BÎRKARÎ

AMADEYÎ 2

2019/2020

AMADEKAR

Ev pirtûk ji aliyê Komîteya Bîrkariyê ve hatiye amadekirin.

LÊVEGER

- Komîteya Şopandinê

- Komîteya Fotoşopê

- Komîteya Redekteyê

Ev pirtûk ji aliyê Saziya Minhacan ve, wek pirtûka wanedayînê, ji bo dibistanan hatiye pejirandin.

NAVEROK

BEŞA YEKEM: FONKISYON

1. FONKISYONÊN HEJMARÎ

2. TAYBETIYÊN FONKISYONÊ

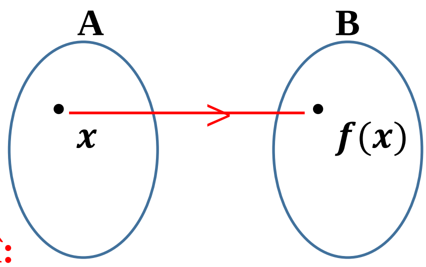
3. GUHARTINA FONKISYONÊ

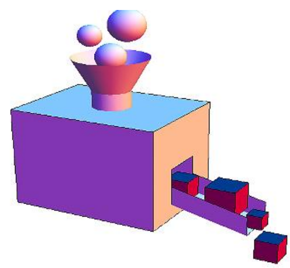
WANEYA YEKEM: FONKISYONÊN HEJMARÎ

Me berê têgîna fonkisyonê nas kiribû û me gotibû ku:

Fonkisyon, têkiliya di navbera du komikên nevala A , B de ye; li gorî ku her endamek ji A bi endamekî tenê ve ji B tê girêdan.

Fonkisyon bi sembolên mîna f , g , h ... tê nîşankirin.



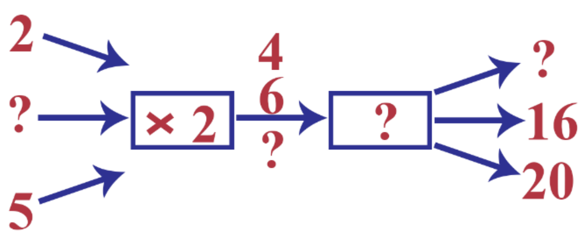


Têbînî:

1. Ji her endamekî $x \in A$ re, beramberekî tenê(wêne) ji komika B heye û bi sembola $f(x)$ tê nîşankirin.

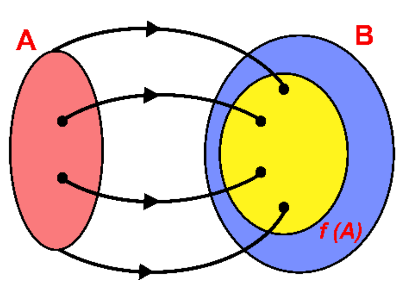
2. Em ji têkiliya di navbera x û $f(x)$ re dibêjin rêgeza girêdanê.

Mînak:



3. Em ji komika A re dibêjin komika pênaseyê û ji komika B re dibêjin komika nirxan.

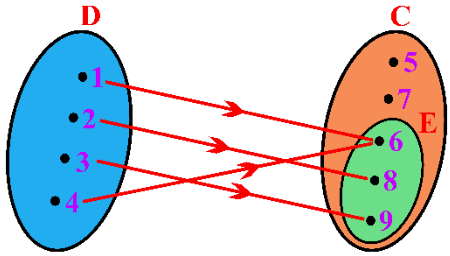
4. Em ji komika wêneyên endamên komika pênaseyê re dibêjin komika nirxan a giştî û bi sembola $f(A)$ tê nîşankirin.



Pênaseya fonkisyona hejmarî

Her fonkisyona ku komika wê ya pênaseyê û ya nirxan komika hejmarên rast ℝ ye yan jî binkomika ℝ ye.

Mînak: Heger f fonkisyoneke hejmarî weke li jêr xêzkirî be:

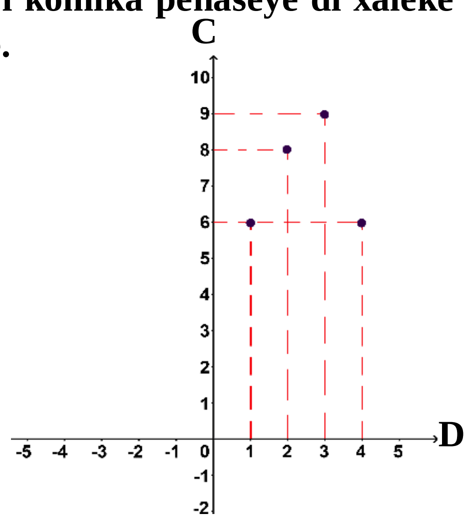


Em ji komika D re dibêjin komika pênaseyê û bi sembola D_f tê nîşankirin.

Em ji komika C re dibêjin komika nirxan.

Em ji komika E re dibêjin komika nirxan a giştî û bi sembola $f(D) = E$ tê nîşankirin.

Em vê fonkisyonê li ser tora kordînatê xêz bikin, em dibînin ku girafîka fonkisyonê, komika xalên cuda ye û xêzika tîkî ya di her xalekê re diçe, ji komika pênaseyê di xaleke tenê re ji xalên fonkisyonê diçe.

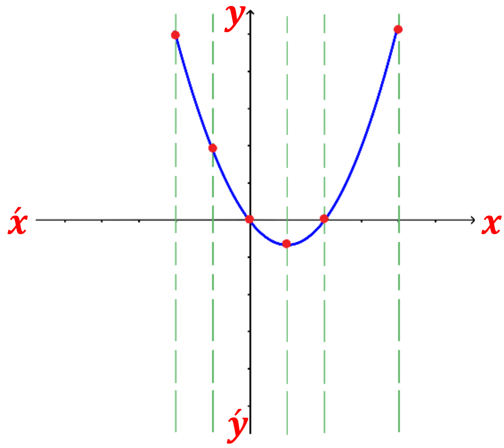


Encam

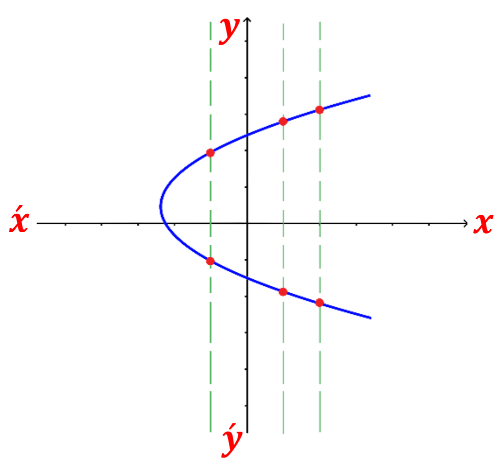
Heger xêzika tîkî li cem her endamekî ji endamên komika pênaseyê bê dîtin, xêzika pêldayî di xaleke tenê de qut dike û xêzika pêldayî fonkisyonê nîşan dide.

