wê têkiliya wê ya bi vejenî bo jîyankirinê wê hebê jî. Zindiyek wê hebûna wê, bi bûjenî wê hebê. Lê ew mihtacê wê vejenê ya ku ew bi rêyên weke xwarinê û hwd bigirê dakû ew karibê bijê. Di wê rengê de wê, têkiliya nava wê bûjenê û fîzîkê ku wê aliyekê wê bi hebûn bê, dest lê were dayîn û ew bi destî were girtin û aliyê din wê ew wê bi wê rengê wê newê destlêdan, newê bidest girtin û newê rahiştin û hwd jî wê, di wê rewşê de wê, di wê rewşê de wê, dikarê bi heman têngînê wê fahmbikê û wê werênê ser ziman.

Di rewşa fîzîkê de wê, dema ku em ji hevdu cûdakirina wê ya bi awayên wê yê hişk û nehişk û ankû hişknêk wê, di wê rewşê de wê, di aslê xwe de wê, têngînekê wê bide me. Weke qaşaya dinava avê de ku ew dihalihe û awa digûharênê wê, li hevdu. Bûjena hişk wê, di dema ku wê bê wergerendin li vejenê wê ew wê weke çavkaniyek vejenî a ku mirov wê,

dikarê wê, li ser wê awayê wê yê bûjenî re wê bi awayekê pozitivî wê bigirê bê. Di nava têkiliya ahengî ji ya hişk û ya nehişk wê di aslê xwe de wê, di wê rewşê de wê, weke temenekê fahmkirinê wê hebê. Di fezeyê de wê, rewşa kişînakorsiyê ku mirov wê di çerçoveya têgîna antîmateriyalê de wê, werênê ser ziman wê, mirov dikarê wê werênê ser ziman wê, di awayekê de wê, weke bi materiyalê dibê wê, di rewşa antîmateriyalê de jî wê, di awayekê de wê, weke ku mirov wê, dikarê fahmbikê wê, karibê, bi heman awayê bûhûrîner bê. Lê bi aliyekê din weke ku bi heman rengê wê bûhûrîner bê wê, karibê rêgezên din jî wê, bi wê re wê, hebin. Di awayekê de wê, weke ku em bi rewşa belediyê û ankû barqê ku wê bi vedê û wê, bi elementên din re wê, dema ku ew têkiliyê didênê awayekê vejenî diafirênê wê, di wê rewşê de wê, rewşa partikelan û ya antîpartikelan ku em wê, li wê bihizirin wê, di wê rengê de wê, xwediyê awayekê afrîner bin. Ji aliyekê din ve jî wê, mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê, di wê rewşa afrîner de wê, çendî ku wê weke aliyên antî hevdû jî bin lê wê di awayekê de wê, bi têgînek heviyekî wê xwediyê awayekê ku mirov wan dikarê wê bi wê rengê wê fahmbikê bê.

Di rewşa manyatikê de wê, aliyê wê yê pozitiv wê di rewşek kişandinê de bê. Aliyê din ê negativ jî wê, vajî wê di rewşek tahfandina derve de bê. Lê wê çendî ku wê, di wê rengê de wê, di awayekê de wê, were dîtî jî lê wê ji aliyekê din ve jî wê, rewşek navberî a li gorî wê rewşa fîzîkê ku mirov dikarê wê bi geometriyê wê bihasibênê wê hebê ku ew wê, di wê rewşê de wê, temenekê ahengê wê biafirênê. Wê dema ku em rewşa atomê wê werênina ser ziman wê bi wê re wê were dîtî ku wê, dendik wê, bi protonî wê, xwediyê rêketina pozitiv bê. Li ser wê re ku wê weke rewşek awrî wê hebê ku wê, ew wê weke elektronê wê, di awayekê li gorî wê di rewşek negativ de bê. Lê wê jî wê, dema ku em, bi têgîna geometriya atomê wê fahmbikin wê, rewşek wê ya navberî a ku ew bi ahengî ne zêde ji wê wirde û ne jî zêde ji wê nêzde ku wê bibê wê, bi wê re di rewşekê de wê hebê. Di awayekê konsantrayî de wê, di seknekê de bê. Wê ev wê çerçoveyek sazûmanî a çerçoveya atomî a giştî de wê biafirênê hebûna atomê a ku em wê pozitiv wê biafirênê wê, dema ku wê, ev rewşên wê yên vajî hevdû ku ew li wê werina vajîkirin wê, di awayekê de wê, rewşek li gorî wê rewşa wê ya pozitiv wê ya negativ wê biafirênê. Lê di wê rewşê de jî wê, atom wê, weke elementekê wê, di wê rewşê wê ya pozitiv a asayî de de jî û wê di rewşa antîatomî de jî wê, bi wê re wê, di awayekê de wê weke ku wê bi wê rengê wê hebê.

Di rewşa fahmkirina têgîna antûmateriyalê de wê, di wê rewşê de wê, hin bi hin wê, di derbarê wê de wê hizirkirin wê zêdetirî wê pêşkeve. Wê weke aliyekê din jî wê ew wê, bi wê re wê li wê were hizirkirin ku wê, hebûna antûmateriyale ku mirov wê çawa wê dikarê wê fahmbikê bê. Ji aliyekê din ve jî wê, dema ku mirov wê, di wê rewşê de wê, rewşa antûmateriyalê wê li wê bihizirê wê, bi wê re wê mirov dikarê wê, werênê ser ziman ku wê, di çerçoveya hebûna bûjenî de ku mirov wê bi wê bihizirê wê, temenekê xwe-afirîner wê bi wê re wê, bi rewşên fîzîkî û hwd re wê, dikarê wê, bi wê fahmbikê. Minaq rewşên xwe dewrûdayimkirinên bi xwezayî, şînen jinûve û jinûve û hwd wê, di wê çerçoveyê de wê, bi temenekê wê, di aslê xwe de wê, dikarê wê fahmbikê. Ji aliyekê din ve jî wê, mirov dikarê wê, di dewama wê de wê, werênê ser ziman ku wê mijare antûmateriyalê wê, di wê rewşê de wê, bi zêdeyî wê, weke aliyekê materiyalê wê biafirênê. Aliyê materiyalî wê, di awayekê de wê, aliyê wê yê ûrbûyî, bi fîzîkî û bûjen awa û darêjk standî, di rewşa wê ya rahn û hişk û hwd de ku wê pêşkeve wê, di wê rengê de wê, mirov dikarê wê, werênê ser ziman. Fizikvanên weke Yasunori Yamazaki wê, dema ku wê, li ser mijare antûmateriyalê wê bihizirin wê, di wê rewşê de wê, pîrsekê wê bikin. Ew jî wê, ew bê ku wê, di rewşa antûmateriyalê û materiyalê de wê, ji destpêka 'bing.bang' wê, ber çî sedemê wê aliyê materiyalê wê bê xwediyê serkevtinekê li ser aliyê din ê antûmateriyalê. Di wê rewşê de wê, di wê rengê de wê, di aslê xwe de wê, di wê rewşê de wê, rewşas hebûna bûjnî, fîzîkî û hwd ku ew di afirê wê, weke rewşek ji wê ahenge nava materiyalê û antûmateriyalê derketinê jî wê di dîmenekê de wê weke rengêkê întûbayî wê bide me. Lê ji wê zêdetirî wê mirov dikarê wê, werênê ser ziman ku ew, aliyê ku ew bi materiyalî bi serket ku ew, aliyê antûmateriyalî di temenê wê de wê, hebûna xwe wê weke aliyekê konsantrayî û ahengî a di awayê de ku wê bi wê re wê ew wê bibê. Di wê rewşê de wê, mirov nikarê wê, di wê rengê de wê, werênê ser ziman. Wê wê hizirkirina bi afirîna têgîna materiyalê li ser ya antûmateriyalê wê bi empatiyekê wê bi wê rengê wê bihizirin û bêjin ku wê, aliyê materiyalê li şûna wê ku ew aliyê antûmateriyalê ku ew em î ro wê kifşdikin ew li şûna aliyê materiyalê bi heman rengê bûa xwediyê serkevtinê û wê, aliyê xwe dîyarker û kifşkar danîşandaba wê, hingî wê çî reng û awa wê, bi xwe re wê, biafranda? Di aslê xwe de wê, dema ku em rewşa zindîyî weke bi şaneyê û ankû atomê re wê, dibînin wê, di wê rewşê de wê, weke têkiliyek bûhûrîner wê çendî ku wê bi wê afirînê ji ya antûmateriyalê li ya materiyalê wê hebê wê vajî wê jî wê di awayekê de wê ew têkilî ji aliyê

materiyalê li antûmateriyalê wê hebê. Wekî din wê nexwe wê jîyan û ankû temenekê wê yê hebûnê ê ku me bi wê kariba bahsa hebûnekê kiriba wê nebû ba. Wê weke ku wê di awayekê de wê were tefkirkirin ku wê berî hebûn û jîyanê wê hertişt wê tenê ji rewşek vejenî afirîba wê, tenê wê bi wê rengê wê bûba. Wê ji wê derbas nebûba. Di wê rengê de wê, dema ku em rewşa materiyalê bihizirê wê, di aslê xwe de wê, ji vê aliyê ve ku mirov wê li wê bihizirê wê weke çavkanî wê antûmateriyal bê û wê, antûmateriyal wê temenê wê yê jîyanî bê. Wê, di wê rewşê de wê, mirov dikarê wê, werênê ser ziman. Di nava rewşa hebûnên fîzîkî û bûjenî de wê, çendî ku wê her şanê, atom û hwd wê, di awayekê de wê ji wê vejenê jî bin lê wê, weke vejena bi darêjkî û bûjenbûyî ên konsantrabûyî ku ew nikarê xwe di vejene xwe de biafirênê bê. Wê ber vê yekê wê, pêwîstiya vejenê ku ew bi wê hebê wê bibê. Di wê rewşê de wê çendî ku wê ew wê ew wê hilde li dest wê, temenê gûharînê wê bi wê re wê, bi xwe re wê biafirênê. Di awayekê du dîmenî de wê, rewşa gûharînê di wê rewşê de wê, herî hindik mirov dikarê wê kifşbikê. Aliyê pêşî wê, di awayê wê hebûnîya bûjenî a fîzîkî ku ew ji wê ya û wê, bi wê hertimî wê tabîî wê rewşek gûharîner bê. Aliyê din jî wê, di wê rewşê de wê, di wê rengê de wê, weke aliyê din di rewşa hildan de bê.

Ji aliyekê din ve jî wê mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê rewşa vejenê wê dema ku wê, bahsa wê were kirin wê, di rewşa fîzîkî de wê ji awa li awa ku wê gûharînê û bi darêjkî wê bide çêkirin wê, di wê rewşê de wê, di aslê xwe de wê, ew çavkaniya wê gûharînê wê di awayekê de wê, mirov bi wê vejenê re wê çawa dikarê wê fahmbikê. Dendika wê vejenê û ankû vejena wê vejenê ku mirov wê, di wê rewşê de wê, bikê ku wê bi gotin bikê û wê fahmbikê wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê din ê giring wê mirov dikarê wê, di serî de wê li wê bihizirê bê.

Têkiliya nava aliyê materiyali û antûmateriyalî wê rewşên fezeyî bi giştî û teybetiyên wê re jî wê di awa de wê li ser ligan bi hebûnî û fîzîkî û hwd wê bigirê. Wê, di di wê rengê de wê, monstrayiya nava wê de wê, di wê rewşê de wê, aliyê materiyalî wê bo ku ew temenê wê aliyê vejena antûmateriyalê wê biafirênê wê weke bûjenê û fîzîkê wê bi wê vejene antûmateriyalê wê bijî. Di awayekê xwezayî de wê, weke ku em bi rewşa birehê û hwd re wê, dikarin wê kifşbikin wê, rewşa materiyalê û antûmateriyalê wê bi dewrûdayimiya nava wan re wê hebê. Di wê rewşê de wê, di asta wê de wê, ast wê, di wê têkiliyê de wê temenê bûyîn û afrîna fîzîkî bê. Di aslê xwe de wê di her rewşên xwezayî de wê bi wê rewşa konsantrabûyî re wê temenê xwe dewrûdayimkirinê wê hebê. Di

wê rewşê de wê, aliyê antimateriyal wê, di awayekê de wê, hertimî wê weke temenê motori ê aliyê materiyalê wê biafirênê. Di wê rewşê de wê, di dîmenekê de wê weke aliyê antimateriyalî wê di awayekê de wê weke rengê vejenî ê saf wê bi xwe re wê, bide dîyarkirin wê were ber hişê mirov. Di wê rengê de wê, ev jî wê, weke aliyekê wê yê giring bê ku mirov wê, di serî de wê, weke aliyekê giring wê, di serî de wê, fahmbikê û wê werênê ser ziman bê.

Di mijare fahmkirina rewşa antîmateriyalê de wê, tenê wê bi têtînek 'dij-bûjen' û ankû 'antî-made' wê fahmkirin wê, ne awayekê fahmkirinê ê rast bê. Di wê rewşê de wê, di serî de wê, weke aliyekê giring wê, di serî de wê mirov dikarê wê bin wê xatbikê û wê werênê ser ziman. Di dewama wê de wê, mirov dikarê wê werênê ser zimam ku wê mijare fahmkirina têtînek bi gotina 'antî ..' ku wê li ser esasakê dijberîyê û hwd re wê, fahm bikê wê ne rast bê. Li şûna dijberîyê ez gotina vajiya hevdu ku wê çendî wê heta deverê kin wê temenekê fahmkirinê wê karibê biafirênê wê bikarbênim. Ber ku wê, di rewşa aliyên ku em weke aliyê 'negativ' û 'pozitiv' wan dihênina ser ziman wê, ji wê têtîna dijberî a bi gotina pozitiv û negatîvîyê zêdetirî wê, di awayekê konsantrayî a afrîner de wê, xwediyê rewşek heyînî a fîzîkî û nefîzîkî bê. Di wê rengê de wê, di awayekê de wê, di serî de wê, weke aliyekê giring wê mirov dikarê wê, werênê ser ziman ku wê mijare têtîna antimateriyalê wê di wê rengê de wê, di kifşkirina wê de wê, temenekê fahmkirina jîyanê ê ji aliyê din ve jî wê bide nîşandin. Di wê rewşê de wê, di serî de wê, weke aliyekê din ê giring wê mirov dikarê wê werênê ser ziman. Em dikarin mijarê ji aliyekê din ve jî wê bi têtînek denklema ku wê di nava kuantumê de wê di çerçoveya 'nedîyarîya Heisenberg'ê de wê hildina li dest. Di wê çerçoveyê de wê, dema ku wê, bahsa momentuma nava du aliyên wê bikê wê, aliyê vajî ku wê ku wê di wê de nedîyarî wê çendî wê piçûk bibê wê, bi heman rengê wê ne dîyarîya temenê wê zêdetir bibê wê werênê ser ziman. Wê, di wê rewşê de wê, ku wê,  $x$  û  $k$  yê wê rewşên gûharîner ên fezeyê wê bi wê werina hildan li dest wê, wê, di dewama wê de wê, bi awayekê wê bi rengê  $\Delta t \Delta k > 1$  werênê ser ziman. Lê li vir wê ev 1 wê çendî ku wê weke  $1$  ê wê were ser ziman wê dikarê wê weke "1 wê, di awayekê de wê, werênê ser ziman. Ku em di dewama wê de li şûna wê, bi denklema De brolie-Einstein wê di awayekê de weke  $p = kh$  wê were dîtin. Di wê rewşê de wê,  $\Delta x \Delta p_x > h-2$  were kifşkirin. Li vir wê, di awayekê de wê  $\Delta x$  wê, di di rewşa wûcanî de wê wê nedîyarîyê bide nîşandin û wê,  $\Delta p_x$  jî wê di awayekê hevrastîyê de wê, ne dîyarîyê wê

bide dîyarkirin. Lê li vir di zane min de wê, weke ku em di çerçoveya denklemê de wê hîsdikin wê, weke kêmeyîyekê wê bi hîskirinê wê xwe re wê bide nîşandin. Ber ku wê, wê di wê rewşê de wê, ya dîyar û ne dîyar wê, di awayekê de wê di nava hevdû re wê derbas bibê û wê, di wê rewşê de wê, weke aliyê dîyar wê, di wê rewşê de wê, weke ku ew ji nedîtî ve wê were wê, têgînekê û wê hizrekê wê di mejiyê me de wê bide çêkirin. Em têkiliya nava materiyalê û ya antûmateriyalê li hevdû ku wê li wê bihizirin wê, di wê de wê, ahengek dîyar wê, hebê. Di rewşa fîzîkê de wê, di awayekê darêjkî de wê, ew wê hebê. Lê aliyê din ê ne dîyar wê ku em li ser aliyê gûharîner wê bi têgînî wê demezrênin wê di wê rewşê de wê, weke aliyekê ku ew bi wê re wê, di wê rewşê de wê bi wê re wê, di rewşek bûyînê de bê. Yan jî di awayekê de ku em li dawîya denklemê [Â, B] dênin.

Di fezeyê de wê, deverên ku ew kişînakorsiyê li wê ne bûhûrîner bê wê xosletên antûmateriyalê wê, di awayekê de wê bi wê re wê, xwediyê awayekê bê. Lê ji wê zêdetirî wê, rewşa konsantrayîyê di aslê xwe de wê, weke aliyekê ku wê, ji wê weke dîmenekê din wê were xwandin ê ku mirov wê bi wê, çawa rewşa fîzîkê wê têbigihê wê weke aliyekê wê yê din ê ku mirov wê, derxê li têgihîştinê bê. Di mijare wê de wê, rewşa kişînakorsiyê wê di xwe de wê, weke ku wê, dema ku em li gorî nebûna kişînakorsiyê wê, weke ku wê, di xwe de wê, xosletên weke giraniyê û hwd ku ew bi tîrîtiyê diafirin wê di xwe de wê vêşarî wê bide girtin. Ev jî wê aliyekê din ê rewşê wê di xwe de wê, weke ku wê bi dîmenekê din wê bide dîyarkirin.

Di mijare fahmkirina antûmateriyalê bi têgîna geometriyê wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê wê yê rewşî wê xwe di awayekê de wê, bi wê rengê wê bide nîşandin. Çavdêrîya bi bûjenan ku wê were kirin wê, di wê rewşê de wê, çî wê bi awayî wê bidina me wê, di wê rengê de wê, bide nîşandin. Tiştên weke bi têgînî ên weke giraniyê û hwd wê, dema ku me ew cerbîkir mirov wan têdigihê. Di wê rewşê de wê ev wê, weke aliyekê wê yê din bê. Em li vir li ser têgîna antûmateriyalê re wê empatiyê wê bikin û wê bîna ser ziman wê, di rewşa hebûna korsiya kişînê de wê tişt wê bikeve. Wê demê ku ew di rewşek dîtin a vajî wê de wê, nekeve, ku wê çendî kişîna korsiyê (*gravity*) ew hebê jî. Lê di aslê xwe de wê, dema ku mirov wê, minaq di nav rewşa korsiyê de wê li wê bihizirê, wê têgîna giraniyê wê, ji wê derxê wê, ew wê biikeve? Giranî wê, tenê wê weke rewşek kişîna korsiyê bê? Minaq wê, dema ku wê vejena antimateriyalê wê bê xistin li qabakê de wê, bi qatkên qabê re wê di

heviyekiyekê de wê, xwe li wê bide mihandin, yekkirin û ankû li wê tûnakirin. Ev rewş wê, tişteke din bi xwe re wê bide nîşandin. ..