Mînak:

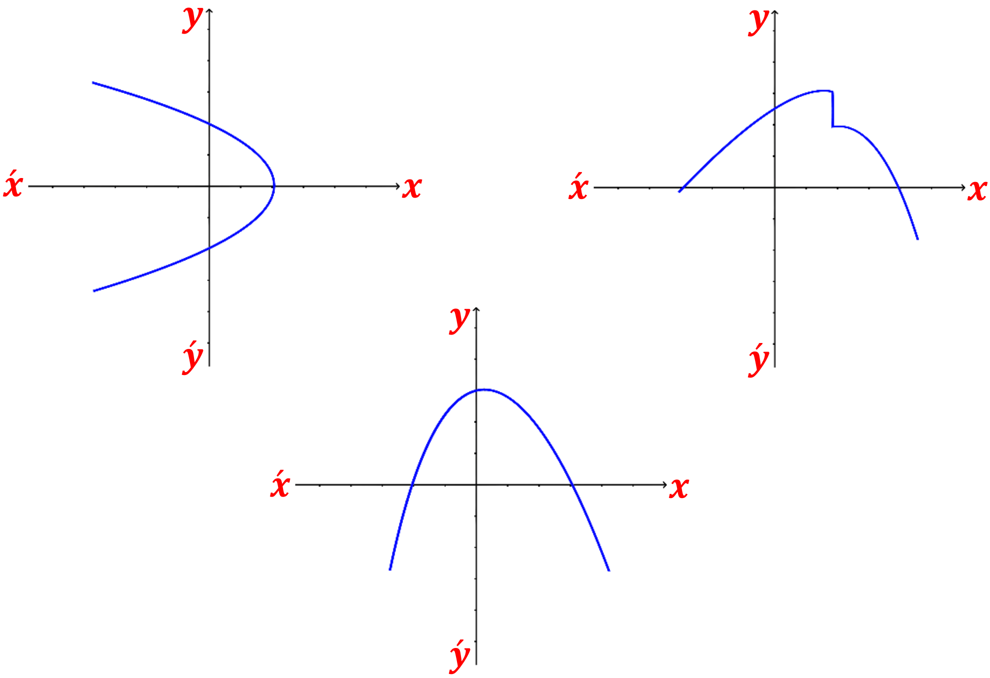
Xêzika girafîkî ya li jêr fonkisyonê nîşan dide, ji ber ku her rastekeke tîk ji komika pênaseya xêzikê di xaleke tenê de qut dike.



Xêzika girafîkî ya li jêr fonkisyonê nîşan nade, ji ber ku rastekeke tîk heye ji komika pênaseya xêzikê di bêhtirî xalekê de qut dike.



Rahênan: Di teşeyên li jêr de, em bibînin ku xêzika girafîkî fonkisyonê nîşan dide yan na:

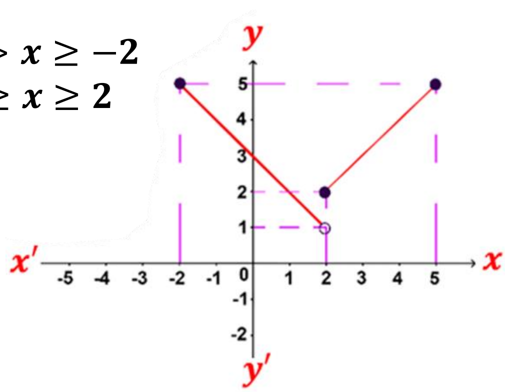


Fonkisyona bişax

Fonkisyoneke hejmarî ye, rêgeza girêdana wê bêhtirî têkiliyekê ye.

Mînak: Em komika pênaseyê ji fonkisyona li jêr re bibînin û girafîkî nîşan bikin û piştre ji xêzkirinê komika nirxan a giştî encamê bigirin:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & : \quad 2 > x \geq -2 \\ x & : \quad 5 \geq x \geq 2 \end{cases}$$



Em dibînin ku:

Şaxê yekem ji fonkisyonê $f_1(x) = 3 - x$ ye, dema ku $2 > x \geq -2$ be, ango di navbera $[-2, 2[$ de pênasekirî ye.

Ew fonkisyoneke tam e û xêzika wê ya girafîkî parçerastekeke ku her du aliyên wê xalên $(2, 1)$ û $(-2, 5)$ in.

Em bazinekî vala li cem xala $(2, 1)$ datînin, ji ber ku $2 \notin [-2, 2[$

Şaxê duyem ji fonkisyonê $f_2(x) = x$ dema ku $5 \geq x \geq 2$ ye, ango di navbera $[2, 5]$ de pênasekirî ye.

Ew fonkisyoneke tam e û xêzika wê ya girafîkî parçerastekeke ku her du aliyên wê xalên $(2, 2)$ û $(5, 5)$ in.

Lê komika pênaseyê ji fonkisyona $f(x)$ re ev e:

$$[-2, 2[\cup [2, 5] = [-2, 5]$$

Ji xêzkirinê em dibînin ku komika nirxan a giştî $]1, 5]$ e.

Têbînî

Fonkisyona nirxê mutleq, fonkisyoneke bişax e li gorî:

$$|x| = \begin{cases} x & : \quad x \geq 0 \\ -x & : \quad x < 0 \end{cases}$$ **komika pênaseya wê $D = \mathbb{R}$**

Rahênan: Em komika pênaseyê ji fonkisyona li jêr re bibînin û girafîkî nîşan bikin û piştre ji xêzkirina komika nirxan a giştî encamê bigirin:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & : \quad 0 > x \geq -2 \\ x + 1 & : \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Naskirina komika pênaseyê ji fonkisyona hejmarî re û bikaranîn li ser wê

Komika pênaseyê ji rêgeza girêdanê ji fonkisyonê re yan ji girafîka wê tê naskirin.

Mînak: Em komika pênaseyê ji fonkisyonên li jêr re bibînin:

- $f(x) = x^2 + 2x$ **fonkisyoneke tam e û di navbera** $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ **de pênasekirî ye.**

- $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ **fonkisyoneke kertî ye û di komika** $D_f = \mathbb{R} \backslash \{sifir\hat{e}n\ paran\hat{e}\}$
- **Dema ku paran yeksanî sifirê be, fonkisyon ne pênasekirî ye:** $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Ango: $D_g = \mathbb{R} \backslash \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

- $h(x) = \sqrt{x-3}$ **fonkisyoneke kokî ye, nîşana wê cot e.**

Ev fonkisyon pênasekirî ye dema ku *b* li bin kokê yeksanî sifirê yan jê mezintir be

$x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

Ango: $D_h = [3, +\infty[$

- $\ell(x) = \sqrt[3]{x-5}$ **fonkisyoneke kokî ye, nîşana wê kit e.**

Komika pênaseyê ji vê fonkisyonê re, komika pênaseya $x - 5$ **e.** $\Rightarrow D_\ell = \mathbb{R}$

- $n(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

Fonkisyon pênasekirî ye dema ku $x^2 - 4 > 0$ **be.**

Em hêmaya wê nîşan bikin:

$x^2 - 4 = 0 \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2$

x	$-\infty$ $\qquad$ -2	$\qquad$ $+2$	$\qquad$ $+\infty$
$x^2 - 4$	$+$ $\quad$ 0	$-$ $\quad$ 0	$+$
$x^2 - 4 > 0$	**Pêkhatî ye**	**Ne pêkhatî ye**	**Pêkhatî ye**

Ji tabloyê em dibînin ku: $D_n =]-\infty, -2[\ \cup\ ]2, +\infty[$

Rahênan: Em komika pênaseyê ji fonkisyonên hejmarî yên li jêr re bibînin:

1. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$

2. $g(x) = \frac{2x+1}{x^2-3x+2}$

3. $h(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

4. $n(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2+5x+4}}$

Bikaranînên li ser fonkisyonan

Heger f_1, f_2 du fonkisyonên di navberên D_1, D_2 de pênasekirî bin, wê demê:

1. $(f_1 \mp f_2)(x) = f_1(x) \mp f_2(x)$

Komika pênaseya $f_1 \mp f_2$: $D_1 \cap D_2$

2. $(f_1 . f_2)(x) = f_1(x) . f_2(x)$

Komika pênaseya $f_1 . f_2$: $D_1 \cap D_2$

3. $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad : \quad f_2(x) \neq 0$

Komika pênaseya $\frac{f_1}{f_2}$: $D_1 \cap D_2 \backslash \{sifirên\ paranê\}$

Mînak: Heger $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = \sqrt{x+2}$ û $h(x) = \sqrt{4-x}$ be, em rêgeza girêdanê û komika pênaseyê ji fonkisyonên li jêr re bibînin:

1. $f+g$ 2. $g-h$ 3. $f.h$ 4. $\frac{h}{f}$

Fonkisyona f fonkisyoneke tam e $\Longrightarrow D_f = \mathbb{R}$

Fonkisyona g fonkisyoneke kokî ye:

$x+2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -2 \Longrightarrow D_g = [-2, +\infty[$

Fonkisyona h fonkisyoneke kokî ye:

$4-x \geq 0 \Longrightarrow -x \geq -4 \Longrightarrow x \leq 4 \Longrightarrow D_h =]-\infty, 4]$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= x^2 - 4x + \sqrt{x+2}$$

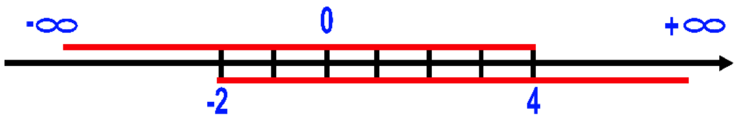
Komika pênaseya fonkisyona $f+g$ ev e:

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap [-2, +\infty[$$
$$= [-2, +\infty[$$

$$(g-h)(x) = g(x) - h(x)$$
$$= \sqrt{x+2} - \sqrt{4-x}$$

Komika pênaseya $g-h$ ev e:

$$D_g \cap D_h = [-2, +\infty[\cap]-\infty, +4]$$
$$= [-2, 4]$$



$(\boldsymbol{f}.\boldsymbol{h})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$

$= (\boldsymbol{x}^2 - 4\boldsymbol{x})\sqrt{4-\boldsymbol{x}}$

Komika pênaseya fonkisyona $\boldsymbol{f}.\boldsymbol{h}$ ev e:

$\boldsymbol{D_f} \cap \boldsymbol{D_h} = \mathbb{R} \cap]-\infty, 4]$

$=]-\infty, 4]$

$\left(\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{f}}\right)(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}$

$= \frac{\sqrt{4-\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{x}^2-4\boldsymbol{x}}$

Komika pênaseya fonkisyona $\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{f}}$ ev e:

$\boldsymbol{x}^2 - 4\boldsymbol{x} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}-4) = 0$

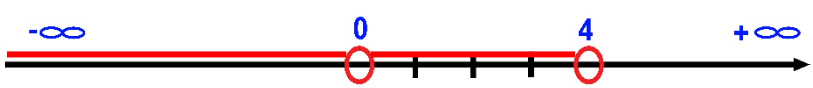
Yan: $\boldsymbol{x} = 0$

Yan jî: $\boldsymbol{x} - 4 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{x} = 4$

$\boldsymbol{D_h} \cap \boldsymbol{D_f} \backslash \{\boldsymbol{sifir\hat{e}n\ paran\hat{e}}\} =]-\infty, 4] \cap \mathbb{R} \backslash \{0, 4\}$

$=]-\infty, 4[\backslash \{0\}$

$=]-\infty, 0[\cup]0, 4[$



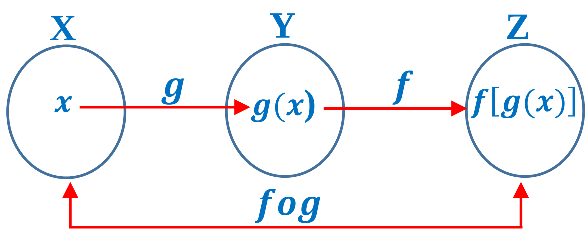
Lêkhatina fonkisyonan

Cureyeke têkeldana du fonkisyonan bi hev re ye bêyî ku komkirin, derxistin, hevdan û parvekirin bi kar bê, ji bo çêkirina fonkisyoneke nû.

Heger $f\,,g$ du fonkisyon bin û komika nirxan a g binkomika komika pênaseya f be yan jî yeksanî wê be, wê demê em dikarin fonkisyoneke lêkhatî bi dest bixin.

Fonkisyona lêkhatî bi sembola fog tê nîşankirin û bi awayê f li pey g tê xwendin.

$$(fog)(x) = f[\,g(x)]$$

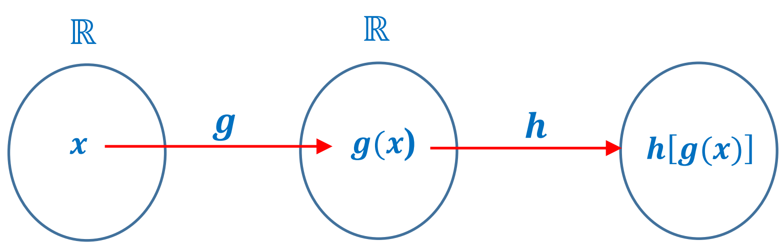


Ango: Heger $g\colon X \longrightarrow Y$ û $f\colon Y \longrightarrow Z$ be, wê demê lêkhatina wan fog, dîtina nirxê f ye dema ku wêneya wê $g(x)$ be.