### Geometriya cebirî

Geometriya cebirî wê weke têtîneka matematikî jî ku wê li ser têtîna polinoman re wê sifiran wê lêbikolê bê. Wê, di wê rewşê de wê, geometriya cebirî a hemdem ku wê, bi rêza sifirna ku wê ew wê wan bikê ku wan çareserbikê wê, ji **cebiriya komutatîfî** wê, şêwayên razberî ên rêbazî wê bikarhanîna wan re wê, xwe bide nîşandin. Di xabatek geometriya cebirî de wê, bûjenên wê, cihêrengiyên cebirî wê ji aliyekê ve wê, weke ku wê temenê wê yê fahmkirinê wê weke ku wê wê biafirênin. Di wê warê de wê geometriya cebirî wê bi zêdeyî wê di rewşên weke hevrast, xat, xêz, rewşên elipsî û parabolî, xwahriyên kubîkî û hwd wê, di wê rewşê de wê, mirov dikarê rewşên wan bi zêdeyî bi navbikê. Di têtîna cebirî a geometriyî a hemdem de wê, matematik wê weke temenekê dahûrkirinê ê fahmkirina bi topolojikî wê biafirênê. Bêgûman wê dema ku mirov wê ji vê aliyê ve wê hilde li dest wê, rewşên weke bi derpêşî ên mantiqî û cebirî, teoriyên hijmarî û hwd wê weke aliyna ku mirov, di wê warê de wan werênê ser ziman bin.

Di serî de wê temenekê geometriyî ê ku wê, di wê warê de wê, çawa wê bi salixkirina gotinên wê re wê bibê. Di dewama wê de wê dema ku mirov bahsa geometriya demên berê bikê wê, di wê rewşê de wê, di pêvajoyek fahmkirinê de wê di demên hemdem de wê, pêşxistinên geometriya hemdem wê di awayekê de wê bi bandûrbikin. Minaq ku mirov di wê warê de wê werênê ser ziman wê di warê pêşxistinên de mirov, dikarê rewşa têtînen Diophantus ku wê bi navê geometriya Diophantne û ankû “diophantine **Geometry**” ku wê Serge Lang wê, li dora salên 1962an û wan de wê binivîsê mirov dikarê wê werênê ser ziman. Wê, di wê lêkolîna xwe de wê li ser denklêmên diophantus wê, di awayekê de wê, bi temenekê geometriya hemdem wê şîrovebikê û wê werênê ser ziman. Serge Lang wê, di awayekê de wê, modelek geometriyê ku wê li ser hijmarên gûharîner re wê pêşbixê û wê werênê ser ziman. **Serge** Lang wê, di desptêka pirtûkê de ku wê, atfî Gauss wê were kirin bi têtînek denklêmî a homojen bi awayê  $f=0$  re wê, bidest hanîna li ser ziman wê bikê. Lê awayê Serge lang wê di awayekê de wê weke ku mirov dixwênê wê di awayekê geometriyî de wê weke têtînek hipotezî bê. Wê di wê çerçoveyê de wê, di wê rewşê de wê, mirov wê yekê wê ji minaqên wê yên weke ku ew têtîna ‘careseriya parametryî’ a



L. E. Dickson ku ew bi tēgîna “çareserîyên rasyonâlî ên ku ew ne sifir ku ew hebin wê, di çerçoveya tēgîna hijmarên tamî de ku ew bi wê weke tēgînek hebûnî wê dikê ku ew wê werênê ser ziman wê, li ser wê re mirov wê kifşdikê. Di derbarê geometriya Diophantine de wê, Hilbert û Hurwitz wê bi lêkolînên xwe yê li ser wê dikin re wê li dora salên 1890 ku ew wê, cinsê 0'ê daxê li tēgîna  $1 \hat{=} 2 \hat{=} yê$ . Wê ev jî wê, di awayekê de wê, weke tēgînek çerçoveyî ku wê bi wê ew wê, di awayekê de wê, were ser ziman bê.

Di wê warê de wê teoriyên li ser nûqtayên integral û modelên xwahrîyên eliptikî wê weke aliyekê din ku wê li ser nûqtayên rasyonel re wê bikê ku ew li ser wê bisekinê û werênê ser ziman bê. Ji aliyekê din ve jî wê dema ku em di dewama wê de wê, werênina ser ziman wê weke aliyekê din ê hizrî ku wê, hilbert wê, bi tēgîna teorîya bi şûn ve hildanê ku wê werênê werêne ser ziman wê, dikarê wê, bi wê re di dewama wê de wê li wê bihizirê. Mantiqê wê jî wê li ser esasê ku wê bi hijmarek bi sînor de wê, ku wê di qathijmarên rasyonel de wê hebê wê. bi awayekê bi sînor wê, bi komî weke “*koma polinomên irreducible*” ku wê, weke polinomek ku wê li du komên polinoman wê newina daxilkin wê were dîtîn wê, bi wê polinomên gûharînerîyan weke xwe ku ew bi şûn ve nayên girtin ku wê weke xwe werina hiştin wê, bi hijmarên rasyonel re wê weke binkomekê ku wê were dîtîn re wê, were ser ziman.

Lang wê dema ku wê serî li hanînên ser ziman ên geometriyî wê di wê çerçoveyê de wê bide wê serê li “*cihêrengiyên abelian*” an wê bide. Minaq ku em bi hijmarên abelian bînina ser ziman ku 2 bi xwe re were çarpkirin wê, bi aritmatikî naqşaya xwe re wê weke ku wê were dîtîn wê weynek giring wê bileyizê. Di wê warê de xabate J. Silvermann a ku ew li ser cebirê û cihêrengiyên aritmatikî ku wê çawa wê bi awayekê naqşeyî wê were xamilandin wê hinekî li ser **wê** bisekinê. Di wê rewşê de wê, X wê weke hijmarek cihêreng wê awayekê wê bi xwe re wê bide **nîşandin**. X wê bi afirandina pergalên dînamik jî wê weke aliyekê cihêrengî wê biafirênê. Minaq ku em di çerçoveya tēgîna dînamîkî de  $(X, f)$  ku ew li wê were dayîn wê, ku em nûqtaya  $P' yê$  jî bidinê de wê, Wê birehek li pêş wê,  $(P_1, f(P_0), f^2(P) \dots)$  wê di awayekê de wê bide me. Di denklêmê de wê,  $(P_1, P_0)$  weke aliyên li pêş û rêzînên wê yê nû dikarin li wê bihizirin. Minaq me li jor bahsa naqşa 2'ê kir wê, karibê rêzîna hijmarên  $(X, f)$  hilde. Di awayekê de wê dema ku em hijmara  $X \hat{=} P_1$ , bi xatek danîşanî li ser temenê rasyoneli wê werênê ser ziman wê, f wê karibê wê temenê de erkekê bi xwe bileyizê. Di aslê xwe de wê temenê teoremî wê

mirov dikarê wê bi berdeyamî wê pêşbixê û wê di dewama wê de wê hilde li dest û wê werênê ser ziman.

Aliyekê din wê, di wê rewşê de wê, mirov wê werênê ser ziman ku wê, di aslê xwe de wê, her hijmarên bi wê rengê bi têtîna cebirî û abelianî ku mirov li wê bihizirê wê, di her rewşê de wê, awayekê dînamîk û aktiv wê, bi xwe re wê, bi xwe re wê bigirin. Ev jî wê di aslê xwe de wê, weke aliyekê xosletî ê hijmarîyên cebirî jî wê dikarê wê, werênê ser **ziman**. ..

Ev jî wê weke di matematikê de wê bi awayekê cebirî wê bi rewşên tevlihhêv ên dahûrîkirinê û teoriya hijmarên cebirî ku wê, di awayekê bi rêkûpêk de wê di salixkirinê de wê bên ser ziman wê, weke cihrengiyê cebirî ku mirov wê bi pênasebikê wê bi wê were wê bikê ku ew wê werênê ser ziman. Di wê rewşê de wê, ev jî wê weke aliyekê wê yê din ku mirov wê fahmbikê wê mijare geometriya cebirî wê, di wê rewşê de wê, aliyekê wê yê temenê weke ku em bi wê dibînin wê li ser temenê teoriya hijmarên cebirî wê ava bê. Wê di wê rewşê de wê, bi wê fahmkirina wê re wê, di awayekê de wê, mirov dikarê wê ji aliyekê ve wê weke temenê wê fahmbikê. Lang jî wê di temenê hanîna ser ziman a *geometriya Diophantine* de wê, serî li wê bide ku ew wê werênê ser ziman.

Di nava denklêmên Diophantus de wê, weke aliyekê ku ew li wê dihizirê wê, aliyê bi hewldana dîtina nirxa hijmarê a weke wê jî bê. Minaq wê ji aliyekê ve ku wê beremberê du hijmaran  $A$  û  $B$  dîtina du tam hijmaran bê. Wê bi wê rengê wê, di dewama wê de wê, bi denklêmkirina wê, bi awayê  $A = x + y$  û  $B = x_2 + y_2$  bê. Di dewama wê de wê, denklêmên diophantus ku ew pêşdixê wê, di awayekê de wê, weke ya rengê Pisagor ku ew pêşdixê bi sêkikên pisagor re wê, ew jî wê, di heman rengê de wê, di awayê weke  $x_2 + y_2 = z_2$  wê werênê ser ziman. Di hewldanên çareserkirina wê de wê, li ser wê bisekinê. Ev şewayê cebirî ku ew pêşdixê û dinivîsênê wê, di aslê xwe de wê, berî demên kevnera wê, di demên hûrî, mîtannî û babilîyan de wê, di nivîsên wan ên bizmarî de jî wê, bi awayekê wê were dîtî.

Mijare teorikî a hijmarên cebirî di aslê xwe de wê weke mijarek kûr bê. Wê, bi serê xwe wê weke mijar û lêkolînekê wê mirov dikarê wê hilde li dest. Li vir emê zêde ji wê aliyê ve wê nekevinê de. Dibê ku em wê ji lêkolînek xwe ya din re wê bihêlin û wê, bi serê xwe ku em wê hildina li dest. Lê li vir di çerçoveya mijare me de bi mantiqî û destpêkek wê ya fahmkirinê a modelî wê, em wê hinekî di çerçoveya mijare xwe de wê, werênina ser ziman.

Di mijare fahmkirina tēgina teorikî a hijmarên cebirî wê, di wê rewşê de wê, piştî sedsalê 18' min û pê de wê bi teorikî wê bi awayekê wê li ser wê were sekin in. Lêkolînên di wê warê de ên weke ya Gauss a bi navê “disquisitiones arithmeticae” wê, di aslê xwe de wê, di wê warê de wê, mirov dikarê wê, binavbikê û wê werênê ser ziman. Çendî ku wê di awayekê de wê, weke hanîna cem hevdû a ancâmên matematikî ên Euler, Lagrange, Legendre û hwd jî bê lê wê, ji aliyekê din ve jî wê hevnasînekê wê, bi tēgînî wê bi tēgîna teorikî a cebirî û hijmarên wê yê tenemî re wê bide çêkirin. Di wê rewşê de wê, di dewama wê de wê, lêkolînên li ser cebirî ku wê biibin wê bi zêdetirî wê, di wê warê de wê, di matematikê de wê, di nava beşên wê yê weke bi geometriyê û matematikê û hwd de jî wê, bê sedema kifşkirinên ku wê bîn kirin. Wekî din wê hinekî berî wê demê wê, Richard Dedekind wê lêkolîna xwe ya bi navê ‘qada hijmarên cebirî’ ku wê binivîsênê wê di wê warê de wê, weke aliyekê din ê hizirî wê bi xwe re wê, di warê de wê biafirênê.

Di warê kifşkirinên li ser hijmarên cebirî re wê bi aritmatikî wê, bi danîna tēkiliya xwahriyên eliptikî û modulên darêjkî ji aliyê Goro Shimura û Yutaka Taniyama ve wê, weke aliyekê giring ê ku mirov dikarê wê werênê ser ziman bê. Heta wê demê wê bi bawerîya nebûna tēkiliya van herdû qadan wê di awayekê de wê, hebê. Lê wê, hiskirina ku wê rêyek tēkili wê bi wê re wê hebê wê, bê sedema wê pêşxistina wan a bi hevdû re. Çendî ku wê pêşî wê were redkirin jî lê piştê ku wê ji aliyê matematikzanên weke Andre Weil ve ku wê, bê piştrastkirin êdî wê ji aliyê gelemperî ve wê were herê kirin.

Di warê rewşa fahmkirina tēgîna hijmarên cebirî ve jî wê bi korasî mirov dikarê wê werênê ser ziman. Ku em  $A$  yê weke komekê wê herêbikin û wê werênina ser ziman û weke endamê wê a bihizirin wê demê wê, bi rengê  $a \in A$  were hanîn li ser ziman. Lê ku wê dema ku wê, a ne endamê wê de bê bi wê rengê  $a \notin A$  were hanîn li ser ziman. Wê dema ku em minaq endamên  $A = \{a, b, c, d\}$  ku em bixwezî qarakterê wan were ser ziman em wê bi  $p$ ,  $B$  wê were ser ziman. Wê demê em dikarin  $B = \{x : x, p\}$  wê werênina ser ziman. Di dewama wê de wê, demê em dikarin wê bi rengê dinivîsandinê de wê,  $x$  wê weke hijmarek tamî ku wê were ser ziman wê demê wê derxistina li holê a wê qarakterizeyiya wê jî wê, bi  $B = \{x : x > 2\}$  Wê werênina ser ziman. Li vir em dikarin weke hûrgileke din jî wê li ser wê denklêmê wê werênina ser ziman wê dema ku em li şûna  $B$  yê  $C$  yê jî binivîsênê wê di awayekê de wê karibê wê werênê ser ziman.

Ji aliyekê din ve em wê werênina ser ziman ku wê  $A \hat{=} B$  wê, weke du koman bin. Ku em bêjin endamên  $A \hat{=} B$  wê weke yên  $B \hat{=} B$  jî bin wê demê em dikarin wê bi rengê  $A \subseteq B$  wê werênina ser ziman. Li vir weke aliyekê din ê hûrgilî wê navberê divê ku em ji hevdû cûdabikin ku wê, 'wekehevdûbûyîn, hevdûbûyîn û yêhevdûbûyîn wê di rewşên salixkirinên hijmarî ên cebirî de wê, xwediyên xosletên cûda bin ku em wan li ser têgînek nixê re wan bikin ku fahmbikin. Gauss wê hinek denklêmên ku ew di pirtûka xwe de dihênê ser ziman de wê, bû ku ew ew di heman nixê de wê, werênê ser ziman wê gotina "daxistina nixê li wê astê" wê bêtê ser ziman. Di wê rewşê de wê, ev jî wê weke aliyekê wê ye din bê ku mirov wê werênê ser ziman ku wê nixê wê ya ku mirov wê werênê ser ziman jî wê, di wê rewşê de wê weke ku wê were kifşkirin wê her endam wê, xwediyê nixê xwe yên ku ew di wê de werina kifşkirin bin. Di wê rewşê de wê, hanîna li ayni nixê wê, di wê rewşê de wê, yan bi jê kêmkirin û yan jî li wê zêdekirinê re wê bibê.

Di wê rewşê de wê, weke ku me li jor di rewşa kifşkirina qarakteriya endamên komê de wê,  $x$  wê weke hijmara tam wê çawa wê xwe bide nîşandin wê, di wê nûqteyê de wê, dema ku wê, em di warê ji hevdû cûda kifşkirina nixê û ankû di nava endamên  $A \hat{=} B \hat{=} B$  de wê, ji hevdû fahmkirinê de wê di encamê wê karibê weke hijmarek reell û ankû 'rastîn' jî wê karibê reng bide. Minaq wê dema ku em  $A \cup B = \{x : x, A \hat{=} B\} = \{x : x \in A \hat{=} x \in B\}$  wê bide nîşandin. Lê li vir wê, di wê denklêmê wê, dema ku em  $x$  weke endam wê, di wê rewşê de wê, dît wê, ew wê weke endamak vala jî ku ew were salixkirin jî wê karibê wê di wê de wê, were dîtîn û salixkirin. Di wê rewşê de wê, rewşa salixkirinê wê di awayekê de wê, weke aliyekê giring wê xwe bi wê re wê, di awayekê de wê bide nîşandin. Lê aliyekê din jî wê bi wê re wê hebê ku em wê kifşbikin. Ew jî wê ew bê ku wê, di wê rewşê de wê, endamên  $A \hat{=} B \hat{=} B$  wê çendî ku wê, weke ku wê bi hevdû re wê bigihina li hevdû jî lê wê çendî ku wê, bi  $A \cup B$  wê werina dîtîn wê di awayekê din de wê awayekê li hevraştatinê jî wê, were dîtîn bi wan re. Levkirina wan wê, di wê rewşê de wê, întûbaya  $A \cap B$  jî wê, di awayekê de wê, di nava levkirina weke endam û endamê wê bi wê re wê biafirênê.

Minaq ku em rewşa weke bi denklêmên Diophantus re wê dibînin ku wê, li ser hijmarên pozitiv ên lineerî re wê, awayên çareserkirinê weke  $a, b, c \in \mathbb{Z}, a, b \neq 0$  û di dewama wê de wê, bi yên gûharîner re jî wê, bi awayên weke bi tam hijmarî wê, bi denklêmkirinên weke  $ax + by = c$  û hwd dibînin.

Di teoreme Euler de wê, awayekê teybet mirov dibînê ku em di dewama wê de dikarin wê werênina ser ziman ew jî wê bi wê rengê bê. Minaq wê, wê n weke hijmara pozitiv weke hijmarek tam wê bi funksiyona  $\phi(n)$  re wê, di awayekê de wê werênê ser ziman. Bi wê re wê, bi n'yê re wek hev û ankû ji wê piçûktir wê hijmarên pozitiv ên tam wê bikê bêtê ser ziman. minaq wê bi awayê weke  $\phi(2)=1$ ,  $\phi(4)=2$ ,  $\phi(5)=4$  û hwd re wê bide nîşandin. Minaq bi teoremê bi awayê weke  $\phi(p_a)=p_a-p_a-1 = p_a(1-1/p)$  bê. Wê di temenê wê teoremê de wê weke p weke hijmare asal û a jî wê weke hijmarek pozitiv wê were hildan li dest bê. Li ser wê re wê, di awayekê de wê ew wê bi wê re wê were hanîn li ser ziman. Teorema Euler wê li ser awayê temenê hijmara pozitiv a tam re wê, di awayekê de wê, weke ku mirov wê, dibînê wê were dîtîn.

Li ser têtîna bi çareserkirina algoritmikî wê, di wê warê de wê, pêşveçûnên ku wê di wê warê de wê bibin wê bi wê re wê, zêdetirî wê xwe di awayekê de wê bidina nîşandin. Di wê warê de wê, denklêmên di asta duyem û hwd de wê, hê di demên hûrî, mîtannî û babiliyan de wê werina zanîn. Lê di dewama wê de wê, piştê wê, li ser çareserkirinên wan wê di awayekê de wê, were sekin in. Euler wê, di awayekê din ê matematikî de wê, rêyekê wê bixwezê wê, di wê rewşê de wê bide nîşandin. Lê Matematikzanê norwêcî Niels Henrik **Abels** wê, di wê di wê warê de wê, bi danîşandinên xwe re wê, bide nîşandin ku wê, çawa bê gihandin li çareseriyê wê li ser wê bisekinê. Di wê warê de encamên ku wê Abels wê bigihijiyê de wê, ew bê ku wê, bi algoritmikî wê di astek pêncem wê çawa nikaribê were çareserkirin wê, bi teorize bikê. Lê ji aliyekê din ve jî wê, Evariste Galois ku wê di awayekê de wê, çawa wê çawa teori wê were çareserkirin ku wê, bi hemû **parmutasyonên** re wê dênê li holê wê, di wê warê de wê, ev teoriya Galois ku wê weke bi navê *'teoriya galois'* jî wê were bi navkirin wê li ser temenê çareserkirina bi komî wê, di awayekê de wê, temenê wê, bêtê ser ziman. Lê teoriya galois wê, ji aliyekê ve wê, dema ku mirov wê ji temen ve wê lêkolîn din em, zêde nizanin ku wê heya wê, ji ceribandin Abels wê hebê û ankû wê nebê wê, di awayekê de wê, ji aliyekê ve wê, weke awayekê wê, cihê hizra çareserkirinê wê di mejiyê têtîna abels de jî wê weke ku wê bandûrê li wê bikê.