Mînak: Heger $g(x) = x - 3$, $h(x) = x^2$ be, em hog bibînin:

Em dibînin ku: $D_g = \mathbb{R}$, $D_h = \mathbb{R}$

$$(hog)(x) = h[g(x)] = h(x-3) = (x-3)^2$$



Komika pênaseya lêkhatina du fonkisyonan

Heger D_f komika pênaseya fonkisyona $f(x)$ be

D_g komika pênaseya fonkisyona $g(x)$ be

$D_{(fog)(x)}$ komika pênaseya fonkisyona $(fog)(x)$

Wê demê:

Komika pênaseya fonkisyona fog dibe: $D_{(fog)(x)} \cap D_g$

Lê komika pênaseya fonkisyona gof dibe: $D_{(gof)(x)} \cap D_f$

Mînak: Heger $f(x) = \sqrt{x - 15}$, $g(x) = x^2 + 2x$ du fonkisyon bin, em fonkisyona fog bibînin:

Em dibînin ku: $D_{f(x)} = [15, +\infty[$

$D_{g(x)} = \mathbb{R}$

$$(fog)(x) = f[\,g(x)]$$

$$= f(x^2 + 2x)$$

$$= \sqrt{x^2 + 2x - 15}$$

Em komika pênaseya $(fog)(x)$ bibînin: $x^2 + 2x - 15 \geq 0$

Em hêmaya $x^2 + 2x - 15 = 0$ nas bikin:

$(x - 3)(x + 5) = 0$

Yan: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Yan jî: $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

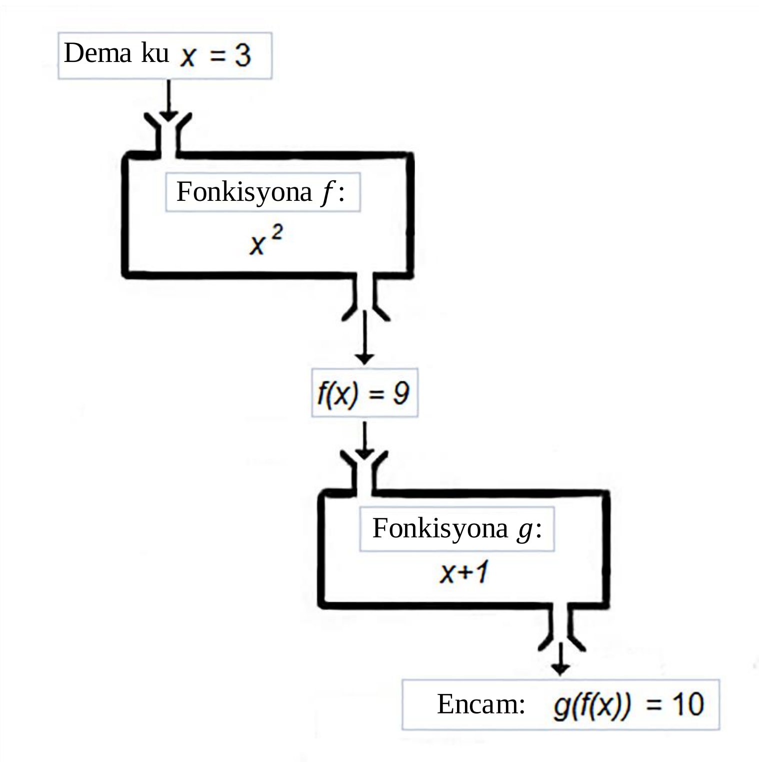
x	$-\infty$	-5		$+3$	$+\infty$
$x^2 + 2x - 15$	+	0	−	0	+
$x^2 + 2x - 15 \geq 0$	Pêkhatî ye		Ne pêkhatî ye		Pêkhatî ye

Ango: **Komika pênaseyê** $D_{(fog)(x)} =]-\infty, -5] \cup [3, +\infty[$ **ye.**

Komika pênaseya fonkisyona fog **dibe:**

$$D_{fog} = D_{(fog)(x)} \cap D_g =]-\infty, -5] \cup [3, +\infty[\cap \mathbb{R}$$
$$=]-\infty, -5] \cup [3, +\infty[$$

Mînak: **Em bikaranîna lêkhatina fonkisyonan bibînin:**



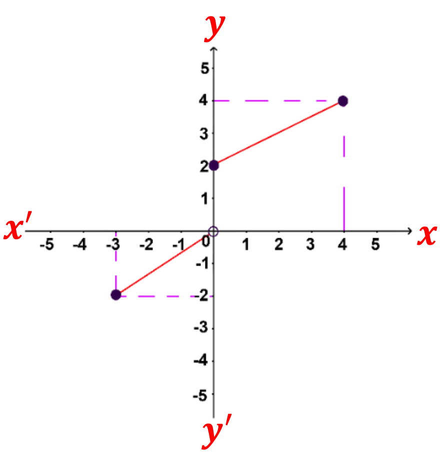
Em bi mamoste û hevalên xwe re goftûgo bikin:

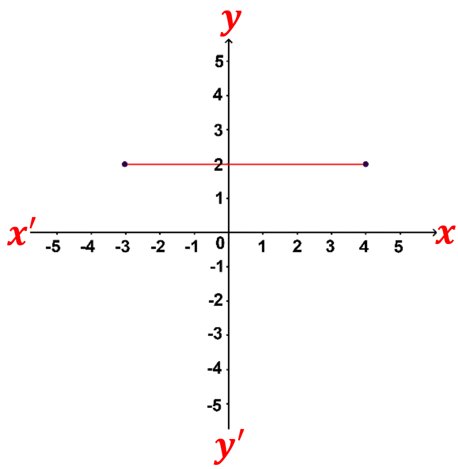
1. Lêkhatina fonkisyonan hevguhêr e?

2. Lêkhatina fonkisyonan yekgirtî ye?

HÎNDARÎ

1. Di her du teşeyên li jêr de, em komika pênaseyê û komika nirxan a giştî ji fonkisyonê re encamê bigirin:





2. Em komika pênaseya fonkisyonên hejmarî yên li jêr bibînin:

$$f_1(x) = 5 \qquad f_2(x) = \frac{x+1}{x-6}$$

$$f_3(x) = \sqrt{x^2 - 16} \qquad f_4(x) = \sqrt[3]{5 - x}$$

$$f_5(x) = \frac{5}{\sqrt{9 - x^2}}$$

3. Heger $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$ du fonkisyon bin, em komika pênaseya fonkisyonên li jêr bibînin:

$$f + g \quad , \quad f.g \quad , \quad \frac{f}{g} \quad , \quad \frac{g}{f}$$

4. Heger $f(x) = x^2 - 6$, $g(x) = 3x$ du fonkisyon bin:

- Em fog , gof bibînin û hevrû bikin, em çi encamê digirin?

- Em $(fog)(3)$ bibînin.

- Heger $(fog)(x) = 42$ be, em nirxên x bibînin.

5. Em komika pênaseyê ji fonkisyona li jêr re bibînin û girafîkî nîşan bikin û piştre ji xêzkirina komika nirxan a giştî encamê bigirin:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & : \quad x \geq 2 \\ 2x - 1 & : \quad x < 2 \end{cases}$$

WANEYA DUYEM: TAYBETIYÊN FONKISYONÊ

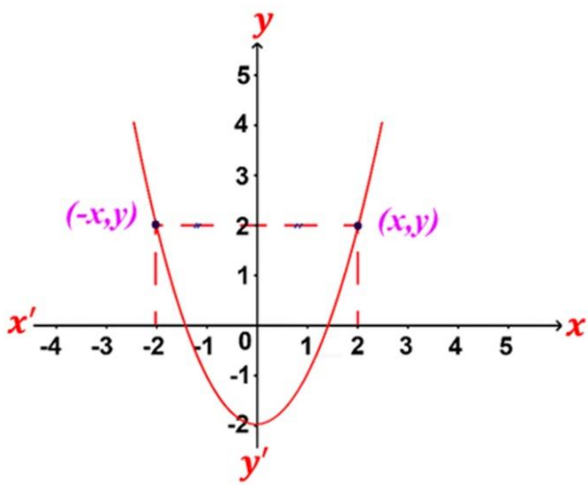
Xêzkirina girafîkî ji hinek fonkisyonan re taybetiyên geometriyî digire.

Em dikarin van taybetiyan di xwendina fonkisyonan û pêkanînên wê de bi kar bînin.

Girîngtirîn taybetiyên geometriyî sîmetrîkiya li gorî tewereya $y'y$ ye û sîmetrîkî li gorî navenda kordînatê ye.

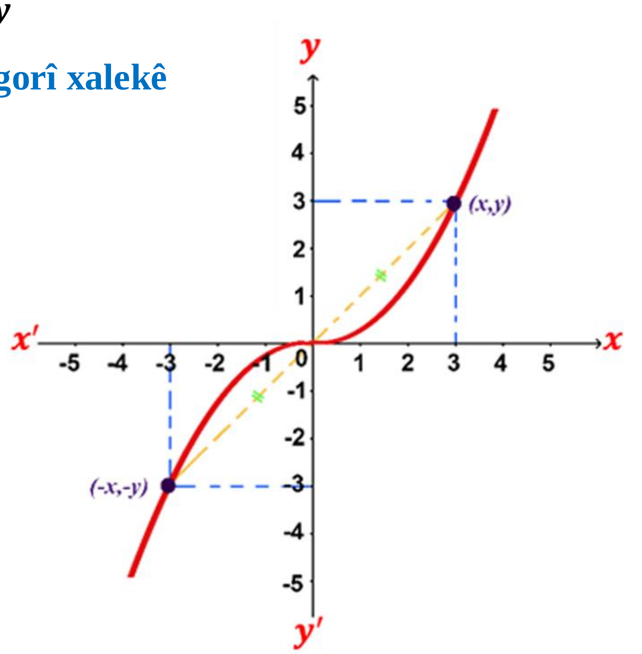
Pêşgotin: Me berê tewereya li gorî rastekekê nas kiriye û gotiye ku teşe li derdora rastekê tê tewandin ji bo her du nîvên teşeyê tam yeksaneyî bibînin.

1. Sîmetrîkî li gorî tewereya $y'y$



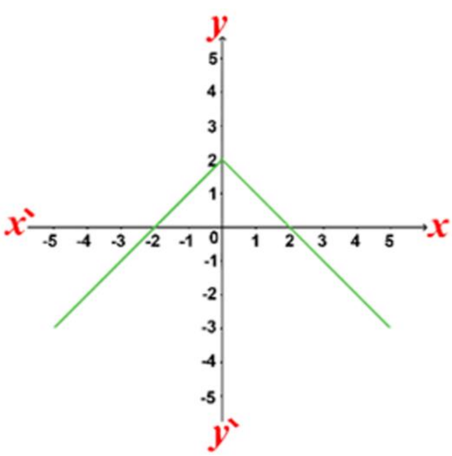
Em dibînin ku xala $(-x, y)$ ya li ser xêzika girafîkî wêneya xala (x, y) ye ya li ser xêzika girafîkî li gorî sîmetrîkiya li gorî tewereya $y'y$

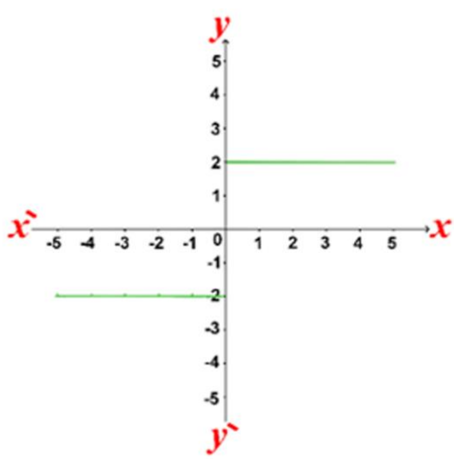
2. Sîmetrîkiya li gorî xalekê



Em dibînin ku xala $(-x, -y)$ ya li ser xêzika girafîkî wêneya xala (x, y) ye ya li ser xêzika girafîkî li gorî xala navendê (O).

Rahênan: Em sîmetrîkiya tewereyî û ya navendî di her du teşeyên li jêr de, bibînin:





3. Fonkisyona cot û fonkisyona kit

1. Em ji fonkisyona $f: X \longrightarrow Y$ re dibêjin fonkisyoneke cot e, heger $x \in X$ be, wê demê: $-x \in X$

Di heman demê de: $f(-x) = f(x)$

Têbînî

Xêzika girafîkî ji fonkisyona cot re li gorî tewereya $y'y$ sîmetrîk e.

2. Em ji fonkisyona $f: X \longrightarrow Y$ re dibêjin fonkisyoneke kit e, heger $x \in X$ be, wê demê: $-x \in X$

Di heman demê de: $f(-x) = -f(x)$

Têbînî

Xêzika girafîkî ji fonkisyona kit re li gorî xala navendê sîmetrîk e.

Baldarî: Hinek fonkisyon hene ne kit û ne cot in.

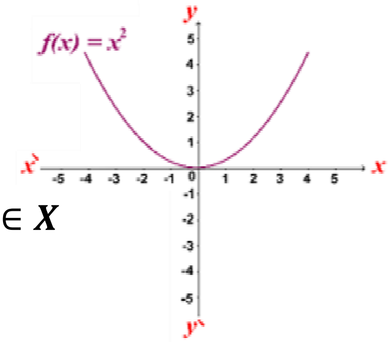
Encam: Ji bo tekezkirina cotbûn an jî kitbûna fonkisyonekê, divê du merc pêk bên:

1. Tekezkirina ku heger $x \in X$ be,wê demê: $-x \in X$

2. Tekezkirina $f(-x) = f(x)$ yan jî $f(-x) = -f(x)$

Em dibînin ku dema mercê yekem pêk neyê, pêwîstî bi dîtina mercê duyem tune ye, ji ber ku fonkisyon ne kit û ne cot e jî.

Mînak: Em cureya fonkisyonê bibînin, kit an cot an jî ne kit û ne cot e:



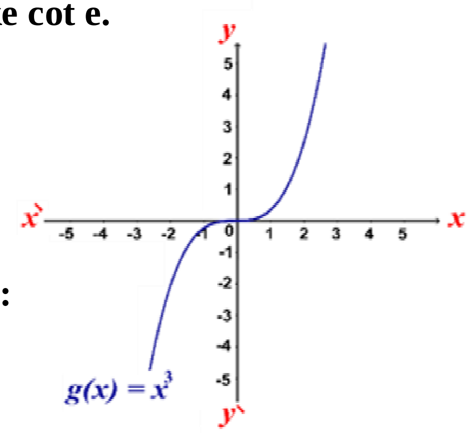
- $f(x) = x^2$

Komika pênaseyê: $D_f = \mathbb{R}$

1) Heger $x \in X$ be, wê demê: $-x \in X$

2) $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

Em dibînin ku f fonkisyoneke cot e.