Li gorî mantiqê wê teoriya komî wê mirov dikarê wê bi têtîna cebirî wê werênê ser ziman ku em  $(G, o)$  weke temenekê cebirî wê herêbiikin. Ku wê dema ku wê o wê, xosletê duyemînî wê bi hevdû ve girêdana wê bikê wê, hingê wê, *'nîv-kom'* wê were ser ziman. Lê ku  $(G, o)$  ku wê di

awayekê heviyekî de weke kom bê wê demê wê, weke 'monoid' ek bê. Lê bo ku rewşa monoidê''ê bibê wê demê ku wê her endamê wê a ku wê ya beremberê wê û ankû vajî wê a hebê wê hingî wê weke monoid bê. ..

Di mijare têtîna teoremî a cebirî de wê, rengê wê yê fahmkirinê wê, di awayê çareserkirina geometriyê de wê, weke aliyekê temenî ê fahmkirinê wê biafirênê. Têkiliya wê ya bi wê re wê, di awayekê de wê, li ser rengê wateyê û salixkirinê re wê, di awayekê izomorfiki de wê, dikarê wê werênê ser ziman. Teoreme izomorfizmê wê mantiqê wê, bi kortasî wê, di wê warê de wê li ser esasê salixkirinê a bi komî bê. Minaq ku em  $G$  û  $G$ ' yê weke komê wê werênin ser ziman wê demê  $\emptyset : G \rightarrow G$  de wê weke izomorfik bê. Di dewama wê de ku em bi rengê weke  $\emptyset = N$  wê bi koma  $G/N$  re wê,  $\emptyset(G)$  izomorfiki bê.

Wê tîpa wê bi awayekê morfîkî weke bi têtîna geometriya reell projektîfî re wê bi minaqekê wê, dikarê bi berdewamî wê werênê ser **ziman**. Lê pêşnûma li jêr dê ji bo armancê bes be. Wekehevî mîna  $\theta$  mezin e. Nivîsandina  $F\theta = F'$  tê vê wateyê ku figura  $F$  bi  $F'$  ve girêdayî ye (ankû figura  $F$ -ya wekhev  $F'$  ye). Wekî analojîyek duyemîn, heke hijmara  $F'$  bi  $F_1$  re bi figura  $F_1'$  vê were girêdan, ew dikare wekî  $F \varphi = F_1$  'û ankû  $F \varphi = F_1$  were nivîsandin û  $F$  bi berhema  $F_1'$  ne wê  $\theta\varphi$  bi hev ve girêbide **bê**.

Izomorfism wê di awayekê matematîkî de wê, weke bi awayekê vajî bi hevdû re levxistinê û ankû weke hemlevkirinê ku ew werina çêkirin wê bi wê re wê, were ser ziman. Wê dema ku mirov bûjenê wê bi xosletên wê re wê, hilde li dest wê, herdû aliyên wê weke xwediyê xosletên ku em di heviyekiyekê de werina fahmkirin wê hebin. Di wê rewşê de wê, weke hevdû wê, di wê rewşê de wê weke gotinek meteforîkî bê. Di aslê xwe de wê, di wê rewşê de wê, dema ku mirov wê, werênê ser ziman ku wê, dema ku mirov wê bi rengê têtînî ku mirov ji hinek xosletên wê ve wê bi wê rengê wê fahmbikê wê li ser denkleme re wê bikê ku ew wê, werê ser ziman. Wê, di wê rewşê de wê, çawa wê, denkleme wê bi awayekê ku weke bi berê wê yê bi me ve ku em wê çareserdikin wê encamekê wê bi çareserkirina wê re wê bide me. Wê, bi awayekê din wê, bi aliyên wê yê din minaq weke ya piştî wê, ku mirov wê denkleme wê bi vajî wê binivîsênê wê bigihijê wê, bi wê re wê, dîsa wê, encamê wê weke ku wê bigihijiyê de wê mirov dikarê wê bi wê re wê kifşbikê.

Ev di rewşa geometriyê û xêzkirinên wê û xatên wê de wê, dema ku em wê bi awayekê metaforî lli wê bihizirê wê demê wê mirov wê, bi awayekê wê, di wê rengê de wê, bilî aliyê wê yê heyî wê bi awayekê li

aliyê wê yê din wê mirov wê karibê wê bigihijê li encamek din. Ev encam dikarê bi ya aliyê wê yê din re di awayekê de bê lê dikarê weke bi têtîna rengê fahmkirina materiyalê û antûmateriyalê ew, dikarê bi awayekê din ê vajî hevdû ku em wê dikarin wê bi awayekê wê fahmbikin wê, werênê ser ziman. Di aslê xwe de wê, geometri wê di wê rengê de wê, weke aliyekê giringî ku mirov wê bi wê re wê bêtê ser ziman ku wê, aliyê wê yê ku ew bi wê dihê ser ziman û ankû çareserkinin wê weke aliyekê wê bê. Lê di nerîna ku ez bi wê dinerim de ku ez wê werênima ser ziman wê her denklema geometriyî ku ew weke hatî çareserkinin wê, di aslê xwe de wê, weke aliyekê wê yê ne çareserkirî jî wê hê ew bi wê re wê bimênê bê.

Di aslê xwe de em di dewama wê de wê hinekî li ser esasê geometriya hevrastê û ankû projektîfî wê hinekî wê mirov dikarê wê werênê li ser ziman. Emê piştê werina li ser têtîna topolojiyê di geometriyê de. Di geometriyê de wê, têtîna topolojiyê ku wê were ser ziman wê, weke têtîna topolojiyê (**oscar**) Zariskî mirov dikarê wê navê wê bide. Di aslê xwe de wê, weke aliyekê ku mirov wê, dikarê wê, di awayekê de wê, di çerçoveya têtîna geometriya pêşvekirîner de wê, di awayekê de wê, li wê bihizirê. Wê di wê rewşê de wê, di awayekê topolojikî ku heta devera ku em biryarê bidin wê vekirî bê wê dikarê wê li wê bihizirê. Di wê rewşê de wê, di wê rewşê de wê, di dîmenekê de wê topolojiya zariskî wê çendî ku wê ji aliyekê ve wê, wê mijare kifşkirinê wê bide seha (*intuition*) me jî lê wê ji aliyekê din ve jî wê ji temenî ve wê bi hevrasî û hwd re wê, di awayekê de wê, wê întîbayê bi me re wê bide çêkirin ku wê, weke têtînek ne bidawî wê xwe bide nîşandin. Ya bi têtîna dawîtiyê re wê were ser ziman wê li ser têtîna derpêş, kom, polinom, fonksiyon, notasyon û **kamutatîfî** û hwd re wê, di awayekê de wê, weke sekina ku ew bi awayê birrînê ku wê bi wê bibin wê, dîmenekê wê bidina me.

Di topolojiya Zariskî wê nûqteyêke topolojiyê wê, xwe bide nîşandin. Wê li ser wê re ku mirov bêtê wê minaq Afîna  $A_1$  yê wê weke têtînek topolojikê a hevbeş wê, xwe bide nîşandin. Weke minaqê ku mirov bide wê minaq wê, dema ku em  $A_2$  yê weke binkomê wê di xelek  $Z$  yê de wê bi awayê denklêmî ê bi rengê  $(x^2 + y^2 - 1)y = 1$  re wê, li vir wê satîrê û nûqteyê wê bi  $(1, 2)$  yê weke ku wê digihênê li hevdû wê, dîmenekê wê bide dîyarkirin. Ben moonen wê di lêkolîna xwe ya bi navê “introduction to **algebraic** geometry” de wê, li ser wê aliyê wê bihizirê û wê, bi awayekê denklêmî ku wê çawa bi lokusa sifirê wê bêtê encam wê werênê ser ziman wê bi rengê  $S = \{(x^2 + y^2 - 1)(y - 1)(x - 2), (x^2 + y^2 - 1)(y - 1)(x - 2), (x^2 + y^2 - 1)(y - 1)(x - 2)\}$

$- 1)(y - 1)(y + 1)$  re wê, awayekê wê, werênê ser ziman. Di dewama wê de wê, dema ku wê bahsa vekirin û girtûbûnê wê bikê di çerçoveya wê têtîna topolojikî de wê, bêtê ser ziman ku wê  $A_n$  wê her nûqteyên  $P^y$  wê  $(a_1, \dots, a_n)$  girtûbin. Wekî din wê MP wê, bo danîşandina idealê wê  $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \subset k[x_1, \dots, x_n]$ . Piştê wê, MP wê, awayekê maksimal ê idealî wê bide nîşandin û wê,  $\{P\} = Z(m_P)$  wê, di dewama wê, bi  $P \mapsto m_P$  wê bi naqşa  $A_n$  re wê li koma idealan wê bijeksiyonekê  $k[x_1, \dots, x_n]$  wê bide çêkirin. Wê ev têtîna wî ya ku ew bi topolojikî wê werênê ser ziman wê, weke bi awayê 'Nullstellensatz hilbert' re wê, weke ku wê, bixwezê ku wê di hemrengiyekê û awayekê de wê, werênê ser ziman.

Têtîna zariskî wê, di awayekê de wê, di wê rengê de wê, bi rengê wê awayê idealê wê ji xwe re wê bikê temenê fahmkirinê. Di wê rengê de wê, geometriya zariskî wê ji geometriyên metrîkî ên weke yê auklidyânî wê cûdatir wê, di awayekê de wê, xwe bidina nîşandin. Dema ku em bahsa geometriya cebirî bikin wê, di wê warê de wê di aslê xwe de wê pergale hizirkirinê a **kocer** bîrkar ku mirov we, di dewama wê de wê, weke aliyekê ku wê bi modelên mininal re wê, alaqaya xwe wê bide nîşandin werênê ser ziman. Bîrkar wê, cihêrengiyên cebirî wê, bi awayekê cewî danîşandina wan wê li ser sê-dîmenan re wê bide nîşandin. Pirtûka wî ya bi navê "Topics in algebraic geometry" wê weke lêkolîneka kişkirinê a di wê warê de jî bê. Di awayekê cûreyên fanoyî, valahiyên elyafî û xwahriyên pozîtîv wê, li ser wan re wê kifşbikê. Wekî din di warê xwahriyên nagatîvî de jî wê, li ser re wê, bi awayekê modulî û pergâlî wê, pêşxistinên ku wê, bi kifşkirina xwe re wê, bêtê li ser ziman wê, di awayekê de wê, werênê ser ziman. Di wê rewşê de wê, ji aliyekê din ve jî wê, bigihijê ji du dîmenan zêdetirî li ser pêçanan re ku wê bibin. Ji aliyekê din ve jî wê, ji aliyê tekîtiyên sivik û fanoyan ve wê, çawa wê bi awayekê bi sînorî wê, werina çînîkirin û qarakterîzekirin wê, bide nîşandin. Di awayekê de wê, ji hevdu felîşandin û ankû dahûrkirina polinoman wê, bi denklêmî wê bikê. Minaq di awayekê ku em awayekê projektîfî li berçav bigirin bi rengê  $X = V(P_1, \dots, P_r) \subset P^n$  ku em tefkir bikin emê  $C^y$  weke hijmarek hildin li dest di dewama wê de wê, awayekê polinomî ê homojen bi rengê  $P_i \in C[x_0, \dots, x_n]$  wê mirov dikarê wê, kifşbikê. Di dewama denklêmê de wê,  $P_n$  wê weke qada biriqînê wê bidin nîşandin. Di awayekê de wê, di dewama wê de wê, mirov karibê xwe bigihênê qadaka bi dîmenî bi rengê denklêmî ê bi awayê  $C = (C_{n+1} \setminus 0)/C^*N$ . Em ku denklêmê bi awayekê bêdawî bi têtîna  $P_n \subset C^n$  li wê bihizirin emê di dewama wê de bigihina dûzrasteka hiperî ku wê di



denklemê de bi awayê  $H = P_N \setminus C_N \sim = P_{N-1} \subset C$  wê xwe bide nîşandin. Li vir ku em  $X'$ ê weke awayekê tememî wê li wê bihizirin wê, di dewamaê de em bi wê re jî awayek manifoldi li denklemê bi rengê  $d = \dim X$  li wê zêde bikin. Di aslê xwe de wê, ev wê denklemê wê bi awayekê pirr zêde wê berê wê bidiyê de. Wê, di wê rewşê de wê bi têtînek manifoldi a tevlihev wê, dikarê wê, bi wê bihizirê û wê êdî werênê ser ziman.

Li vir di aslê xwe de wê, di awayekê de wê mirov dikarê wê, bi zêdeyî wê, di dewama wê de wê, werênê ser ziman. Wê dûvrêya wê, li pêşî wê vekirî bê. Lê ji aliyekê din ve jî wê dema ku em bi têtîna 'birasyonâl' wê li wê hizirkirinê bidomênê wê demê mirov wê dikarê wê, bi rengê  $C(X) \sim = C(Y)$  bihizirê û wê di dewama wê de wê bi vekirîniya wê denklemê re wê, bi têtîna bidawî a  $X'$ ê û cihrengî wê li wê bihizirê û di wê rengê de wê, bi denklemê wê  $X = X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots X_1 \rightarrow X$   $X = X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots X_1 \rightarrow X$  werênê ser ziman. Di dewama wê de bi  $X'$ ê ku em bihizirin wê weke aliyekê tememî wê, bi awayê  $Z \subset X$  re em wê bi  $(X) \rightarrow X$  re wê li hev bikin wê werênina ser ziman. Di heta ku ew  $Z$  bibê jî wê, kodemosyonekê  $X, Z \subset X$  wê pêşbixê. Wê di dewama wê de wê, dema ku em wê weke binkomekê bi  $1'$ ê re wê, tevgûharîniya wê werênina ser ziman wê, di dewama wê de wê weke binkomî ji wê bin-gûharîni wê, awayekê denklemê bi rengê  $E = P(N_Z X)$  em wê pêşbixin û bidomênin. Ji aliyê cihêrengiyên geometriyî ve ku em wê bi têtîna  $X \subset P_N$  re wê, di awayekê de wê bi hijmara  $c'yê$  re wê, me bigihênê temenekê wê yê demetî ku em wê bi wê bihizirin yê bi  $\omega_X = \Lambda^1 X T_{VX}$  wê bi xekekê hin bi hin wê werênina ser ziman. Bi têtîna wê re em ku wê bi têtîna qada fezeyî jî wê di dewama wê de wê weke aliyekê wê yê din wê li wê bihizirin û wê, di wê rewşê de wê, kifş bikin em dikarin wê, bi têtîna  $s \in H_0(\omega_{\otimes X})$  wê ji aliyekê din ve jî wê werênina ser ziman. Di alsê xwe de wê, ji vir û pê de wê denklem wê hinekî wê tevlihevî wê di asta jorin de wê pê re wê xwe bide nîşandin. Ber ku wê, têtîna qadê, fahmkirina aliyên weke nûqte, hevrast û koordinatan û hwd wê, di çerçoveyê de wê, di awayekê de wê, mirov dikarê bi berdewamî wê fahmkirina wê pêşbixê. Di aslê xwe de wê, denklem wê di dewqama wê de wê, weke aliyekê din wê di xwe de wê, dîmenê ku wê êdî wê karibê bide me ji aliyekê ve wê hem bi têtîna bi dawî bê û ji aliyê din ve jî wê, di awayekê ku em dikarin wê di aliyê her rewşê de wê pêşbixin wê, xwediyê temenekê têtîni ê bêdawî jî bê wê dîmenekê wê bide me. Di wê rewşê de wê, bidawîbûn û bêdawîbûn wê weke du têtînen ku wê di aslê xwe de wê, di herdû re wê, derbas bibin bin. Mînaq ku wê weke xekek bi rêgez di dewama wê de bi awayekê

denklemî wê  $R(\omega_X) = 0_{n \geq 0} H_0(\omega \otimes X)$  em dikarin wê werênina ser ziman. Ev jî wê, di awayekê de wê, regekê wê yê ku ew di xwe de wê, çawa wê, di wê de wê, bi awayekî minimalî wê bi polinoman wê di xwe de wê pêvajoya kûrbûnê û ankû hûrgilkirinê wê bide çêkirin û pêşxistin wê, di awayekê de wê bide nîşandin û dîyarkirin.

Di mijare têngîna geometriya cebirî de wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê wê yê kûrbûnê wê polinom û fahmkirin û salixkirina di wan de wê, weke aliyekê ku wê di aslê xwe de wê, pirr zêde wê aliyekê fahmkirinê wê bi xwe re wê weke ku wê biafirênê bê. Di wê rewşê de wê, ev wê, di awayekê de wê, di xwe de wê, pêşî wê, têngnek asoyî wê, pêwîstîya wê weke ku wê di awa û regekê de wê bi xwe re wê weke ku wê bide nîşandin. Di dewama wê de wê jî mirov dikarê wê weke aliyekê din ê giring wê werênê ser ziman ku wê mijare fahmkirinê wê, di wê rengê de wê, weke awayekê giring wê xwe bi sehî wê bide nîşandin.

Di rewşa fahmkirina wê de wê, di aslê xwe de wê, di awayekê de wê, dema ku mirov wê bi qada fezeyî re wê dihizirê wê, rengê di awayekê holomorfikî de wê, awayekê funksiyonî wê, bi awayekê qada manifoldî û biriqîna wê re wê, xwe  $\varphi(X) := \text{tr.de. } cR(\omega_X) - 1 \in \{-1, 0, 1, \dots, d = \text{di}X\}$  wê di awayekê de wê, kifşbikê û wê werênê ser ziman.

Di rewşa herîkîna pêvajoya hanîna ser ziman a pêvajoya denklemî de wê deverên ku min weke vala û hwd hiştina wê, pêvajo û şêwayên bi herikina hanîna wê ya li ser ziman de wê, ew wê, weke nûqteyna sehî wê, di wê rewşê de wê, bê gihiştin li wan û ji wan wê çawa wê bê berdewamî çawa wê were domandin wê weke nûqteyna sehî wê, di herîkîna fahmkirinê de wê, hebin. Di wê rewşê de ez, temen, kevî, hevrast, dûzrast û nûqteyên destpêkî bi **holomorfikî û îzomorfikî** dênima ser ziman. Lê di wê rewşê de wê, aliyê din ên ku wê werina ser ziman wê, çendî ku wê, di çerçoveya wê têngîna me ya ku em wê, dihênina ser ziman de wê, weke di çerçoveyek formelî de wê, were ser ziman lê di aslê xwe de wê, bi awayekê afrîner wê, dema ku wê, li ser polinom, afin û fanoyên wan werina hizirkirin û bi cihêrengî û qarakterî werina pêşxistin de wê, ew wê, hingî wê were dîtin.