- $g(x) = x^3$

Komika pênaseyê: $D_g = \mathbb{R}$

1) Heger $x \in X$ be, wê demê:

$-x \in X$

2) $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$

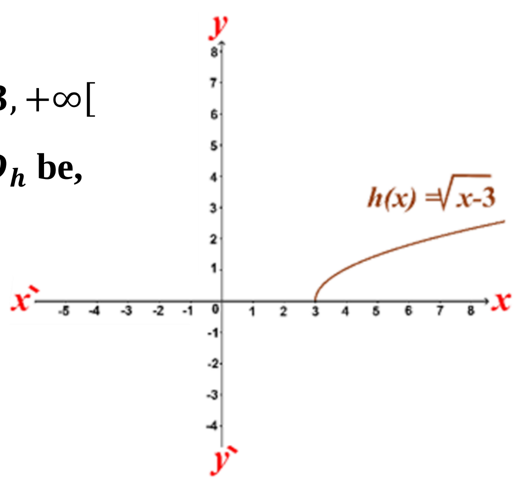
Em dibînin ku g fonkisyoneke kit e.

- $h(x) = \sqrt{x-3}$

Komika pênaseyê: $D_h = [3, +\infty[$

Em dibînin ku heger $5 \in D_h$ be,

wê demê: $-5 \notin D_h$



Ango: Mercê yekem ne pêkhatî ye, ji ber vê yekê dîtina mercê duyem ne pêwîst e.

Em dibînin ku h fonkisyoneke ne kit û ne cot e.

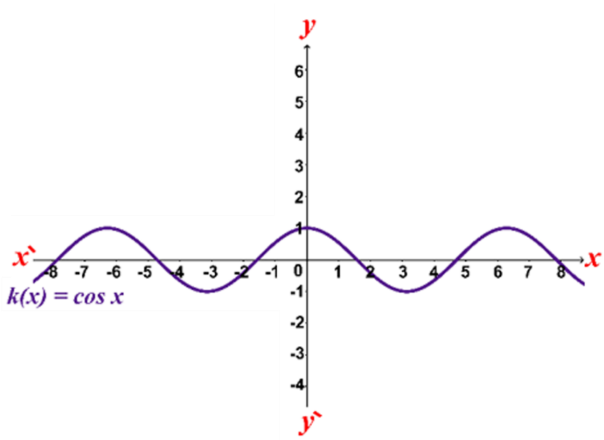
- $k(x) = cos\ x$

Komika pênaseyê: $D_k = \mathbb{R}$

1) Heger $x \in \mathbb{R}$ be, wê demê: $-x \in \mathbb{R}$

2) $k(-x) = cos(-x) = cosx = k(x)$

Em dibînin ku k fonkisyoneke cot e.



Encam

Em ji fonkisyona $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f(x) = ax^n : a \neq 0 , n \in \mathbb{Z}^+$ re dibêjin fonkisyona hêz û ew fonkisyoneke cot e heger n hejmareke cot be û fonkisyoneke kit e heger n hejmareke kit be.

Rahênan: Em cureya fonkisyonê bibînin, kit an cot an jî ne kit û ne cot e:

$f(x) = 3$ $\qquad$ $g(x) = x^3 - 2$

$h(x) = sin\ x$ $\qquad$ $k(x) = \sqrt{1 - x}$

Taybetiyên fonkisyonên kit û cot

Heger f_1, f_2 du fonkisyonên cot bin û g_1, g_2 du fonkisyonên kit bin, wê demê:

1. $f_1 + f_2$ fonkisyoneke cot e.

2. $g_1 + g_2$ fonkisyoneke kit e.

3. $f_1 . f_2$ fonkisyoneke cot e.

4. $g_1 . g_2$ fonkisyoneke cot e.

5. $f_1 . g_1$ fonkisyoneke kit e.

6. $f_1 + g_1$ fonkisyoneke ne kit û ne cot e jî.

Rahênan: **Em cureya fonkisyonê bibînin, kit an cot e an jî ne kit û ne cot e:**

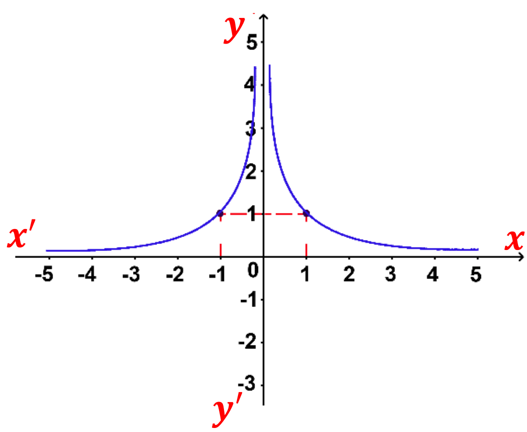
$f(x) = x^2 + \cos x$ $\qquad$ $g(x) = x^2 . \cos x$

$h(x) = x^3 . \sin x$ $\qquad$ $k(x) = x^3 + x^2$

$z(x) = \sin x + \cos x$ $\qquad$ $q(x) = x^3 - \sin x$

$e(x) = \sin x . \cos x$ $\qquad$ $i(x) = x^3 . \cos x$

Mînak: **Heger** $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & : x < 0 \\ \frac{1}{x} & : x > 0 \end{cases}$ **fonkisyonek be, li gorî xêzika wê ya girafîkî li jêr, em diyar bikin ku ev fonkisyon cot e û cebirî tekez bikin:**



Geometriyî: em ji xêzkirinê dibînin ku xêzika girafîkî li gorî tewereya $y'y$ sîmetrîk e, ango fonkisyon cot e.

Cebirî: Komika pênaseyê: $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

1. Heger $x \in D$ be,wê demê: $-x \in D$

$$2.\ f(-x) = \begin{cases} \frac{1}{-(-x)} & : \ (-x) < 0 \\ \frac{1}{-x} & : \ (-x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x} & : \ x > 0 \\ \frac{1}{-x} & : \ x < 0 \end{cases}$$

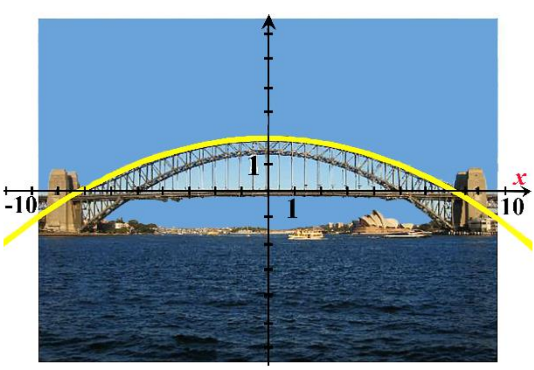
$$f(-x) = \begin{cases} \frac{1}{-x} & : \ x < 0 \\ \frac{1}{x} & : \ x > 0 \end{cases}$$

Em dibînin ku $f(-x) = f(x)$

Ango: Fonkisyon cot e.