Em dewam bikin. Minaq em bi awayekê vê rengê dikarin wê bi temenî wê werênina ser ziman.  $X = P_N \subset \text{piştre } \omega_X = O_{P_N}(-N - 1)$ .  $X_k \subset P_N$  anjî  $C$ . bi wê re wê, k weke hipersurfasekê wê, dikarê wê bibînê û bi temenîya wê  $\omega_{X_k} = O_{P_N}(k - N - 1)|_{X_k}$  di dewama wê de wê, ya ku wê di encama wê de wê derkeve li holê wê, ew bê ku wê,  $O_{P_N}(1)$  ya ku wê bi homojenî wê beremberê wê were weke satîrekê bê. Weke koma wê **satîrê** jî wê, bi  $L$  û

O re ku wê weke temen wê hilde û wê, bibê jî wê, awayekê  $P_{NC}(1) \times wê$  weke çerçoveye komî a satîrî wê xwe bide dîyarkirin. Lê ku em di wê de em bi berdewamî em sînoriyekê wê çêbikin jî em bi berdewamî dikarin bi rengê pêşxistina  $X_k \subset P^{Ny,e}$  re wê, çêbikin. Li vir wê, bi hijmare  $c$  re wê, ew bê domandin. Wê jî bi temenekê kokî li ser wê re bi awayê  $c.K \leq N$  ku  $R(\omega_{X_k})$  Di dewama denklêmê de wê, di wê rewşê de wê, aliyekê din ê ku wê, nûqteyên wê yên sehî jî wê di awayekê de wê, hevrasta li wan wê bide nîşandin wê, di awayê wê denklêmî ê weke  $= C \hat{u}$  wek wê  $\varphi(X_k) = -1, k = N + 1$  anjî,  $R(\omega_{X_k}) \sim C[t] \hat{u}$  anjî  $\varphi(X_k) = 0$  vek  $\geq N + 2$  ankû,  $\varphi(X_k) = \dim X_k$  re em, dikarin wê werênina ser ziman. Di aslê xwe de wê, ev wê weke aliyekê wê yê ku em bi wê mantiqê wê di serî de wê, fahmbikin bê. Di wê rewşê de wê, di denklêmê de wê, çerçoveyek xelekî wê, di awayekê de wê, weke ku em dibînin wê were fahmkirin û dîtin. Lê li vir wê, bo ku ew baştirin ev çerçoveye me ya ku me hanî ser ziman were fahmkirin di dewama wê de wê, çerçoveya xelekî bi aliyê xwahriya fanonikî ve wê, bi berdewamî wê werênê ser ziman. Wê hingî wê, di awayekê de wê, weke ku em wê, baştirin wê karibin wê fahmbikin. Di dewama wê de wê jî mirov dikarê wê bi wê rengê wê werênê ser ziman ku wê,  $D = \dim X = 1$  wê demê  $X$  wê weke xwediyê xwahriyekê wê di rewşe  $3' yî$  de bê.  $\varphi(X) = -1$ : û piştê jî  $X \sim P_1$  wê weke di rewşek xwahrî a rasyonâlî de wê bide dîyarkirin. Wê demê di dewama wê de wê, mirov dikarê di çerçoveyekê de wê, di wê rengê de wê, formule bikê weke ku em werênina ser ziman wê, bi awayê  $\Omega_{P_1} \sim O_{P_1}(-2) \hat{u}$  weke wê  $R(\omega_X) \sim C \cdot \varphi(X) = 0$ : Piştê jî di dewama wê de em wê  $\omega_X \sim O_X$  wê werênina ser ziman. Di wê rewşê de wê weke rewşeka teybet ku wê derkeve li holê wê,  $X$  wê, weke eliptik xwahrî (**curve**) bê. Di aslê xwe de wê, di dewama wê de wê aliyê din ê ku em dikarin wê kifşbikin û wê werênina ser ziman wê di rewş û awayekê ku wê li ser rewşek paramatreyî a komî wê weke ku em bi denklema  $x_2 = y(y - 1)(y - s)$  ku em dikarin wê kifşbiikin wê, xwe bide nîşandin. Di wê rewşê de wê, li ser xwahriya  $X$  re wê em dikarin wê bi rengê  $R(\omega_X) \sim C[t]$ , û di dewama wê de  $\varphi(X) = 1$  em dikarin werênina ser ziman. Di wê rewşê de em dikarin bêjin ku  $X$  wê, di rewşek xwahrî a gelemper de wê, xwe bide nîşandin. Di dewama wê de em dikarin wê bêjin ku wê, di awayekê de wê, ku wê bişibihê wê, serrûyên Riemann ku wê bi awayekê weke  $G \geq 2$  were dîtin. Lê di rewşa ya Riemann de wê, di awayekê de wê, di rewşa çêkirina wê bi rewşên weke bikarhanîn hijmarên pozitiv û ji hinek aliyan ve ên negativ ve wê, dîmenekê cûdahî wê, di rewşa li hev hûnandinê de wê bide me. Di wê rewşê de bo rewşek

bi dîmenî a cebirî wê bo  $g \geq 2$  wê mirov dikarê  $3g - 3$  bi komî wê bide nişandin û werênê ser ziman. Di wê rewşê de wê, demê  $d(\omega_X) = 2g - 2 > 0$  werênê ser ziman. Di dewama wê de ku em wê bi rewş bikin emê wê demê  $\otimes X$  bi awayekê ber fireh  $m \geq 3$  û bo wê.  $s_0, \dots, s_N \in H^0(\omega_X^{\otimes m})$ , piştê jî di dewama wê de  $\varphi_m : X \rightarrow \mathbb{P}^N, X \rightarrow [s_0(x) : s_1(x) : \dots : s_N(x)]$  dikarin werênina ser ziman. Êdî di dewama wê de em dikarin werina wê rewşê ku em dawîyek ku em wê, biafirênin wê  $\omega_X \sim \varphi_{*m} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$  û bi teybetî jî  $R(\omega_X)$  wê ev rewşa bidawîyê wê, were derxistin li holê. Di aslê xwe de wê, di wê rewşê de wê, derfeta ku em li ser polinom û afinên wê re dibênin wê, ew bê ku wê, têgîna bidawîyê û ankû her rewşa seknekê û ankû weke cihê seknekê wê, derfetên bi aliyên din û ên cûr bi cûr de jî w temenê pêşxistinê wê, bide çêkirin bê. Di wê rewşê de wê, rewş wê, êdî wê, di wê rengê û mantiqê ku em bi wê dihizirin de wê, ji awayekê geometriyê ê formelî wê derkeve û wê bi awayekê geometriyê ê afrîner wê di dewama wê de wê, xwe di awayekê de wê, bide nîşandin.

Di mijare fahmkirinê li vir em carek din dikarin hinekî li şûn li destpêka li hev hûnandina xwe vegerihin. Di wê rewşê de wê, li vir wê, di aslê xwe de wê pêwîstîya rewşa di heviyekiyekê de wê, li vir ku mirov wê ji gelek aliyên ve wê, karibê wê salixbikê wê hebê. Di aslê xwe de wê, dema ku em li vir weke ku me di destpêka mijarê de bahsa topolojiya zariskî kir li vir em dikarin wê bibîrbikin. Di wê rewşê de wê, Zariskî wê, di rewşa fahmkirina bi 'birasyonâlî (*birational*)' de wê, çawa wê, di rewşek dîmenî de wê, dema ku wê were dîmenê sêyem de wê, rastî rewşek tevlihev wê were wê, bahsa wê bikê. Di aslê xwe de wê, di wê rewşê de weke ku me di paragrafa li ser wê de wê bahsa li seknokan û ankû deverekên ku wê li wê bêhnbestên ku wê, karibê lingên din ên deklemî û hwd bi dahûrî wê pêşbixê wê, li vir wê, mirov dikarê wê bibîrbikê. Di mijare fahmkirinê de wê, ev wê weke aliyekê giring wê xwe bi mijare re wê bide nîşandin ku wê, Di aslê xwe de wê, di rewşa topolojikî de wê, di encamên ku em dikarin li ser dîmenê duyem re bigihijê de wê, çendî ku wê Zariskî wê bi izomorfikî wê werênê ser ziman wê, mirov dikarê wê, werênê ser ziman ku wê, ev wê ne tenê wê wusa bê. Gelek rewşên ku bi morfikî, holomorfikî û hwd re ku mirov wê rastî wê were wê, di wê rewşê de wê, weke aliyên din ên ku mirov wê, dikarê wê bi wê re wê, fahmbikê bê.

Di wê rewşê de wê, dema ku wê Zariskî wê, bahsa hevniirxiyê wê bikê wê, li ser rewşek denklema bi rengê  $\dim X \geq 2$ , wê bahsa wê bikê û wê werênê ser ziman û wê bêjê ku wê ev hevyekî wê ne ji rêzê û ne rewşeka

ne giring bê. Di vir de em dikarin wê mafê bidina têngîna Zariskî. Lê li vir wê mirov dikarê wê, weke aliyekê din wê werênê ser ziman ku wê, ji hemnirxîyê zêdetirî wê, rewşên ku wê derkevin li holê wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê din ê ku mirov wê, dikarê bi izomorfikî fahmbikê. Lê ji aliyê din ve jî wê, rewşa fahmkirina bi têngînî wê, di aslê xwe de wê, karibê me bi ber asoyek din a zêde berfireh de jî bibê. Di wê rewşê de wê, têngîna bi dawîyîyê em çî ji wê fahmdikin û çawa wê bi temen dikin û ankû wê pênasedikin wê, di aslê xwe de wê, weke aliyekê din ê giring bê ku mirov wê, li ser wê bisekinê bê. Di wê rewşê de wê dema ku em bahsa  $\geq 3$  dîmenê sêyem bikin wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê din ê giring wê, ev wê, xwe di awayekê de wê, bi awayekê zêdetirî wê, tevlihevî wê, karibê bide nîşandin. Li vir wê di awayekê de wê, bi têngîneka ku wê bi çerçoveya hevkeyîyê re wê navendên seknonek ku wê werina çêkirin wê, di wê rewşê de wê, bi sehî wê, çendî ku wê werina dîtî jî lê wê di awayekê de wê, weke ku wê li ser dîmenê duyem re wê weke ku wê ne bê temen bê. Xosleta bi fahmkirina têngîna birasyonalityê jî wê ji aliyekê ve wê, di wê rengê de wê, xwe di awayekê de wê, bide nîşandin. Di dîmenê duyem de wê,  $X$  wê, dîtbarîya wê ya sehî wê bi wê re wê, weke ku wê hinekî wê hesan bê ku wê, were dîtî ku wê, cihêrengîyên wê, werina dîtî. Lê di dîmenê sêyem de wê, di aslê xwe de wê, ew jî wê, di awayekê de wê, dema ku mirov li têngîna wê ya sehî serwer bê wê, mirov karibê wê, fahmbikê. Minaq weke  $\pi_1(X) \sim \pi_1(X)$  ve  $R(\omega_X) \sim R(\omega_X)$ . Lê ji aliyekê din ve jî wê mirov dikarê wê di dewama wê de wê bi wê werênê ser ziman ku wê, rewşên weke  $b_2(X) = b_2(X)$  wê mirov rastî wan wê were. Ev rewş wê, ne rewşna ku wê ji xwe re wê derkevina li holê bin. Lê fahmkirina wan rewşan wê, di wê rewşê de wê, weke ku mirov di dîmenê çarem de dikarê bikê wê, lingekê fahmkirina denklema wê bi xwe re wê, bi dîmenî li ser dîmenê re wê biafirênên ku mirov wê bi teybetî fahmbikê.

Di aslê xwe de wê, di wê rewşê de wê, rewşa dîmeniyê wê li ya ya heyî re wê, bi geometrikî wê hertimî wê derfeta zêdetirî pêşxistina wê hebê. Di wê rewşê de wê, ev wê, weke aliyekê wê yê ku em dikarin wê re heta ku em dikarin herin û ji devere ku em nikarin ji wê wirdetir jî wê bi berdewamî wê dîmen û pêşketin û ankû pêşxistina wan wê di awayekê de wê, hebê. Di rewşa têngîna dîmenî de wê, di wê rewşê de wê, di wê rewşê de wê, dema ku em bi wê bihizirin li rewşa fezeyê û nefezeyê wê di wê rewşê de wê, di awayekê de wê, bi wê bihizirê. Di bûjenekê û rewşek fîzîkî de jî wê, bi heman rengê wê bi wê rengê wê, derfeta wê fahmkirinê

wê hebê. Di wê rewşê de wê mijare têngîna dîmeniyê wê, di aslê xwe de wê, weke aliyekê din ê ku wê, di roja me de wê, weke mijareka giring a geometriyê û pêşketina wê bi temenî bê.

Di rewşa têngîna geometriya cebirî de wê, bi cebirê re wê, dîmenê sêyem û fahmkirina wê, weke aliyekê din wê xwe bide nîşandin. Morî wê, li ser li ser nirxîya wê, û fahmkirina hevuyekiyên wê de wê hinekî wê, werênê ser ziman. Wê piştê wê, mijare têngîna minîmal'ê wê, çerçoveya wê, weke ku wê, were dîtin wê ji aliyê Kawamata, Kollár, Mori, Reid, Shokhuro, Bîrkar û hwd ve wê, were pêşxistin. Di wê rewşê de wê, pêşketinên ku wê, di wê de wê bibê, wê di aslê xwe de wê, weke aliyekê geometriya cebirî a hemdem wê, di wê rewşê de nîşandin. Bîrkar wê, li lêkolînên xwe yên ku ew bi alikarî dikê re wê, bigihijê têngîna ku  $X$  weke çerçoveyek awayî a projektif a a cihêrengî bê wê, bi kanonikî jî wê, çawa  $R(\omega_X)$  çerçoveyek bidawî wê bi wê biafirê wê, kifşbikin. Li gorî wê ku  $X$  wê, weke di çerçoveyek giştî de awayek bê wê demê ( $\varphi(X) = \dim X$ ) wê weke rêgeza  $X'$  ê jî wê weke modelê  $X_{\text{can}}$  û weke **modela minimûn** wê  $X_m$ . Wê weke modela kanonikî jî wê,  $X_c := \text{Proj}(R(\omega_X))$  ku wê bi rêgezî ê bijartî wê, bide nîşandin. Di  $X'$  ê û hevuyekiya wê de ku wê, xelek bidawî wê bi wê biafirê  $R(\omega_X)$  wê weke aliyekê wê yê ku wê, di wê hevuyekiyê de wê, were ser ziman.  $X'$  wê, di awayekê de wê, tekanê bê. Ev jî wê weke bi têngînek kanonikî wê, dide hanîn li ser ziman. Lê wê, bi awayekê weke ku wê, were dîtin wê bi **kolomolojikî** wê, di awayekê de wê, aliyê sivik jî wê karibê bide afirandin. Minaq  $H_i(O_X) \sim 0 \leq i \leq \dim X$  bo wê jî wê  $H_i(O_X)$  Di awayekê rêgezî de wê, dema ku em mijarê wê hildina li dest wê, mirov dikarê di dewama wê de wê, werênê ser ziman ku wê, weke komekê  $Q$ -xêz(line) ê wê, bide çêkirin û ev jî wê, di awayekê de wê, taqabûlî rewşa  $\omega$  û di dewama wê de wê, mirov dikarê weke kom-satîrekê  $n > 0$  bê. Di dewama wê de em dikarin wê bi wê rengê wê bi awayekê  $\omega_{X_b}$  ku wê bi têngînek firehî were nîşandin, bi wê yekê  $\omega_{\otimes X} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_{X_b}$ ,  $m > 0$  bê. Di aslê xwe de wê, ev di dewama wê, wê ne tenê wê weke aliyekê ku wê bi ber kifşkirina fahmkirinên projektifi ve wê bide birin bê. Wê di dewama wê de wê, weke aliyekê din jî wê, di warê **modul û fanonikên polerizeyî** jî wê bi wan re wê, temenekê fahmkirinê wê biafirênê.

Em ku di dewama wê de wê bi wê bihizirin em dikarin wê bi wê re wê, werênina ser ziman ku em di çerçoveya dîmenekê sabît de ku em bikin ku em bihizirin emê çerçoveya wê  $d = \dim X$  ku em bidina nîşandin wê bi mazinahiya wê re jî bi rengê  $v = c_1(\omega_{X,d})$  ku em wê werênina ser ziman wê demê emê bibînin ku wê bi awayekê li ser fahmkirina paramatrezasyonên

wê re wê li ser çerçoveya ku wê, dîmen bi d'yê û mazinahi bi v'yê wê were ser ziman wê awayekê bi xwe re wê bide nîşandin. Wê demê em wê rewşa wê ya bi rêgezî wê li vir wê bibîrbixin û wê bi temen û çerçoveyek weke  $0 \leq \varphi(X) \leq \dim X - 1$  em dikarin wê werênina ser ziman. Di wê rewşa fahmkirinê de wê,  $X'$  ku wê weke bi awayekê hesanî wê mirov dikarê wê werênê ser ziman wê bi awayekê minimalî wê bi  $X_{dk}$  wê bi wê werênê ser ziman. Di wê rewşê de wê bo cûdahiya wê ya ku em li ser wê re wê, aliyekê xwahrî wê werênina ser ziman wê,  $C_1(\omega_{X_{dk}})$  wê werênina ser ziman. Di dewama wê de rewşa xwahriyê bi rengê di dewama wê de wê  $C \geq 0$   $C \subset X_{dk}$  wê werênina ser ziman. Di rewşa fahmkirina rewşa xwahriyê de wê, dema ku mirov wê li wê bihizirê wê, di aslê xwe de wê, di rewşa  $X'$ ê de wê, di awayekê asayî de wê bide nîşandin. Di wê rewşê de wê, weke aliyekê wê yê ku wê di nava geometriya cebirî de wê, mijare xwahriyên pozitiv( $\omega_X$ ) û negativ( $\omega_X$ ) li ser wan bisekinê. Di wê rewşê de wê, di wê rewşê de wê, mijare bi hevdû re fahmkirina wan wê, weke aliyekê din ê ku wê serî li wan wê were wastandin bê.

Di geometriya cebirî de wê, weke aliyekê wê yê giring wê, rewşa fahmkirina modelên minimal bê. Wê, di wê rewşê de wê, ev wê weke aliyekê din ê ku wê ne tenê wê temenê kûrbûnê wê bi wê re wê bide çêkirin wê, di dewama wê de wê, weke aliyekê wê yê ku wê di qatagorizekirin û cihêrengikiriya wê de jî wê temenekê pêşxistin û fahmkirinê wê bide çêkirin. Di wê rewşê de wê jî wê mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê, di rewşa wê de wê, ev jî wê weke aliyekê wê yê giring ku mirov wê, werênê ser ziman. Wê, di temenê kifşkirina wan modelên minamalî de wê, hebûna flipsan wê, di wê rewşê de wê heta wê demê wê weke aliyekê wê were ser ziman. Lê di wê rewşê de wê, pêşxistina ku wê Birkar wê bikê wê, di rewşa bi temenekê fahmkirinê wê, çawa wê, were hildan li dest wê, di wê rengê de wê, weke aliyekê wê yê giring wê biafirênê bê. Di aslê xwe de wê, dema ku ez li wê têgîna modelên minimal li wê dihizirim wê, di awayekê de wê, dema ku ez li ziman dihizirim û bi kirde, wate û ji hevdû derxistin û di dewama wê, ji hevdû afirîneriya ku wê, were dîtin wê, di awayekê de wê, weke aliyekê wê, di mejiyê min de wê biafirênê. Ber vê yekê wê, ev modela minimalî wê, di awayekê de wê bale min bikişênê. Lê dema ku ez li wê hizirim min ew jî wê bi wê re kifşkir ku wê çawa wê weke aliyekê giring ê fahmkirinê ê di wê temenê de wê, biafirênê min, ew jî bi wê re wê, kifşkir.

Têgîna pîvanvanîyî a flipsî wê, di wê rewşê de wê, dema ku mirov li wê dihizirê wê, weke aliyekê wê yê ku mirov wê bi wê re wê bibînê wê, rewş û rengê bi awayekê rêzînên dîyarî wê, di wê rewşê de wê, çawa wê werina fahmkirin ji aliyê minîmalî ve wê, ew wê, ji aliyekê ve wê, bikê ku wê werênê ser ziman. X wê, di aslê xwe de wê, di wê rewşê de ku em bi wê modelê re wê li wê dihizirin wê, weke aliyekê giring wê bi ciherengiyên wê biafirênê. Di dewama wê de ku em wê weke modelekê wê hildina li dest em dibê ku wê, bi dewama  $X_{dk}$  em dikarin wê werênina ser ziman. Di her demê de wê, yên tekî wê weke ciherengiyêna xwahriyên rasyonâlî wê bi xwe re wê, bi ciherengî wê biafirênin. Di encamaka weke  $H_0(\omega \otimes P_1) = 0$  hemû  $m > 0$  bo  $0$ , X wê, bi hesanî wê, di awayekê de wê mirov ji aliyekê ve wê karibê wê bişopênê bê. Piştê ku em di dewama wê de wê, li ser tekitîyê re wê, bidomênin em dikarin wê, bi awayekê weke  $H_0(\omega \otimes X) = \text{hemû } m > 0 \text{ bo } 0$ . Ev jî wê weke aliyekê din ê dîyar ku em dikarin wê bi wê re wê ji aliyê wê ve wê fahmbikin bin. Di rewşa  $X'ê$  de wê, di aslê xwe de wê, weke modelê ku em di wê de wê, ciherengiyên werênina ser ziman wê, di dewama wê de wê ji aliyê wê ve bi awayê  $H_0(\omega)$  piştê ku wê bi awayekê tekî bi biriqênê  $\otimes X) = 0$  û ji aliyê wê ve wê bo wê jî  $m \in \mathbb{N}$  em dikarin wê di awayekê de wê, fahmbikin û wê werênina ser ziman. Di wê rewşê de wê, dema ku mirov wê, di nerê wê, di awayekê de wê, di awayekê weke temenekê tekî wê, di wê de wê, xwe di awayekê de wê weke ku wê bide nîşandin. Di dewama wê de wê, weke aliyekê wê yê din ê giring wê di dewama wê de wê mirov dikarê wê, wer ziman ku wê, ev temen wê ji aliyekê din ve jî wê, Mori wê, bi teoremek fezeyî wê, ji aliyekê din ve jî wê bixwezê ku ew wê, werênê ser ziman. Di wê rewşê de wê, di dewama wê de wê, di çerçoveya wê modela minimalî de wê, ku em weke  $X'ê$  weke tekîtiyek ciherengî wê herê bikin û wê di dewama wê de flipan weke rêzîna bi dawî li wê bihizirin. Wê, di wê rewşê de wê, kinbûnê  $X'ê$  wê di awayekê de wê, weke ku mirov wê, dikarê wê, werênê ser ziman wê, di awayekê de wê, X, wê, bi awayekê morfismî wê derfeta pêşxistina  $f : X \rightarrow Z$  wê bide me. Em di dewama wê de ku em, heka wê di awayekê modelî wê bikin bi morfîkî wê fahmbikin em dikarin wê bi wê rengê wê, di awayekê de wê bidomênin. Wê, di wê rewşê de wê,  $\dim X > \dim Z$ ,  $\varphi(X/Z)=1$ ,  $c_1(\omega_X) \cdot C < 0$  û hema di dewama wê de wê, bi lifek f ku mirov di wê de xwahriya  $C'yê$  ku wê kifş dikê wê, di awayekê de wê, weke awayekê ku em, pêşî li wê bihizirin bê. Di aslê xwe de wê, di têgîna Morî de wê, weke qadak **fiberî** wê,  $f : X \rightarrow Z$  lê ev çendê ku ew di wê rewşa çerçoveya têgîna minimalî a Birkar de wê, were ser ziman de wê, di



awayekê funksiyonî û pêvajoya herîkîna wê fahmkirina wê de wê, ne tenê bi nuansî wê bi awayna din ê pêşxistinê jî wê, weke ku wê, şêwayekê din ê gûharînê wê bi xwe re wê, bide nîşandin. Ev jî wê, di qadên weke yên  $F$  de ku wê, bi lifên  $F'$  yê re terminaliya ciherengiyên fanoiyî de wê, xwe bide nîşandin. Minaq wê di awayê weke ku ew baş dihê zanîn de ku em wê şêwayê ciherengiyên fanonikî de wê, em li wê bihizirin wê, demê em li ser awayê wê yê ku ew baş dihê zanîn em ji wê li wê bidest hizirkirinê bikin. Em minaq ku pêşî bi wê rengê wê  $\omega_{-1F}$  bi weke komek  $Q'$  yê wê bihizirin wê, di wê de wê, nirxên wê, mirov divê ku wê li wê bihizirê  $\pi_1(F) = 0$  em dikarin wê werênina ser ziman. Lê em li vir weke hûrgilek piçûk lê pirr zêde giring wê bînin ser ziman ku wê,  $\pi_1$  li ser bingihê  $\pi$  re wê, hertimî wê, derfetê zêdetirî wê, di wê de wê, bi awayekê kifşkirin û pêşxistina wê bi temenî wê, bi derfet bê. Ev wê, weke aliyekê wê yê giring ê ku em wê, di serî de wê, weke aliyekê giring wê, dikarê wê werênê ser ziman bê. Li vir wê, têgîna nirxa  $\pi$  wê, di rewşên wê de wê, weke aliyekê giring wê xwe bide nîşandin. Her kevîrê fanonikî wê, di weke kevîrên bingihînî wê xwediyê weynna giring bin. Wê di çerçoveya fahmkirina têgîna geometriya cebirî de jî wê, weynên giring wê, di wê temenê de wê bileyizin. Di rewşa gihiştina têgîna bidawî a di geometriya cebirî de wê, di aslê xwe de wê ji aliyekê ve wê weke ku em dikarin wê werênina ser ziman wê, ev fanonik wê kevîrên wê biafirênin. Di wê rewşê de wê, di dewma wê de wê, weke aliyekê wê yê din jî wê, di wê rewşê de wê, werênê ser ziman ku wê, di rengê 'metrîkên einstein' de jî mirov dikarê di awayekê de werênê ser ziman.

Di aslê xwe de mirov dikarê wê ji aliyê têgîna cebirî a geometriyî ve aliyekê din li ser vê aliyê ku me li paragrafa li ser wê re hanî li ser ziman wê li vir li bin wê li ser wê bisekinê. Ew jî wê, di wê rewşê de wê, rewşa tekîtîyan bê. Di wê rewşê de wê, dema ku mirov wê li dûv hevdû wê, bi awayekê weke  $\epsilon$  li dûv hevdû rêzbikê wê, karibê bi têgînek bidawîyî re bi encam bibê? Di wê rewşê de wê, di aslê xwe de wê, li dûv hevdû rêzîkirina  $\epsilon$  **yan wê**, di awayekê de wê karibê wê, werênê ser ziman wê, di wê rewşê de wê, mirov dikarê wê li ser wê bisekinê. Di dema ku wê, li ser dîmenê duyem re wê, hinekî wê werênê ser ziman wê, di awayekê de wê, weke komên temenî weke ser  $10'$  an re bin. Lê li vir wê, ev tenê wê weke yên ku ew bi awayekê salixkirî hatina kifşkirin bin. Lê dema ku wê, bûhûrîna li dîmenê sêyem wê bibê wê, bi wê re wê, were dîtîna ku wê, ev wê zêdetir bibê û wê li **şûna 10an wê, heta ser 100î** re wê di awayekê de wê bi hesanî dikarê wê kifşbikê. Ev wê çendî ku wê dîmen wê zêdetir

bibin wê, di wê de wê, di awayekê dahûrîya dîmenan jî di asta bilind wê, her yekê herî hindik bi dû awayan wê bi wê rengê wê, were şîrovekirin dakû were fahmkirin. Her dîmen wê, di wê rewşê de wê, rêjeja zêdebûnê wê, di awayek aritmatîkî de wê, bi xwe re wê, zêde bikê. Bi gotineka din wê, di wê rewşê de wê, di alsê xwe de wê, ev rengê zêdebûnê wê, weke awayekê girêdayî hebûna dîmenê û çendîya wê bê. Zanîna me wê bigihijê wê astê ku em rojekê heta dîmenê 100 û ankû hê ji wir wirdetirî wê dahûrbikin û ji wir jî wirdetir herin? Ev aliyekê ku wê, sînorê wê nebê. Wê seknonekên wê hebin. Seknonek wê di rewşên weke yên bi dawîyî û sînorî ku em î ro li wê dihizirin wê, di wê temenê de bê. Ev jî wê weke temenna fahmkirinê ên di gelek rewşan de ên baştirîn jî bin. Lê wê di kîjan rewşan de wê, pêwîstîya li wan sekinînê û di kîjan rewşê de wê, bûhûrînê wê pêwîst bê ku mirov wê bikê jî wê weke aliyekê din ê ku mirov wê, ji aliyekê din ve wê, bi dahûrîya geometrikî bikê mijare **fahmkirinê** bê. Di wê rewşê de wê, di dewama wê de wê li ser yên ku ew hatina kifşkirin jî wê, di wê rewşê de wê, karîna kifşkirinê were pêşxistin. Di wê rewşê de wê, pîrsgirêka fahmkirina bi têgînek bidawîyî wê, di aslê xwe de wê, di wê mijarê de wê, hertimî wê ji dema cantor ve wê, bi matematîkê û piştê bi geometriyê re wê, were dîtî ku wê serî li ser wê were were wastandin. Hewldanên di geometriyê de wê, di awayekê de wê, bi sînoriyê û ankû bidawîtiyê wê bi wê re wê bê pêşxistin wê, bi Nadel, Campana, Kollár, Mori, Miyaok û hwd re wê, di awayekê de wê, xwe bide nîşandin. Lê yên ku wan pêşxistina wê, di awayekê de wê, ji têgîna bi sînorî û ankû bidawîyî zêdetirî wê weke têgînek seknonek bê. Lê her seknonek wê, di awayekê de domandinên wê jî wê hebin. Di dewama wê de wê, di wê rengê de wê, weke aliyekê li ser fanonikan re wê, bi sînorkirinê wê hewldanên wê yên ku wê, werina kirin wê, di awayekê de wê, bi gelemperî wê weke ku mirov wê dibîne wê, di awayê  $\epsilon > 0$  **wê**, di awayekê de wê, were nîşandin. Lê li vir wê, di wê rewşê de wê, di rewşa ku ez li wê dihizirim wê, di wê rewşê de wê, weke hinek nûqtayên navberî di nava encama bi sinoriyê a bi  $\epsilon > 0$  **wê** dibinim. Wê demê ku em bi rengê  $\epsilon > 0$  **re wê** pêşbixê mirov wê di encamê de wê, bigihijê encamak çawa? Di aslê xwe de wê, di dewama wê de wê, di wê rewşê de wê, ya ku mirov wê, bibîne wê, di wê rewşê de wê, întûbaya ku wê di serî de wê bide me wê weke ku wê, ji rê bi derketinê re xwe gihandina şêwayekê bi wê rengê wê, dibê. Metrikên Einstein jî wê hinekî di wê rengê de wê dîmenekê wê bidina me. Têgîna xişiqînê wê, di wê rewşê de wê, di awayekê de wê, têgînekê wê bide me.

Di aslê xwe de wê, dema ku em li ser têngîna komê di geometriyê de wê li wê bihizirê, wê di wê rewşê de wê, ji gelek aliyan ve wê, pêwîstîya fahmkirina wê, derkeve li hemberî me. Wê ev bi serê xwe wê, weke mijare wê, karibê were hildan li dest. Lê li vir em di dewama mijarê de li ser têngîna koma girtî re wê, di awayekê de wê, dikarin wê di çerçoveya têngîna koma bi sînor re wê, di awayekê de wê bi wê bihizirin.

Di wê rewşê de wê, mirov dikarê wê weke aliyekê din wê, di dewama wê de wê bi wê bihizirê ku wê têngîna a girtî bi gotinek hesanî wê mirov dikarê wê, di wê rengê de wê, werênê ser ziman ku wê, weke aliyekê bi sînorkirî û weke vajî ya vekirî û ankû weke komek wekhev di awayekê de wê, di awayekê de wê werênê ser ziman. Di geometriyê de wê, di awayekê de wê, weke awayên ne hişk ku wê di awayekê de wê, weke ku wê, bi wê re wê, ku ew dikarin bi tawihin û ne gûharîner wê, di awayekê de wê, bi xwe re wê, werênê ser ziman. Wê, di wê rewşê de wê, di awayekê de wê, bi têngînek weke kîjan afîn wê kîjanê ve wê girêdayî bê wê, di awayekê de wê, bi wê re wê, werênê ser ziman. Minaq ku em bi têngîna matematikî wê, di awayekê de wê, bi nava geometriyê wê, werênina ser ziman wê, weke Koa  $X'$  ku wê beremberê bo wê binkomên ku ew weke minaq binkoma  $\mathbb{F}$  wê, di dewama wê de ku wê binkoma  $\mathbb{F}$  ku wê bi wê re gihê hevdû wê, dîsa binkomek  $\mathbb{F}$  bê. Wê, di nava binkoma  $\mathbb{F}$  wê, di awayekê de wê,  $\mathbb{F} \cap \mathbb{F}$  bê. Di wê rewşê de wê, ev wê, weke ya ku wê temem dikê wê, di awayekê de wê, bi wê re wê, werênê li holê wê, di awayekê de wê, bide nîşandin. Di wê rewşê de wê, dema ku em di dewama wê de wê, rewşa afînê wê hildina li dest wê, di fezeyê de wê, weke ku wê, beremberê afînê û gûharîna wê, ew wê, levkirinîya wê ( $\cap$ ) bê. Di wê rewşê de wê, dema ku wê, di encama gûharînek afînî de wê, hevrastek bi xêzî wê piştî wê jî wê weke ku wê hevrast bimênê wê weke ku wê, têngînekê wê bide me. Em wê, dikarin wê bi çerçoveyek fahmkirina afînî bi wê rengê wê, dikarin wê li wê bihizirin. Em wusa hizirbikin ku wê bo afîna fezeyî wê,  $X$  û  $Y$  bo afîne fezeyî wê,  $f: X \rightarrow Y$  weke awayekê wê bê. Lê di wê rewşê de ku em, bi darêjkî wê, bikin ku wê werênina ser ziman wê, weke  $x \leftrightarrow Mx + b$  re wê, xwe di awayekê de wê, bide nîşandin. Di wê rewşê de wê, mirov dikarê wê, werênê ser ziman ku wê, di wê rewşê de wê,  $x < q'$ ê, di aslê xwe de wê, di awayekê de wê, mirov dikarê wê, hem di têngînek berdewamî de wê, li nûqteyekê wê fahmbikê û hem jî wê, weke li wê hatî pêşxistin wê dikarê wê fahmbikê. Lê di wê rewşê de wê, ev wê, weke aliyekê wê yê din wê, çendî ku wê, di wê rewşê de wê, bi binkomên wê re wê, di wê rewşê de wê, bibê jî lê wê

ji ya ... →  $Mx + b$  zêdetirî wê, sînoriyek wê li xwe weke vegehihê û hwd re wê, di wê de wê, ji şûn ve wê hebê. Her tişta ku ew ji şûn ve ew têgîna bi sînori wê hebê wê, ew wê, di heviyekiyekê de wê, bi fahmkirna wê re wê, di pêşîya wê de jî wê, ew wê, karibê bi wê rengê ew wê were pêşxistin. Yanî bi gotineka din wê mirov dikarê wê, werênê ser ziman ku wê, di mijare fahmkirina wê de wê, weke aliyekê wê yê din jî wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê giring wê, mirov dikarê wê, werênê ser ziman. Weki din wê dema ku wê  $x$  wê, weke vektorekê wê, di fezeyê  $X$  de wê werênê ser ziman wê, di wê rewşê de wê, ev vektor wê, di wê de wê, referansên wê yên hevrasta  $M'$  yê ku ew nebin wê, di wê de wê, çawa wê, karibê ew were fahmkirin? Di fezeyê de wê, gûharînen hevrastî wê, ji aliyekê ve wê weke pêwîstîya parastina nûqtaya wê ya  $O'$  wê hebê. Lê nûqte bo afînê dikarin nebina nûqtaya  $O'$  wê. Ber ku wê, devera ku ew ji wê destpê dikê wê, ne destpêka wê ya ku ew bûyî bê. Lê ji wê nûqtayê gihîştina encamê wê di serî de wê, ew nûqta bi referans û koordinatên wê re wê, çî pêşxistinê bi hevrastî wê bide dîyarkirin wê, hinekî wê bi wê ve girêdayî bê. Di wê çerçoveyê de wê, her afîn wê, beremberê rewşek hevrastî ku mirov wê, beremberê wê kifşbikê wê, karibê were dîtin. Di geometriya auklidyanê de wê, her afîn wê bi fezeyî wê were hizirkirin. Lê wê, di wê rewşê de wê, di awayekê de wê, çendî ku wê weke afîn di koordinatan de û koordinat jî wê di fezeyê de wê, werina dîtin lê wê, dema ku wê, Kartezyanî wê, şîroveyên xwe yên li ser wê bikin wê, di awayekê de wê, weke ku wê xwe di koordinatan de wê, werênê ser ziman wê, dîmenekê wê bide nîşandin. Bi afînekê wê, her koordinat wê, derketina wê, bi hevrastên wê yên fonksiyonî re wê, bi koordinatî wê were fahmkirin. Di rewşa afînî de wê, her gûharîni wê, bi hevrastîya wê re wê, di heviyekiyekê de bê. Wê, tahfîna wê hê li jêrtir wê, bi wê re wê, xwe bide **nîşandin**. Di wê rewşê de wê, ev bo afînê jî wê wusa bê? Di wê rewşê de wê, dema ku wê, bo hevrastîya pêwîstîya parastina nûqtayê wê hebê. Bi awayekê meşandina mantiqê wê re wê, weke ku wê afîn wê, weke vektorekê wê, li wê, bê. Ev jî wê, di awayekê de wê, weke ku wê karibê bibê xwediyê nûqtayek sifirê ku ew wê biparêzê. Di wê rewşê de wê, di wê rengê de wê, di wê rewşê de wê, di wê rewşê de wê, ev wê, di awayek de wê, weke aliyekê giring wê, xwe di awayekê de wê, bide nîşandin. Minaq wê, dema ku em ji mantiqê naqşayekê gavê biavêjin em dikarin wê bêjin ku wê, koordinatên wê, wê, fonksiyonên wê yên hevrastî bin. Wê, di wê rewşê de wê, ew jî wê, her afîn wê weke ku wê,

beremberê gûharênek bi ber rastbûnekê re wê di heviyekiyekê de wê, renekê fahmkirinê wê bi xwe re wê bide me.

Di wê rewşê de em dikarin hebûna afînê û wergûherînên wê, bi denklemlî wê werênina ser ziman. Di wê rewşê de em, dikarin bi wê re weke nûqteyên  $x = (x, y)$  li berçav bigirin. Wê demê vegûharînên  $X'$  em dema ku wê, werênina ser ziman wê, di awayekê de wê, dikarin bi awayekê weke  $x = [ax + by + c \ dx + ey + f]$  wê, weke aliyekê wê, werênina ser ziman. Di rewşa wê denklemlî de wê 'skalayên' a û  $f'yê$  wê di awayekê de wê hebin ku mirov werênê ser ziman. Minaq em dikarin bi awayê  $a, e = 1$  û  $b, d = 0$  wê, werênina ser ziman. Di dewama wê de wê awayekê wergerîna ku wê,  $x = [x + cy + f]$  wê werê dîtin. Em di farqê de na ku em bi hinek hijmaran weke ji nedîtî ve dihên. Ev jî wê ji aliyekê din ve wê, di encama fahmkirina denklemlî de wê bi wê re wê, weke şaqna ku wê, di wê rewşê de wê li ser wê re wê ew afîn wê, bi wê re wê, werina pêşxistin û wê bi wê re wê, temenekê pêdeçûyinê wê, çêbikê wê bi wê armancê bê. Di wê rewşê de wê, dema ku wê hinekî bi baldarî wê denklemlî me wê werina şopandin wê, di dewama wê de wê, were dîtin ku wê, bi  $B, d = 0$  û  $c, f = 0$  re wê hinek pîvanên me wê, li gorî wê ku ew wê, wergerîna wê, hin bi hin wê rengê wê bidina çêkirin wê bi wan re wê, xwe bidina dîyarkirin. Di wê rewşê de wê, weke 'ogeyê' me ya cihêreng wê  $X'$  bê û em wê, di wê rewşê de wê, di dewama wê de wê bi wê wergerîna wê bi wê rengê  $x = (b, y)$  re dikarin bi fahmbikin. Di aslê xwe de wê, dema ku em ji aliyê  $X'$  ve wê, li wê bihizirin wê, demê em dikarin wê, di awayê de wê, bi wê rengê de wê, dema ku em bi awayekê vegûharînê û birrînê ku em li wê bihizirin em dikarin wê, di wê rewşê de bi  $X = [x + y + dz]$  wê, binivîsnin. Di wê rewşê de wê, di aslê xwe de wê, rewşa ku em wê bi birrînê wê, werênina ser ziman em dikarin di awayekê de wê,  $a, e = 1$  û  $c, f = 0$  re wê, dikarin wê di wê rewşê de wê, di wê rewşê de wê, werênê ser ziman. Lê li vir wê rewşê de wê, 0 wê çendî ku wê, karibê, weke nûqteyek birrînê wê hilde li dest? Di mantiqê gelemperî ê serrû û klasik de wê di wê rewşê de wê, bi gihina li wê re wê, weke ku wê ew wê bibê. Lê di wê rewşê em dikarin wê hinekî li vir wê, li wê bihizirin.