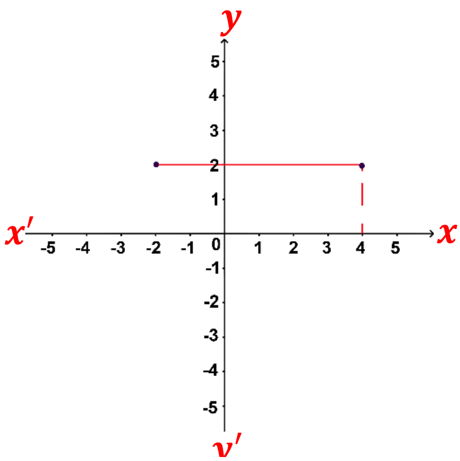
Rahênan 1: Em fonkisyona $f(x) = \begin{cases} x + 2 & : x \geq -2 \\ -x - 2 & : \ x < -2 \end{cases}$ girafîkî nîşan bikin û cebirî diyar bikin ku cot an kit an jî ne kit û ne cot e.

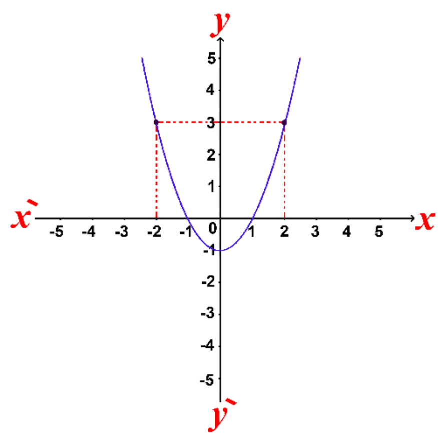
Rahênan 2: Wêneya pirê pêkanînê ji fonkisyona cot re nîşan dike yan na û çima?

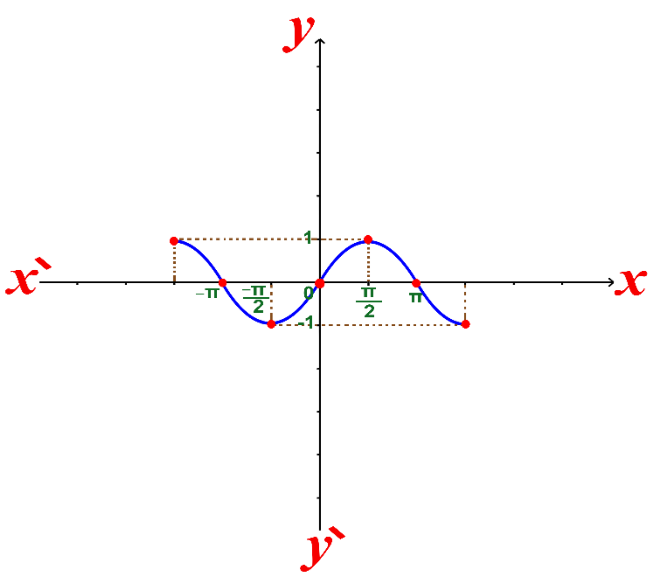


HÎNDARÎ

1. Em cureya fonkisyonên bi teşeyên li jêr nîşankirî bibînin li gorî ku kit an cot an jî ne kit û ne cot in:







2. Em cureya fonkisyonê bibînin, kit an cot e an jî ne kit û ne cot e:

$$f(x) = x^4 + x^2 - 1 \qquad h(x) = x^2 - 3x$$

$$g(x) = \frac{x^3 + 2}{x - 3} \qquad k(x) = \sqrt{x^2 + 6}$$

3. Em fonkisyona li jêr girafîkî nîşan bikin û cebirî diyar bikin ku cot an kit an jî ne kit û ne cot e.

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x + 1 : x \geq 0 \\ 1 - x : x < 0 \end{cases}}$$

4. Em xêzika pêldayî girafîkî ku mercên li jêr pêk bîne, nîşan bikin:

- Di xalên $(\mathbf{0}, -\mathbf{2}), (\mathbf{2}, \mathbf{2}), (\mathbf{3}, \mathbf{7})$ re diçe û fonkisyoneke cot nîşan dike.

- Di xalên $(\mathbf{0}, \mathbf{0}), (-\mathbf{2}, \mathbf{1}), (-\mathbf{3}, \mathbf{5})$ re diçe û fonkisyoneke kit nîşan dike.

WANEYA SÊYEM: GUHERTINA FONKISYONÊ

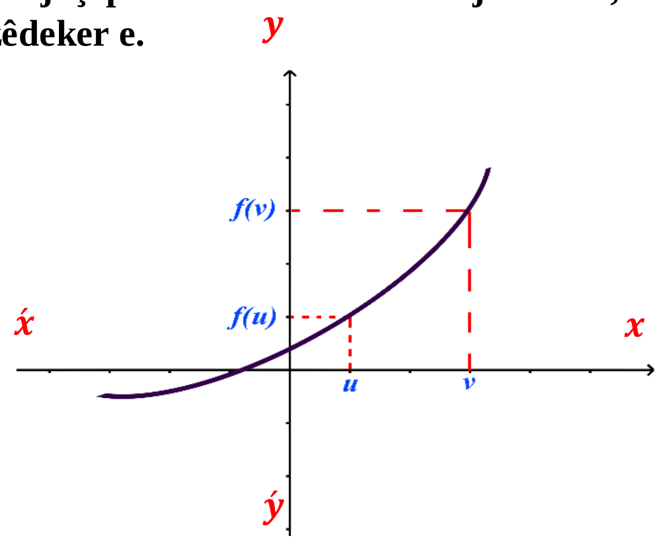
1. Fonkisyona tam zêdeker: **Em ji fonkisyona f re dibêjin di navbera I de tam zêdeker e, heger ev merc pêk hat:**

Heger u , v du hejmarên di navbera I de bin, wê demê:

$$u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$$

Heger $u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$ be, fonkisyon zêdeker e

Baldarî: **Dema ku xêzik girafîkî ji fonkisyonê re di navberekê de ji çep ber bi rastê ve ber bi jor ve be, wê demê fonkisyon zêdeker e.**



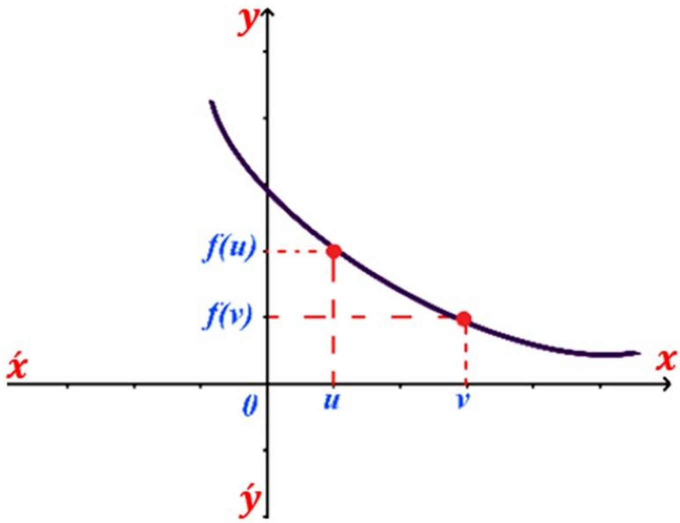
2. Fonkisyona tam kêmker: **Em ji fonkisyona f re dibêjin di navbera I de tam kêmker e, heger ev merc pêk hat:**