Di asla xwe de wê, her afîn ku em li wê bihizirin wê, di wê rewşê de wê, di serî de wê, weke aliyekê giring wê, didewama wê mirov dikarê wê, werênê ser ziman ku wê weke aliyê kifşkirinê wê, di wê rewşê de wê, bide çêkirin. Di rewşa fahmkirina minaq du afînan li fezeyê de wê, hevraştîya wê ya ku wê, were kifşkirin wê,  $f: A \rightarrow B$  re wê, were nîşandin. Di wê rewşê de wê, di wê rewşê de wê, ev wê, weke awayekê

wê yê ku weke ku me li jor bi afînî hanî li ser ziman ew di çerçoveya têtînek minimalî de me hanîbû ser ziman. Li vir rewşa afînê bi xwe wê weke aliyekê ku mirov wê, bi wê bihizirê bê. Bi wê rengê wê hevrastiya wê, dikarin wê werênina ser ziman.  $P : Q \in A'yê$  re wê, dikarê wê werênê ser ziman. An jî wê, di wê çerçoveya têtîna hevrastî wê, di wê rengê de wê bi rengê  $f(Q) - f(P) = \varphi \rightarrow (PQ)$  re wê werênina ser ziman. Li vir di aslê xwe de wê, ev wê, di wê rewşê de wê, di wê hevrastê de me bi  $\varphi$  re wê, vegûharînek di wê rêka wê de wê da çêkirin. Yanî bi gotineka din me bi wê re ew vegûharîn bi wê re wê, çêkir. Li ser wê re wê, demê wê hinek rewşên ku em hilbijêrên wê di wê rewşê de wê bibin. Ev jî wê di wê rengê de em, dikarin wê werênina ser ziman weke  $O \in A$  ku wê bijartinek wê bibê wê demê em ya li berçav wê, B bê. Bi wê re em dikarin wê,  $f(O) \in B$  wê, werênê ser ziman. Lê di wê rewşê de wê, ev jî wê, ji aliyekê din ve jî weke vektorekê x wê, dîyar bê. Ku em bi rewşa vektorê re wê, fahmbikin û ankû bi denklema wê bidina nîşandin wê, di wê rewşê de wê, hingî wê, di awayekê de wê, weke ku em dikarin wê werênina ser ziman wê,  $f : (O + \rightarrow x) \rightarrow (B + \varphi(x))$  Li vir ku em weke ya dîyarî  $O \in B$  bê û ew were bijartin wê demê wê di çerçoveya vegûharîna afînê de wê, jevbûn wê, bibê û di awayekê de ku wê, bi dîmenê B wê bi rengê  $j(O) \in B$  bê wê demê wê wê, kifşkirina vektorê x wê, bi rengê  $g : (O + \rightarrow x) \rightarrow (O' + \varphi(\rightarrow x))$  re wê, wê  $g : A \rightarrow B$  wê bi ber  $O \rightarrow O'$  re wê bide dîyarkirin. Ev wê weke aliyekê wê yê ku mirov wê bi wê re wê, bide kifşkirin bê. Tabî di dewama wê de wê, dema ku em wê weke malbatekê wê, di wê rewşê de wê, werênina ser ziman wê, di wê rewşê de wê, di heman qadê de ku wê heman afîn wê, bi funksiyonekê binişê re wê, mirov dikarê wê, bi wê re wê, bi rengê  $A \hat{=} B$  wê  $f : A \rightarrow B$  re wê, şandek afînê wê werênê ser ziman. Di wê rewşê de wê, bi rewşek malbatî wê a wê, weke rewşek giranî wê di rewşê de wê biafirênê. Di wê rewşê de wê, jî em dikarin bi rengê  $\{(a_i, A_i)\}_{i \in I}$  A re wê, di awayekê de wê, bi temenî wê dikaroin werênina ser ziman. di çerçoveyek denklema ku em bi giraniya  $A'yê$  wê werênina ser ziman wê, di wê rengê de wê, bi awayê weke  $\sum \lambda_i = 1, i \in I$  em dikarin wê werênina ser ziman. Ku em li ser barycenter'ên  $f'yê$  re wê, hildina li dest em dikarin wê bi awayekê weke  $f(\sum \lambda_i a_i, i \in I) = \sum \lambda_i f(a_i), i \in I$  wê werênina ser ziman. Di wê rengê de wê, ev wê, weke aliyekê wê yê ku em bi gotin bikin bê. Di wê rewşê de wê, di awayekê ku em bi wê bidawî û bi dîmenî wê fahmbikin wê, di awayekê de wê, dîmenekê wê bi wê re

wê, bide me. Em dikarin wê jî di dewama wê de wê, werênina ser ziman ku wê, ev wê weke aliyekê din di rewşa li hev çarpkirina metrisan jî wê di awayekê de wê, weke aliyekê temenî wê, di wê rewşê de wê, ji aliyekê ve wê, bi xwe re wê, bi xwezayî wê, weke ku wê biafirênê. Bo wê û nîşandina wê jî wê, vektor wê, werina bikarhanîn. Minaq ku em li ser A 'yê re weke bi vektorî wê, derkirineka b'yî wê, bide nîşandin wê demê em, li ser vektorek x'ê re jî wê, şandineka afînê bi f'yê re bidina nîşandin. Ev jî wê, weke aliyekê wê yê ku em bi wê re wê, di serî de wê, fahmbikin bin. Minaq  $\rightarrow y = f(\rightarrow x) = A \rightarrow x + \rightarrow b$  re wê, dikarin wê bi awayekê wê bidina nîşandin.

Di aslê xwe de wê, dema ku em werina ser mijare koka afînê wê demê em dikarin wê hinekî din di dewama wê de wê li ser wê bisekin in. Wê hinek aliyên wê yên din ên ku em dikarin wê di dewama wê de wê, werênina ser ziman wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê wê yê din jî wê, di wê rengê û awayê de wê, hebin. Di aslê xwe de wê, rewşa kokê wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê din ê sehî jî wê, di awayekê de wê, xwe di destpêkê de wê bide nîşandin. Kê her afîn û ankû rewşa ku ew hat afirandin wê bi beremberîya wê re wê di areşa fezeyî de wê, kifşkirina wê weke aliyekê din ê temenê lêgerînê ê bi wê re wê, xwe bide nîşandin bê. Ev aliyê lêgerînê wê, di awayekê din de wê, mirov dikarê wê bi serê xwe wê bikê mijare lêkolînekê. Lê li vir mijare me, bo ku em zêde ji wê xate wê û hevraştîya wê dûrnekevin emê zêde di wê de kûr nebin. Di wê rewşê de em di wê rewşa xwe de wê, weke aliyekê giring wê, di dewama wê de wê, werênina ser ziman ku wê, di mijare afînê de wê, dema ku em minaq li ser rewşa kokê wê, hinekî bi kortasî wê bihizirin em dikairn wê, bi wê rengê wê bi serekêyî wê werênina ser ziman. Lê li vir wê dema ku em bahsa wê dikin wê weke aliyê sehî û hwd ên weke rotasyonê û hwd jî wê, weke aliyê ku wê bi xwezayî wê, di mijare fahmkirinê de wê xwe bidina dîyarkirin bin.  $a_i = \cos \varphi$ ,  $b_i = -\sin \varphi$ ,  $d_i = \sin \varphi$  û  $c_i = f = 0$  wê, dikarê wê bi awayekê wê bi kortasî wê werênê ser ziman. Di wê rewşê de wê, ev wê weke aliyekê wê yê giring wê xwe bide nîşandin. Di wê rewşê de wê, di wê denklêmê de wê, weke ku me weke awayekê ku wê hinek aliyên wê yên ku wê weke ku me ji denklêmê fahmbikin wê, di awayê weke  $i \varphi : i \varphi : i \varphi = f/\varphi$  re wê, di awayekê de wê, bi wê re wê, weke alî û dîmenekê wê yê ku em ji wê bigihjinê û wê fahmbikin bê. Di wê rewşê de wê, ev wê, di aslê xwe de wê, derfetên bi awayê ji aliyên din ve jî wê, bide me. Di wê rewşê de em, ku ji kijan aliyê ve mijarê li wê binerin wê, di aslê xwe de wê, weke aliyekê giring wê, di wê rewşê de wê, tiştêkê din

wê bixwe re wê bide nîşandin. Ev jî wê, ew bê ku wê rewşa vegûharînen afînî ku wê bibin wê, di wê rewşê de wê, li ser çî temenê û bi çî awayê wê bibin wê ew jî wê, di awayekê de wê, weke aliyekê din ê ku em dikarin wê, ji aliyekê din ve jî wê dûbare wê serê li ser wê biwastênin û wê fahmbikin bê. Di wê rewşê de wê, ev wê, bi xwe re wê wê hingî wê temenekê fahmkirinê ê baştirîn wê bi xwe re wê weke ku wê bide me.

Di rewşa afînê de wê, di mijare têngîna geometriya cebirî a fezeyî de wê, weke ku wê were kifşkirin wê di her rewşê de wê, di fezeyê de wê hebin. Lê wê, di awayekê de wê, ne bi rengekê û awayekê bin. Ya ku em di wê rewşê de wê, weke xosletê afînî wê, di çerçoveya fezeyî de wê, fahmbikin û wê hildina li dest û wê fahmbikin û wê werênina ser ziman wê ev aliyê wê bê. Di têngîna fezeyî a auklidyani de wê, dema ku ew wê were salixkirin de wê, bi sê-dîmenî û di dewama wê de ku wê bi awayekê pîrr-dîmenî ku ew dikarê were pêşxistin wê li ser temenekê fahmkirinê wê were ser ziman. Ya ku wê ne weke ya geometriya auklidyani bê wê, bi rewşa fezeyî mênîlî ku wê Einstein jî wê bikê temenê têngîna xwe ya teorikî a dîtbarî jî wê, di wê rewşê de wê, mirov dikarê wê fahmbikê. Ya ku wê, di demê hemdem de wê, temenê têngîna koordinatî auklidyani afirand wê, têngîna pergale koordinatî a kartezyani bê. Di awayekê dahûrî ê geometriyî de jî wê ev bi zêdeyî wê were dîtîn ku ew dihê bikarhanîn. Di wê rewşê de wê, li ser têngîneka ku wê bi hijmarên rastîn re wê, were ser ziman û wê were fahmkirin bê. Minaq ku em weke komek hijmare rastîn (reell) bi  $R$ 'yê bidina nîşandin. Bi wê re ku em hijmarek pozîtiv jî bi  $n$  re wê bidê nîşandin. Wê demê wê di  $R$ 'yê de wê, bi awayekê dîmenî  $n$  wê, bi vektorî di fezeyê de hemû qatên ji hijmarên rastîn ku ew biafirê, hingî ev bi dagera  $R_n$  re wê bê dayîn nîşandin. Di  $R_n$  de wê, endamek wê bi rengê  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  re wê bê dayîn nîşandin. Lê minaq wê her  $x_1 x_2$  û hwd wê, weke hijmarna rastîn bin. Di dewama wê de ku em li gorî wê, vektorên  $R_n$ 'yê nivîsênin em dikarin bi wê rengê wê binivîsênin.  $X + y = (x_1, y_1, x_2 + y_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ ,  $a x = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$ . Li gorî wê, ku mirov wê, bi temenê xwezayî ku ew bi wê li fezeyê dihizirê wê werênê ser ziman wê ew jî wê, di wê rengê de bê. Wê ew jî wê bi awayê  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$  û  $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$  û  $e_n = (0, 0, \dots, 1)$  wê bide nîşandin.

Di rewşa fahmkirina têngîna auklidyani de wê di dewama wê de mirov dikarê wê weke aliyekê giring wê werênê ser ziman ku wê, di wê warê de wê, li ser temenekê mantiqî ê aqilmeşandinê re wê, were dîtîn. Bi mantiqî wê, di awayekê de wê, encama ku wê bigihijjê, minaq ji hevrastekê ku ew bi nûqteyekê destpêdikê de wê, li wir wê, ya ku wê bihizirê wê, di wê



rewşê de wê, di wê ahengê de wê li wê bihizirê. Di wê rewşê de wê., di gometriyê de wê, mantiq w wateya wê çi bê? Di aslê xwe de wê, piştî ronansê wê filosofên weke descartes û hwd wê, ji wê aliyê ve wê serî li ser wê biwastênin. Ya ku wê, têgîna auklidyani wê ji wan re wê bide temenê hizirkirinê jî wê hinekî wê ev bê. Di wê rewşê de wê, di têgînên stêrzanî û hwd de wê, ji gelilei, newton û heta descartes wê, di wê rengê de wê, bi wê re wê, di awayekê de wê bê hizirkirin. Di wê rewşê de wê, têgîna bêdawîyê ku wê weke navenda hizirkirina wan wê bihizirin wê, di wê rengê de wê, di wê rewşê de wê, di awayekî de wê, xwe bide nîşandin.

Têgîna auklid wê li ser sêkik û ankû çarkikên ku ew li hev bînin zêdekirin û bi wê fahmkirina navbera wa re wê, li ser têgînekê re wê xwe bide nîşandin. Dema ku wê mijar wê were li ser rewşa fezeyê û vegotina wê auklidyani wê di wê rewşê de wê, bi awayekê wê, izotropikî wê bihizirê. Wê bi wê re wê li ser rastbûna fezeyê re wê, hizrên xwe wê, werênê ser ziman. Di dewama wê de wê, dema ku mirov wê bihizirê wê weke ku mirov wê kifşbikê wê, di awayekê de wê weke bi têgînek homojenî û bêdawî wê, werênê ser ziman. Wek dihê zanîn wê, bo pîvandina navberê wê, 'weke pîvanek auklid' jî ku wê were zanîn  $P = (p_x, p_y)$  û  $Q = (q_x, q_y)$  were ser ziman. Di wê rewşê de wê, dema ku wê, li ser ser rewşên salixkirinê re wê, weke ku mirov dikarê wê werênê ser ziman wê, di wê rewşê de wê, rewşa têgîna auklidyani wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê din jî wê, dema ku wê hevrastan wê bînin ser ziman den  $y = 2x + 1$  û ankû  $2 + y^2 = 7$  wê were bikarhanîn. Di wê rewşê de wê, weke têgîna kinkirî ên ku wê bi wan re wê, li ser xatek hevrastî wê, rastarast wê bi wê re wê were fahmkirin re wê, bînin ser ziman.

Di dewama wê de wê, mirov dikarê wê weke aliyekê din jî wê werênê ser ziman ku wê, di sedsalê 18' min û hwd de wê bi zêdeyî wê, di wê rewşê de wê, derketina li pêş wê bibê. Di wê rewşê de wê, hizirkirinên bi têgîna geometriyê û piştî pêşketina têgîn û zimanê cebirî di wê de wê, weke temen û aliyekê wê yê din ê fahmkirinê wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê wê yê din ku mirov wê, dikarê wê fahmbikê bê. Di aslê xwe de wê, di wê rewşê de wê, rewşa têgîna auklidyani ku mirov wê, bi xwezê wê fahmbikê wê di serî de wê, weke têgînek geometriyê a ku wê bi wê re wê, di dahûrî de wê, di awayekê de wê, diakrê wê werênê ser ziman. Di rewşa têgîna auklidyani de wê, têgîna wê ya sermedî a bêdawî ku wê ew wê bi wê bihizirê wê, weke aliyekê ku wê bi wê re wê, çawa wê, were fahmkirin wê, di wê rewşê de wê, êdî wê li ser wê were sekin

in. Di mijara gihiştina têtînen geometriyên der-auklidyanî de jî wê, di wê rewşê de wê, bibê. Di wê rewşê de wê, têtîna formeli a geometriya auklidyanî wê, di wê rewşê de wê, temenekê hizirkirinê wê ji wê re wê, bi xwe re wê bide çêkirin.

Di sedssale 20an de ku wê nîqaş wê bi matematikê re wê zêdetir bibin wê, di wê rewşê de wê, têtîna matematik û metafîzîkê wê, di awayekê de wê, bi têtînen bi wê rengê re wê, di awayekê de wê, weke ku wê, were ser ziman. Russell wê li ser wê re wê, bahsa matematikê û bi wê fahmkirina rastiyê wê bikê û wê bènê ser ziman ku “hipoteze me ku ew ku ew li ser tiştêkê bê, li ser hinekî û anjî ne li ser tiştêkê jî bê wê, birînen me matematikê wê biafirênin. Bi wê sedemê matematik wê, di derbarê çî de ku mirov di axifê ankû çî gotinên me ku wê rast û anjî ne rast bin wê, weke mijar wê bide dîyarkirin.” Di wê têtîne de wê, di aslê xwe de wê matematik wê weke rêyek ku wê bi wê fahmkirinê wê bi wê re wê, pêşbixê wê bi wê re wê, bê hizirkirin. Ev rengên şîroveyên mantiqî wê, di awayekê de wê, di aslê xwe de wê, weke aliyê ku wê, mirov dikarê ji gelek aliyên din ve jî wan li ser wan bihizirê. Di wê rengê de wê, di dewama wê de wê mirov dikarê wê, werênê ser ziman ku wê, heta wê demê wê, auklid wê, bi têtînen xwe yê aksiyomî wê heta wê demê wê, di zêhnî filosof û kesên dihizirin de wê, ya ku wê were hizirkirin ew bi serek kir. Di dewama wê de wê, di wê rengê de wê, di awayekê de wê, temenekê bi pêşketina bi xwe re wê bileyizê.

Ji aliyekê din ve jî wê mirov dikarê wê, werênê ser ziman ku wê, bi felsefeyî bê û ankû awayên din ên teorîkî jî bê mirov derpêşên felsefeyî û teorîyî wê, bi matematikî wê karibê wê werênê ser ziman wê, di wê rewşê de wê, di aslê xwe de wê, weke aliyekê wê yê din ê giring wê, dikarê wê, di awayekê de wê, werênê ser ziman. Di wê rewşê de wê, jî mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê têtîna fahmkirinê de wê di nava têtîliya rengên hizirkirinê û fahmkirinê a bi matematikê re de wê, di awayekê de wê weke ku wê weyekê jî wê di wê rengê de wê, bileyizê. Bîrkhoff wê bi aksiyomên xwe de wê, di çerçoveya Auclidyanî de wê, çar postulat pêşnîyarkir. Di awayekê pîvanî û **protraktorî** de wê, têtîne cerbî wê, di wê rewşê de wê, bixwezê ku ew pêşbixê. Pergale ku wê, Bîrkhoff wê, pêşnîyarbikê wê temenê wê li ser hijmarên rastîn bê. Riemann wê, dema ku wê, têtîna xwe ya geometriyî a eliptîkî wê pêşbixê wê, rêgeza pêncem a auklidî wê bi tememî wê redbikê û wê bi vekirin û pêşxistinên li ser postulata duyem re ku wê bikê re wê, temenê wê bikê ku ew biafirênê. Di wê rengê de wê, di awayekê de wê, temenê xwe yê

geometrikî wê bi wê re wê bikê ku ew wê biafirênê. Ev xale pênce auklid jî wê di awayekê de mirov dikarê wê, bi rengê 'Ku li du xatên rast wê bikeve hevrasta xatek rast, bi heman aliyê wê yê hundirin bi du aliyan re rekbûna wê kêmbê wê demê ku ew bi bêdawî dirêj dibin wê, wê li aliyê ku ew **kêmbê** re wê bigihina li hevdu' re wê bêtê ser ziman. Weki din wê bi têtîna giştî ji qatê mazintir a' wê bi wê werênê ser ziman. Gotinên weke hevrast û navberê wê weke gotinna tekî wê bixwezê ku ew wê di rewşekê de wê, hilde hilde li dest. Şewayê ku wê bîrkhoff wê bi wê bihizirê wê, di aslê xwe de wê, di awayekê de wê, weke ku em dikarin wê bihesanî wê kifşbikin wê di temenekê metrisî de wê, awayekê hizirkirinê wê weke ku wê bi xwe re wê bêtê li holê bêtê. Metris wê ber ku wê, bi afirin ji ya bi hesan li ya tevlihev ku wê pîr zêde wê, derfetê bi hesanî wê bide me ku em karibin vegûharînin bi afirin bin û ankû rewşên din bin wê, pêşxistina wan wê derfetê wê bide me. Di wê rengê de wê, di wê rewşê de wê, êdî wê weke awayekê wê xwe bide nîşandin.

Di aslê xwe de wê, afirin wê, weke ku em di geometriya cebirî a demên hemdem de wê dibînin wê bi zêdeyî wê derkevina li pêş. Ber ku wê, weke temenekê ku wê bi wê re wê çawa wê, bêtê hizirkirin û wê bi wê re wê, awayên gûharîner wê bêtê pêşxistin û wê bi wê re wê, têtînek bêdawî û ankû bidawî wê xwe bêtê gihandin li wê derfetê wê bide me wê, ber vê yekê wê temenekê hesan ê hizirkirinê jî wê di qada fezeyî de bêtê û di qadên din ên geometriyî de wê, xwe bidina dîyarkirin di hizirkirinê de.

Di şewayekê hizirkirinê ê ku em dibînin bi rengê hizirkirinê auklidyanî re ku wê, weke rêyek bi hesanî xwe li wê girtin û ankû ber ku wê, di mantiqekê hevraştî de wê, temenekê hizirkirinê wê ber ku wê bêtê hizirkirin wê, minaq weke minaq têtîninê referansî ên 2D ku wê li 3D ê werina kirin û wê li ser koordinatên 2D'yê ku wê li yê 3D'yê wê werina kirin û wê ji wê bêtê berdewamkirin wê, di awayekê de wê, bi şewayekê hizirkirinê wê weke ku wê xwe di awayekê de wê bide dîyarkirin. Di wê rengê de wê, mirov dikarê wê, werênê ser ziman ku wê, ev jî wê weke aliyek wê bi wê re wê bêtê hewldan ku ew bi pîvanê û hwd re bigihijê li encamek fahmkirinê.

Li vir di aslê xwe de wê, mirov dikarê wê, ji aliyekê din ve jî wê, werênê ser ziman ku wê mijare metrisan wê, di aslê xwe de wê, di awayekê de wê, weke aliyekê geometriyê jî ê giring wê biafirênê. Metris wê di awayekê de wê, xwediyê rengekê kompleksî ê ku em dikarin wê bi wê bihizirin bêtê. Di wê rewşê de wê, di wê rewşê de wê, derfetê bide me ku em bûjenê ji dîmenekê li dîmenekê din wê karibin bidina barkirin û

wê, bikina awa û renekê de wê, bibê. Minaq em dikarin di wê rewşê de bi awayekê metrisî wê bi wê rengê wê, bi kortasî wê, werênina ser ziman. Ku em metrîsa pîvanê bi S, ya birrînê bi H û ya vegûharînê bi R re wê, hizirbikin. Di dewama wê de em bi awayekê denklemî bi rengê  $x = R(H(Sx))$  wê werênina ser ziman. Di wê rewşê de wê, metrîsên ku ew pîvanên diafirênin, metrîsên ku ew vegûharînê di afirênin û hwd wê, di wê rewşê de wê, temenê wê ku ew li ser wê were çarpkirin wê, derxê i holê. Di wê rewşê de wê, di awayekê de wê, hin bi hin wê parantêzan jî wê ji holê rakê. Wê di dewama wê de wê, di awayekê de wê, awayekê din ê metrîsî bi rengê  $M = RHS$  wê weke metrîsek vegûharînê wê bide dîyarkirin. Ev jî wê di awayekê de wê bi rengê  $x = (RHS)x = Mx$  wê xwe di awayekê de wê bide nîşandin. Di rewşek tevlihev a metrisî de ku wê minaq wê, her nûqte ku wê were vegûharîn wê, bi wê re wê, wê bi wê bi xwe re wê, çarkirina wê minaq bi dîmenî weke bi 3'yan re bikin wê, di wê rewşê de wê, di awayekê de wê, weke awayna ku wê, pirr zêde wê, xwe li xwe bi awa bikin wê, di awayekê de wê, bide nîşandin. Minaq ku em bi awayekê li gûherînerîyên metrîsê bihizirin em dikarin bi wê rengê wê, di awayekê de wê, bênin ser ziman. :[sxsy]:[  $\varphi - \varphi, \varphi, \varphi$ ]:[ 1h,hy1], Di wê awayê de wê, weke ku mirov dibînê wê,  $sx$  û  $sy$  ku wê bi du nûqteyên koordinatî weke  $x$  û  $y$  re wê, bin wê, di dewama wê de wê li ser temenê wê yê ku wê,  $hx$  wê weke fektorê bi ew bi dirêjehî ê birrînê û  $hy$  jî wê weke fektorê rek wê dikarê wê weke têtînek birrînê wê fahmbikê. Di wê rewşê de wê, hevrasta ku em wê, di wê de wê, werênina ser ziman wê, di awayekê de wê beremberê nebûyîna bi ahenge pêşdebûyîna jî wê weke aliyekê wê yê din ê ku mirov dikarê wê kifşbikê bê.

Dema ku em bi geometriyî bahsa têtîna metrîsê bikin wê, demê wê weke aliyekê wê yê giring wê, xwe bi wê re wê, di awayekê de wê, bide nîşandin. Metrîs wê, di awayekê de wê komek bê. Ku wê, di wê de wê bi metrik bi metrikê re wê, hebûna komî wê biafirênin wê, hingî wê di wê de wê, kom biafirê. Li vir di aslê xwe de wê, weke A û B ku ew ji nûqteyê wê werina destpêkê wê bi hevdû re wê, nûqteyê wê biafirênin. Di çerçoveya têtîna qadî a metrikî de wê, di wê rengê de mirov dikarê wê weke li gorî bi têtîna referansî wê kifşbikê. Minaq ku em rêzek cêwî wê weke (M, d) em bihizirin. Li kûderê ku M wê weke setekê bê wê, d jî wê weke pîvanekê M' yê bê. Di awayê d : $M \times M \rightarrow \mathbf{R}$  de wê, dikarin bi awa bikin. Minaq bo her yekê wê  $x, y, z \in M$  ku em bi denklem bikin wê bi rengê wê yê li xwerê wê dikarin wê werênin ser ziman. Ji aliyê temenê nedîyarî ve ku mirov wê hilde li dest wê, di awayekê de wê, bi  $d(x, y) =$

$0 \Leftrightarrow x = y$  re wê, di awayekê de wê, dikarê wê werênê ser ziman. Di heman rengê de ku em bi denklema li gorî têngîna simetriyî wê, li wê bihizirê wê, di awayê  $d(x, y) = d(x, y)$  bê. Lê em ku di awayê sêkika wekneheviyê de wê, werênê ser ziman em, dikarin li ser awayê xwe re bi hesanî bidomênin û bi rengê  $d(x, y) \geq d(x, y) + d(x, y)$  wê werênê li ser ziman. Lê em dikarin wê, di dewama wê de wê, bi berdewamî wê, hinekî din jî wê bi denklema bikin. Minaq  $d(x, y) \geq$  di awayekê din ê derparantezî wê, bi rengê  $x, y \in M$  wê bi awa bikin. Ev jî wê minaq wê dîsa li gorî sêkika wekneheviyê  $d(x, y) + d(x, y) \geq d(x, y)$  bê, Li gorî awayê simetriyî wê  $d(x, y) + d(x, y) \geq d(x, y)$  û nedîyarîyî rewşî ku wê hilde li dest jî wê, bi awayê  $2d(x, y) \geq 0$  werênê ser ziman. Di temenê nebûna rewşa neyînî de jî  $d(x, y) \geq 0$  wê, dikarê werênê ser ziman. Di rewşa têngîna metrikê de wê, di awayên wê yên ku wê, werina bikarhanîn de wê, mirov dikarê wê, di berdewamîya wê de wê, bi awayekê wê, hê jî pêde herê û wê di awayna de wê, werênê ser ziman. di awayên nelevker ên metrikî de wê, dema ku minaq em  $d(x, y) = 0$  û ankû em  $x = y$  û  $d(x, y) = 1$  ku wê weke di awayna neyînî de wê, dikarê wê pêşbixê wê, di çerçoveya komekê de ku wê, di pirrani de wê təkiliya qadî a pîvanî wê bi wê re wê, hebê wê, di awayekê de wê, weke ku wê, karibê bi wê re fahmbikê bê.

Li vir em dikarin wê hinekî bi awayekê geometrikî bi rengekê wê bi denklema bikin û wê bidina domandin. Di wê rewşê de wê, ji aliyekê ve wê, topolojiyên ji hev cûda ku wê werina pêşxistin wê, di wê warê de wê bi armanca pêşxistina fahmkirinekê a di wê warê de bê. Topolojiya Klein a geometriyî ku wê, li ser esasê du hevrastên hevrêz wê, bi du rastiyên nava wan birrînê re ku wê werênê ser ziman wê, di awayekê de wê, topolojiyek metrikî geometrikî jî wê bi xwe re wê, werênê ser ziman. Di wê rewşê de wê, çendî geometriya Klein wê di awayekê de wê li ser temenekê klasik ê auklidyânî wê ava jî bê wê di wê warê de wê, weke şîroveyek wê li vir mirov dikarê wê werênê ser ziman. Di temenê wê de wê weke ku mirov dikarê wê fahmbikê di heviyekiyên auklidyânî de bi derpêşî wê weke ku mirov dikarê wê zêdetir bikê û pêşbixê jî wê, di wê rengê de wê, ji aliyekê din ve jî ku em bi encamaka weke bi navberînên birrînê wê, di dewamiyekê de wê fahmbikê wê, di awayekê de wê, mirov dikarê li gorî mijare encamaekê ji wê derxê. Hinekî aliyên vê têngîna geometrikî a klasik wê, li gorî têngîna geometrikî a dualiteyî jî wê bi hevdû re wê, weke ku wê bişibihina l ihevdu wê hebin. Emê li **jêr** li ser wê bisekin in. Li gorî wê têngîna wê, rastiyek wê, sermedî bê û wê du

nûqte wê 'gişti bin' û di dewama wê de wê, giştî qatkan dide dîyarkirin wê, werênê ser ziman. Ev di aslê xwe de wê, rêgeza geometriya auklidyanî a ku wê, di wê çerçoveyê de wê, têtikiliya nava giştî û qatkê wê bi hevdû re wê li ser esasê kifşkarîya giştîyê wê demezrênê re ku wê werênê ser ziman jî bê.

Li gorî wê, ku mirov bihizirê wê, di çerçoveya têtîna geometriya eliptikî û ya profektifî de ku wê, bi têtikiliyek aksiyomî wê were hizirkirin û wê weke her aksiyomên geometriya projektifî ku wê, di ya eliptikî de wê, bèn bikarhanîn jî wê, dîmenekê bide me wê, ev dîmen di aslê xwe de wê, dîmenekê ku mirov dikarê wê di serî de wê li wê bihizirê hizirê bê.

Di warê her aksiyomê de wê, destpêk wê weke ku mirov dikarê wê bi kêfî wê hilibijêrê û wê, di destpêkê û rengê hanîna ser zimanê de wê, bi wê rengê wê, werênê ser ziman. Lê di aslê xwe de wê, di dewama wê de wê, ew wê, bi xwe re wê renekê mantiqî ê hizirkirinê û pêdeçûyinê wê bi xwe re wê biafirênê. Di wê rewşê de êdî em dikarin wê, weke aliyekê wê yê din wê, di serî de wê, bi wê re wê, li wê bihizirê. Di aslê xwe de wê, dema ku em li vir wê li ser rewşa têtikiliya geometriyî wê, bihizirê ku ew bi geometriya profektifî bê û ankû eliptikî û yan jî renekê din jî bê wê, weke mijarek giring û kifşkar wê, rewşa qatkê bê. Wê, di wê rewşê de wê, çawa bê hildan li dest û wê, xwediyê çoi temenê û rengê fahmkirin, dîyarkirin û têtikili û awayên wê bê wê, weke aliyekê wê yê ku mirov wê, dikarê wê, di serî de wê, weke aliyekê giring wê, li wê bihizirê bê. Di wê rengê de wê, ev wê, mirov dikarê wê bi têtîna qatkê re wê, werênê ser ziman ku wûcana wê were kifşkirin de wê, di rewşa geometriya projektifî de wê, hinekî din wê weke ku wê, zêdetirî wê ji ya auklidyanî wê tevlihevtir wê, dîmenekê wê weke ku wê xwe bi re wê bide nîşandin. Ber ku wê, ev rewşa geometriya projetifî wê izomorfikî bê wê, di awayekê de wê, di temen û awayên din de jî wê bi têtikilidanîne bê û ankû bi karhanîne bê wê derfetekê wê bi xwe re wê bide çêkirin bê. Di rewşa danîşandina geometriya eliptikî du-dîmenîya wê di fezeyê de wê bi rastiyekê û temenekê pirranî ê modelî re wê, bi modelî wê bê dayîn nîşandin. Di auklidyan de wê, rastiyên hevrast wê, werina li holê. Hevyeki wê, bi nûqtayan wê, rastiyên rek re wê, werê ser ziman. Di wê rewşê de wê, di rewşa têtikiliya geometriya eliptikî ku wê, bi bi cemberekê re wê, bi geometriya wê re di heviyekiyekê de bê, wê, di wê rewşê de wê, têtîna hevrasta rek wê di awayekê de wê, weke ku wê bi xwe re wê, di awayekê de wê bide me.

Di fezeyê de wê, rewş wê bi wûcan, dem û mekanê re di awayekê sê dîmenî de wê li gorî min wê di awayekê de ku **wê** rewşa birehiya bi demê re wê, bi mekanî em wê werênina ser ziman wê li ser wê re wê, bi xwe re wê, çendî ku wê, ew wê, bibê wê, bi wê re wê, di awayekê de wê, di awayekê eliptîkî ê smetrikî de wê, dîmenekê wê weke ku wê bi xwe re wê, bi dirêjbûnê re wê, di awayekê de wê bide nîşandin. Li vir wê, di wê rewşê de wê, rewşa gûharînê wê, di wê temenê de wê, weke pêşketinên ku ew li gorî wê dibin wê, di wê temenê de wê weke aliyekê wê mirov dikarê wê serî de wê werênê ser ziman û wê fahmbikê. Di wê rewşê de wê, rewşa geometriya eliptîkî di dîmen de wê çendî ku wê li gorî wê dîmenekê razber wê, bi xwe re wê bide dîyarkirin di hişmendiya me de lê di aslê xwe de wê, di temenekê de wê, weke ku wê, beremberîya wê ji du aliyan ve wê, bi şenberî ku mirov wê kifşbikê wê hebê. Yek wê li ser wê temenê bi sê dîmenîya bi demê, mekan û wûcanê re bê. Aliyê din jî wê li ser rewşên teybet ên weke hebûna gerwerkan û hwd re minaq weke dunyê ku ew li dora xwe û ya rojê bi du dîmenê di gerihê wê, dikarê di wê temenê de wê, di awayekê de wê, werênê ser ziman. Ev rewş wê çendî ku wê weke rewşna demî û mekanî jî bin lê wê ji aliyekê din ve jî weke aliyekê din ê ku wê, bi demê re bûyîna wê re wê, weke aliyekê xwezayî ê gûharînê wê bi xwe re wê biafirênê bê. Ev rewşên ku em dikarin wan bi teybetî jî wan fahmbikin wê, di aslê xwe de wê, di rewşa fezeyê de wê, di awayekê de wê, weke ku em dikarin wê, fahmbikin w, di dîmenekê de wê, hem têkiliya wan dîmenên bi giştî û teybetî hem wê bi hevdû re wê hebê û hem jî wê weke ku wê bi serê xwe bê wê dîmenekê wê di mejiyê mirov de wê bide çêkirin. Di rewşa geometriya demî û ya mekanî de wê, cûda û cûda wê, di wê rewşê de wê, di awayekê de wê weke ku mirov pêwîstî dibînê ku wan pêşî fahmbikê wê, dîmenek wê xwe bide nîşandin. Di rojekê de wê, çawa wê, ji sibehê heta êvarî wê, xîşiqînên ku wê, hin bi hin wê bibin bi demê re wê, ev wê weke dîmenê wê yê teybet bê. Lê ji aliyê din ve wê bi demsalî wê çawa wê, ew wê, bi heman rengê wê, bi berfirehî û tengêhî û hwd re wê, kin û dirêjbûnê wê bijî di heman rêkê û rekê de wê, di wê rewşê de wê, weke aliyekê wê yê din bê ku mirov wê, kifşbikê bê. Em gotina kin û dirêjbûnê bikardihênin. Ev gotin wê çendî wê karibin rewşê vebêjin wê, di aslê xwe de wê, weke aliyekê din ê ku mirov dikarê wê, werênê ser ziman bê. Têgîna kinbûnê û dirêjbûnê wê li ser berfirehîya demê û mekanî a fezeyî re wê, weke rewşek dîtbar jî wê ji aliyekê ve wê bimênê. Ev rewş wê, di zêhnê me de wê, weke rewşek bûyî a fêrî wê xwe bide dîyarkirin. Lê ji aliyekê din ve jî wê, weke aliyekê ku

wê, di wê rewşê de wê, mirov dikarê bi herîkîna demê re û ankû dirêjehiya wê re wê, werênê ser ziman ku wê, ev rewş wê, di wê de wê, weke aliyekê din wê xwe bide nîşandin. Birehbûna fezeyî wê bi du rewşan wê mirov dikarê wê fahmbikê. Yek bi awayê giştî ku wê bi wê re wê, weke ji hevdû vezilînê ku wê bibê bê. Aliyê din jî wê ji ya ku ew heyî wê bi pêşde wê, di awayekê de wê, hertimî wê, bûyîna wê bi dirêjehî wê, xwe bide dîyarkirin bikê. Di wê rewşê de wê, bi awayekê jêrûjorin û ankû rekî û an jî ku wê bi awayê razanî û ankû berfirehî ku wê werênê ser ziman wê, di wê rewşê de wê ew jî wê, bi wê re hebê. Lê di wê rewşê de wê, rewşek ku ew heyî wê, piştire wê, karibê wê bi wê ebatê wê re wê weke wê bimênê, piştî bi berdawamî wê ji hev vezilîna bi demî a berfirehîya bi mekanî û hwd re?

Ji hevdû firehî wê, çendî ku wê ji aliyekê ve wê weke bi têtînek ji xwe re wê, bi fahmkirinaka tevlihevî wê karibê wê were ser ziman lê li ser wê re jî wê mirov dikarê wê weke aliyekê din ê di awayekê ahengî û di çerçoveyek sazûmanî de jî wê, werênê ser ziman. Wê jî wê dema ku mirov wê bi geometriyî ku wê kir ku wê fahmbikê wê, di awayekê de wê karibê wê têtîgihê. Di awayekê de wê, awayên geometrikî ên ku ew dihên pêşxistin wê li hemberî fezeyâ objeyî wê, weke rewşna şubjektivî wê bimênin. Di wê rewşê de mirov dikarê wê, di awayekê de wê, têtîgîna geometriyî wê bi têtînek dahûrî wê, fahmbikê li ser awayê wê yê ku me pêşxist ku ew beremberîya wê bi objektivî were kifşkirin jî. Minaq awayên eliptîkî ( $\Omega$ ) ku ew hatina perमितekirin wê, di awayekê de wê, projektivî wê, eliptîkî bê. Di awayekê din de jî wê bi awayekê hiperbolik jî bê. Ku em wê bi têtînek teqezî wê nexwênin wê ne wûsa bê. Lê têtînek teqezî wê, der-hiperbolikî wê tenê bi eliptîkî wê weke ku wê bide dîyarkirin. Minaq bi teoremî ku mirov wê werênê ser ziman wê dikarê wê bêjê ku wê, li ser wê rewşa ku me hanî ser ziman re wê,  $A \hat{=} B$  ku weke du nûqtayan hat hildan wê demê wê tenê beremberê bi dîtbarî weke  $A \hat{=} B$  bê. Wê bi birîqîna  $A\Phi_B$  re wê weke dîsa  $A\Phi_B$  bê. Di dewama wê de mirov dikarê wê jî wê bêjê ku wê dema ku wê  $\Omega$  wê were perमितe kirin wê, wê bi xwe ( $\Omega$ ) re ew wê, bikê. Minaq bi rengê  $\Omega\theta\theta = \theta\Omega\theta = \theta\theta\Omega$  em dikarin wê li ser wê têtîgîna re wê werênina ser ziman. Em li vir di aslê xwe de wê, dikarin wê di awayekê de wê, werênina li ser ziman ku em li ser awayekê dîtbar ê, vegûharîna de wê, bi formule bikin em dikarin wê, di wê rengê de wê, werênina ser ziman. Li ser rastîyekê ku wê, weke sê xal ku ew bi A, B, C werina salixkirin wê, di wê rewşê de wê, danîşana wan a di çerçoveya wê vegûharîniyê de wê, dikarê wê, du



gûharînî wê fahmbikê. Bi awayekê ahengî wê di rengê ku em dîmenekê ji ve werin wê, bi rengê  $A\Psi_B-1= B\Psi_A$  bê. Lê di wê rewşê de wê, mirov dikarê wê, werênê ser ziman ev aheng bi rengê  $A\Psi_B-0+ B\Psi_A$  ku em wê werênina ser ziman wê, hingî wê, weke herdû dîmenên ku wek hev hatina kirin bi formeli wê di awayekê de wê, were derxistin li holê. Di wê rewşê de wê, em dikarin wê, bi wê rengê wê, formule bikin ku wê  $A\Phi_B = +0 B\Phi_C = +0 A\Psi_C = +0 A\Psi_B = B\Psi_C$  wê werênê ser ziman. Lê li vir wê, rewşa  $A\Phi_A$  wê bi  $A \hat{u} A\Omega$  ku wê, weke nûqtayên invarsyonî jî wê, di awayekê bi afirênin jî wê, weke biriqîna ji wê di awayekê de wê, karibê were fahmkirin. Di wê rewşê de ku em li ser  $A \hat{u} B$  re wê werênina ser ziman wê dema ku wê  $A\Phi_b$  wê hebê wê weke were wateya wê gûharînê jî bê. Vajî wê jî bi rengê  $b\Phi_A$  wê were wê wateya wê. ..

### **Geometriya dahûrî**

Di aslê xwe de wê, dema ku em bahsa geometriya dahûrî wê bikin wê, di awayekê de wê, şîroveyên me yên ku me di bin beşa berî vê de kirin jî wê di awayekê de wê, werênê ser ziman. Lê di awayekê din de jî wê ev beş wê, ji aliyekê din ve wê, weke aliyekê din ê tememker ku em dikarin di dewama wê beşa li ser vê de wê werênina ser ziman bê. Di wê rewşê de wê, jî wê weke aliyekê din wê mirov dikarê wê werênê ser ziman ku wê geometriya dahûrî wê, di awayekê de wê, ji nûqtayê li nûqtayê wê di awayekê de wê, bi awayekê dahûrî wê, bikê ku ew wê werênê ser ziman.

Wê, geomeriya dahûrî wê piştî serdemên navîn û pê de wê, pêşkeve. Wê, di awayekê de wê, bi şenberîya wê re wê pêşketina wê were dîtîn. Di aslê xwe de wê, felsefeya bûjenî û fîzîkî ku wê êdî wê, pêwîstîya bi temenekê şenber û bûjenî û fîzîkî ku wê were kirin wê, ji wê êdî wê ew wê di awayekê de wê, xwe bide nişandin. Felsefe wê pêşî wê bûjena ku ew dibîne wê çawa wê ew wê derkbikê wê li ser wê bisekinê. Di awayekê de wê, weke wê derkkirin û ankû di heman rengê de wê, ya ku ew hatî derkkirin û ya ku ew heya di jîyanê de wê weke hevdû bê wê, gelekî wê bê mijare hizirkirinên ku wê piştî wê werina kirin jî bê. Di wê rewşê de wê, ev jî wê, di awayekê de wê, bi wê re wê, di awayekê de wê, weke ku wê pêşkeve û wê were ser ziman.

Piştî wê re wê, mijare rewşa fîzîkî a ku ew weke ku ew heya û wê bi awa, şekl û rengê wê re wê çawa wê were fahmkirin wê, di awayekê de wê pêşî wê bi têngînek fîzîkî a bi temen bûjenî re wê pêşketina wê xwe di awayekê de wê bide nişandin. Di aslê xwe de wê, di wê warê de wê, hizrên descaertes wê, di fahmkirinên geomeriya dahûrî de jî wê, di

awayekê de wê, weke renekê pêşketina wê jî wê bê hanîn li ser ziman. Di wê warê de wê çendî ku wê, descartes wê, zêde newênê ser ziman jî wê, hizrên ku wî hanîna li ser ziman wê ji ya ku wê, werê ser ziman wê zêdetirî wê rojevê wê bi xwe re wê dagirin.

Di temenê wê de wê, di awayekê de wê, sê alî wê bi hevdû re wê, bi kortasî bi danîna têkiliya wan a bi hevdû re wê temenê geomeriya dahûrî wê, di awayekê de wê biafirê. Ev jî wê, rewşa bûjenî a heyî, matematik û fîzîk bê. Di wê rewşê de wê, rewşa fîzîk û bûjenê wê, weke du rewşên ku em çendî ku wan di hinek rewşan de weke hevdû û bi hevdû re wan werênina ser ziman lê wê di gelek rewşan de jî wê ji hevdû cûda bin. Her bûjen wê, bifîzîkî wê mirov karibê wê werênê ser ziman. Lê her fîzîk wê mirov nikaribê wê bi wê rengê wê, werênê ser ziman. Di aslê xwe de wê, di wê rengê de wê, tevliheviyên ku wê ji wê nûqteyê wê biafirin wê weke aliyekê giring ku mirov wê, dikarê wê, di serî de wê, weke aliyekê giring wê, werênê ser ziman û wê fahmbikê bê. Di têngîna metalyalîsma qaba de wê, di awayekê de wê, her tiştî wê dema ku wê bi bûjenî wê, bi pênasebikê wê, di awayekê de wê, dema ku wê rewşa fîzîka ne bi bûjen ku ew ji nedîtî ve wê were û wê, weke vajî wê pênasebikê wê, di wê rengê de wê, di awayekê de wê, temenê xwe yê lêpîrsînê jî wê bi xwe re wê, weke ku wê bide çêkirin.

Di wê rewşê de wê, weke aliyekê wê yê din jî wê di dewma wê de wê, mirov dikarê wê, werênê ser ziman ku wê, geometriya dahûrî wê weke zaroya hevnasîn û zawaca matematik û felsefeyê a bi hevdû re ku wê di destpêka demên hemdem de wê bi hevdû re bikê jî bê. Wê, di wê rengê de wê, bi wan re wê, divê ku mirov wê, di serî de wê, werênê ser ziman. Di awayekê din de jî wê, geometriya dahûrî wê, di wê rengê de wê li ser temenê fahmkirina fîzîkê re wê rengê de wê, fahmkirina xwe wê, bi aksiyom, teorem, derpêş û mantiqê matematikî re wê, bi felsefeyî jî wê biafirênê. Di wê rengê de wê, weke aliyekê wê yê giring wê, xwe bide nîşandin. Di wê rewşê de wê, geometriya dahûrî wê, di awayekê de wê, di wê rewşê de wê, bi zimanekê cebirî wê dema ku wê, bidest dahûrîkirinê wê bi xwe re wê bide çêkirin wê, di wê rewşê de wê, êdî wê weke têngîn û aliyekê giring ê pêşketina geometriyî jî wê xwe bide nîşandin. Wê, di dewama wê de wê, ji têngîneln geometriyê ên sentetikî û hwd re wê, bi wê re wê, geometriyî wê cûdabûnek kûr wê hin bi hin wê bi xwe re wê bide çêkirin. Di wê rengê de wê, ev jî wê, weke aliyekê wê yê din ê giring ku mirov wê, dikarê wê, di serî de wê, weke aliyekê giring wê fahmbikê û wê werênê ser ziman bê.

Geometriya dahûrî wê, bi zimanê cebirî re wê, qadên ku wê di destpêkê de wê, li wan bi ponijê wê, qada fezeyê bê. Wê, di wê rewşê de wê, di awayekê de wê, derketina dervî têgîna hevrasta rastarast a geometriyî ku wê heta wê demê wê hebê wê, di wê rengê de wê, weke aliyekê din ê ku wê xosletê pêşketina geometriya dahûrî wê bi xwe re wê bide nîşandin bê. Wê dema ku wê denkleme wê were avakirin wê di wê denkleme de wê, aliyê ku wê xwahriyê (curve) wê bi wê re wê bide çêkirin wê weke r wê, li ser wê re wê, weke nîv-çapa wê çawa wê bi wê re wê were ser ziman wê, bi wê re wê, bihizirê. Minaq wê, weke dekleme klasik a wê, bi geometriya dahûrî re wê,  $x^2 + y^2 = r^2$  wê, dikarê wê werênê ser ziman. Di denkleme de wê, di awayekê wê bi cemberî wê her nûqteyên wê koordinatên wê werina destnîşandin kirin. Minaq wê, weke denkleme wê ya navendî wê, wê a herdû aliyên nîv-çap bê wê,  $x^2 + y^2 = 4$  wê werênê ser ziman. Minaq cemberê ku me li jor bahsa wê kir wê, ev denkleme  $x^2 + y^2 < 1$  wê, nûqteyên wê yên derveyî wê werênê ser ziman. Aliyê wê yê hundirîn jî wê, bi awayê bi denkleme wê bi awayê  $x^2 + y^2 > 1$  wê dikarê wê werênê ser ziman. Wê awayê denkleme wê, bi awayê wê yê  $1 < x^2 + y^2 < 4$  wê wekneheviyê wê werênê ser ziman. wê nûqteyên nava herdû qadên cemberê jî wê, bi  $x^2 + y^2 = 1$  ve  $x^2 + y^2 = 4$  wê, dikarê wê werênê ser ziman. Di geometriya dahûrî de wê, ji hevrastên  $x$  û  $y$  yê wê, heta hevrast  $z$  yê wê, di awayekê de wê, bikê ku wê bide nîşandin.

Di dewama wê de wê, dema ku em hewl bidin ku wê, têgîna eliptîkî û ankû xwahriyê (curve) wê werênê ser ziman wê, di dewama wê de em, dikarin wê bi wê rengê wê, bi berdeyamî wê werênina ser ziman. Xateka ku wê, hevrastî wê, weke temenekê ku em bi wê bihizirin bê. awayê wê jî em bi  $y = mx + b$  wê bihizirin û wê werênina ser ziman. Bo çêkerîyek xwahrî wê dmeê em  $x$  bi  $i$  û  $1$  ê re wê lê zêde bikin wê ev ji me re bêjê ku em  $y$  ê lê zêde bikin. Em ku li wê,  $m$  yê bi  $x$  i  $\Delta x$  lê zêde bikin wê,  $y \Delta y = m \Delta x$  zêde bibê. Di xackirina wê de jî wê,  $b$  bi  $y$  yê re wê, bibê. Ber ku wê, hevrastîya xacî a  $y$  yê wê ew li wê bê. Li vir em di dewama wê de dihên rewşek xesas. Ew jî wê ev bê ku emê nûha çawa wê xwahriyê wê çêbikin wê, ew wê, bi  $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$  re wê, di awayekê de wê mirov dikarê wê, çêbikê. Li vir wê, li ser wê re em dikarinwê ê bêjin ku wê heka wê li ser rewşa hevrêziya xacî a  $y$  yê ku wê li ser rêya koordinatên re wê hebê bê wê, hingê ew jî wê em dikarin bi rengê  $y_1 = mx_1 + b$ , ankû  $b = y_1 - mx_1$  wê, mirov dikarê wê, di awayekê de wê, werênê ser ziman. Denklema me ya xate rastarast bi xwahrkirina nûqteyê wê bi awayê  $(y - y_1)/(x - x_1) = m$  û piştê ku em bi çarçûkirinê wê hildin  $(y -$

$y_1) = m(x - x_1)$ , û di dewama wê de jî wê. li ser esasê wê  $y = mx - mx_1 + y_1$  û dewama wê  $mx + b$  bê. Di aslê xwe de wê, di awayekê de wê, dema ku em li ser wê denklema wê bi wê dihizirin em dikarin wê, di dewama wê de wê, werênina ser ziman ku wê, pêşxistina wê, bi awayên wê yê din de jî wê, weke ku me li ser awayên klasik ên ku ew berê hatibûbûna ser ziman re wê hanî ser ziman wê, dikarê wê di dewama wê de wê bikê. Ev wê, di awayekê de wê, weke rengê bi berdewamî bi fahmkirina geometriya dahûrî re wê jî bê.

Geometriya dahûrî wê, di aslê xwe de wê weke mijare û aliyekê geometriyê ê kûr û mirov dikarê wê ji gelek aliyan ve wê, werênê ser ziman bê. Di wê rengê de wê, di wê beşa wê ya piçûk de wê aliyên wê yê ku min hanî li ser ziman de wan bi şemayan û hwd re wê dikarê wê li wê zêdetir bikê û wê werênê ser ziman. Di wê rewşê de wê pêşxistina wê, di awayekê de wê, hertimî wê bi derfet bê. Wê, di awayekê de wê, bi du aliyan mirov dikarê geometriya dahûrî wê fahmbikê. Yek li ser awayê pêşxistina ji hundirê denklema û hwd re wê, bi wê re wê bi kûrbûnê re ku mirov wê bikê. Aliyê din jî wê di berdewama wê de wê, pêşxistinê wê bi alî û awayên wê yê din û nû re wê, dikarê wê bikê. Di wê rengê de wê, derfeta têkiliya wan herdu aliyan jî wan bi hevdu re çêbikê. Wekî din wê her kûrbûn û pêşxistin wê di awayekê de wê, derfet û temenê fahmkirinê nû wê, di dewama wê de wê bi xwe re wê werênin ku mirov wan fahmbikê û ankû bêhtirî di wê de kûr bibê bê. Di wê rengê de wê, di pêşxistina wê ya bi fahmkirinê de wê, weke ku wê, sînor wê nebê.

### **Hin Çavkani:**

- \***Birkar, Kocer**(March 5, 2010)**Topics in algebraic geometry**: Lecture notes of an advanced graduate course
- \* M. Atiyah, I. Macdonald(1969); Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley,
- \* W. Bruns, J. Herzog(1998); Cohen-Macaulay rings. Cambridge University Press,
- \*. Kawamata, K. Matsuda, K. Matsuki; Introduction to the minimal model problem. Algebraic geometry (Sendai, 1985), Adv. Stud. Pure Math., no. 10, North-Holland, Amsterdam.
- \* Kollar; Mori(1998); Birational geometry of algebraic varieties. Cambridge University Press,
- \*D. Eisenbud(1995); Commutative algebra with a view toward algebraic geometry. Springer,
- \*Hacon, Christopher(august, 2018) The Mathematical Work of Caucher Birkar, University of Utah/publishing
- \*Anton, Howard (1987), Elementary Linear Algebra (5th ed.), New York: Wiley,
- \*Ball, W.W. Rouse (1960) [1908]. A Short Account of the History of Mathematics (4th ed.). Dover Publications
- \* David S. Dummit, Richard M. Foote(2004). Abstract Algebra. John Wiley & Sons, Inc.
- \*Mumford, David (1999) [1967], The red book of varieties and schemes, Lecture Notes in Mathematics, 1358 (expanded, Includes Michigan Lectures (1974) on Curves and their Jacobians ed.), Berlin, New York: Springer-Verlag,
- \*FALTINGS (1991), “Diophantine approximation on abelian varieties”. Ann. of Math
- \*D. G. NORTHCOTT (1950), “Periodic points on an algebraic variety”. Ann. of Math
- \*Hodge, W. V. D.; Pedoe, Daniel (1994). Methods of Algebraic Geometry Volume 1. Cambridge University Press.
- \*Hodge, W. V. D.; Pedoe, Daniel (1994). Methods of Algebraic Geometry Volume 2. Cambridge University Press.

- \*Caviness, Bob F.; Johnson, Jeremy R. (1998). Quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition. Springer-Verlag.
- \*Dickenstein, Alicia; Schreyer, Frank-Olaf; Sommese, Andrew J., eds. (2008). Algorithms in Algebraic Geometry. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications. Springer.
- \*Reid, Miles (1988). Undergraduate Algebraic Geometry. Cambridge University Press.
- \*Breitenberger, E. (2006). "Johann Benedict Listing". In James, I.M. (ed.). History of Topology. North Holland
- \*Donaldson, S. (2011). Riemann surfaces. Oxford University Press
- \*George L. Hersey (March 2001). Architecture and Geometry in the Age of the Baroque. University of Chicago Press
- \*Roger Temam (11 December 2013). Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Springer Science & Business Media
- \*Ossendrijver, Mathieu (29 January 2016). "Ancient Babylonian astronomers calculated Jupiter's position from the area under a time-velocity graph". Science.
- \*Depuydt, Leo (1 January 1998). "Gnomons at Meroë and Early Trigonometry". The Journal of Egyptian Archaeology
- \*Howard Eves(1990), An Introduction to the History of Mathematics, Saunders,
- \*Morris Kline (March 1990). Mathematical Thought From Ancient to Modern Times: Volume 3. Oxford University Press, USA
- \*David Berlinski (8 April 2014). The King of Infinite Space: Euclid and His Elements. Basic Books,
- \*Robin Hartshorne (11 November 2013). Geometry: Euclid and Beyond. Springer Science & Business Media.
- \*Clara Löh (19 December 2017). Geometric Group Theory: An Introduction. Springer
- \*B. Choudhary (1992). The Elements of Complex Analysis. New Age International.
- \* Pascal Hitzler; Anthony Seda (2016-04-19). Mathematical Aspects of Logic Programming Semantics. CRC Press

•  
Abdusamet Yigit, cizirabota, Kurdistan, ji sale 2019 heta destpêka sale 2021'ê..