Heger u , v du hejmarên di navbera I de bin, wê demê:

$$u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$$

Heger $u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v)$ be, fonkisyon kêmker e

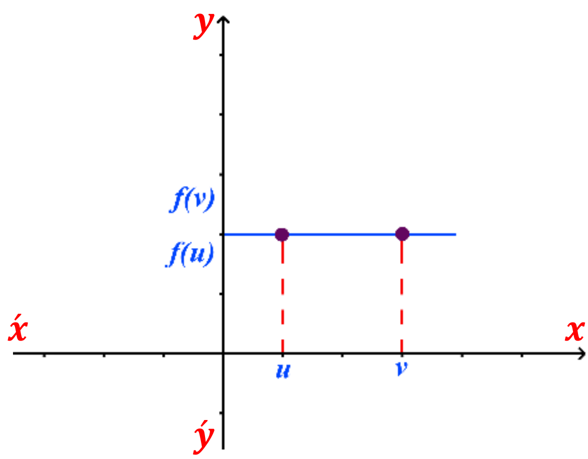
Baldarî: **Dema ku xêzika girafîkî ji fonkisyonê re di navberekê de ji çep ber bi rastê ve ber bi jêr ve be, wê demê fonkisyon kêmker e.**



3. Fonkisyona neguhêr: Em ji fonkisyona f re dibêjin di navbera I de neguhêr e, heger ev merc pêk hat:

Heger u , v du hejmarên di navbera I de bin, wê demê:

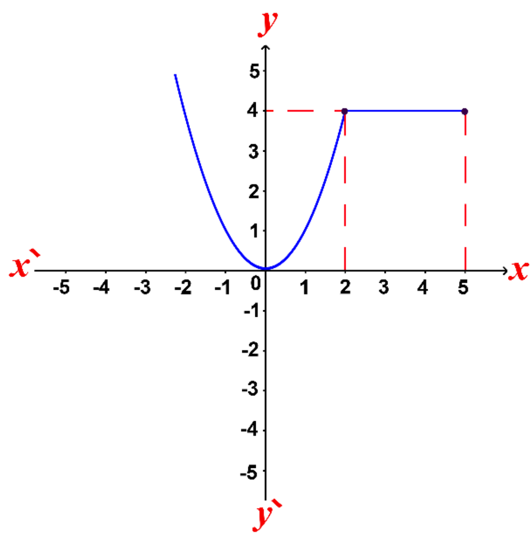
$$u < v \Rightarrow f(u) = f(v)$$



Têbînî

Em ji fonkisyonekê re dibêjin di navbera I de tê guhartin heger di vê navberê de zêdeker an kêmker an jî neguhêr be.

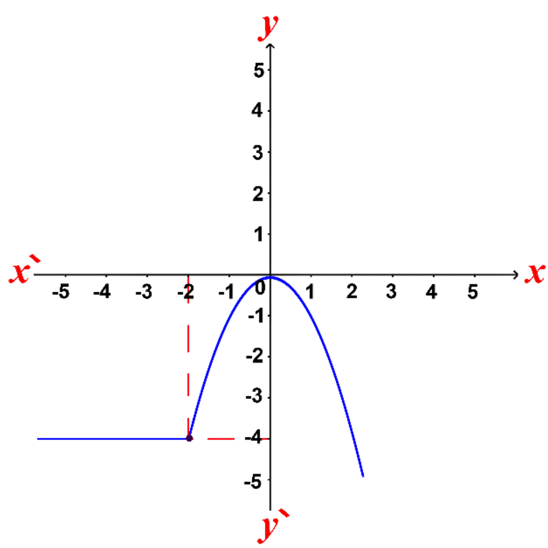
Mînak: Em guhartina fonkisyona di teşeya girafîkî de nîşankirî bibînin:



Em dibînin ku fonkisyon di navbera $]-\infty, 0[$ de kêmker e.

Lê fonkisyon di navbera $]0, 2[$ de zêdeker e û di navbera $]2, 5[$ de fonkisyoneke neguhêr e.

Rahênan: Di teşeya li jêr de, em guhartina fonkisyona bi teşeya girafîkî nîşankirî bibînin:



4. fonkisyona pirpêkhate:

Me berê dîtiye ku rêgeza girêdana fonkisyona pirpêkhate bi vî awayî ye:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_n \quad : \qquad a_n \neq 0 \;, n \in \mathbb{Z}^+$$

Me $a_n x^n$ bi navê pêkhateya bingehîn nas kiriye.

Xêzkirina xêzika girafîkî ji hinek fonkisyonan re:

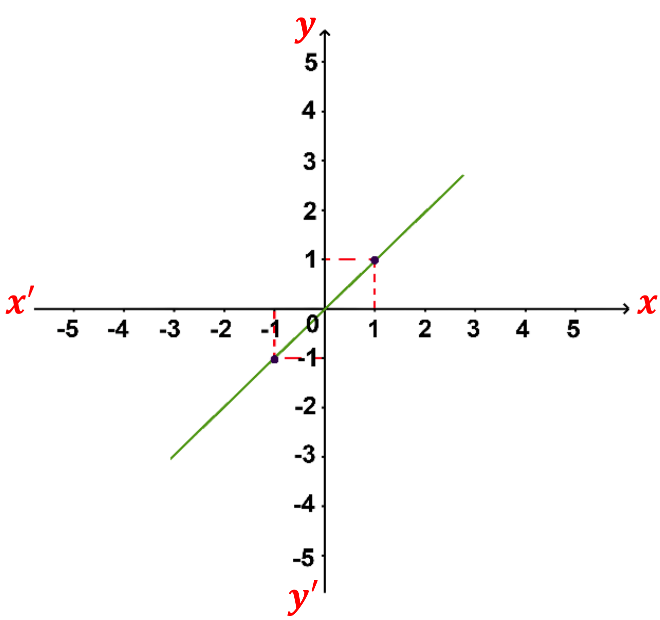
1. Fonkisyona pirpêkhate

- Fonkisyona bi awayê $f(x) = x$:

Di vê fonkisyonê de, her endamek bi xwe ve tê girêdan û rastekeke ku di navenda $O(0,0)$ re diçe û xwariya wê yeksanî yekê be, wê nîşan dike.

Fonkisyon di $\mathbb{R}$ de pênasekirî ye û komika nirxan ya giştî $\mathbb{R}$ ye û ew fonkisyoneke kit e, çima?

Fonkisyona f di $\mathbb{R}$ de fonkisyoneke zêdeker e.

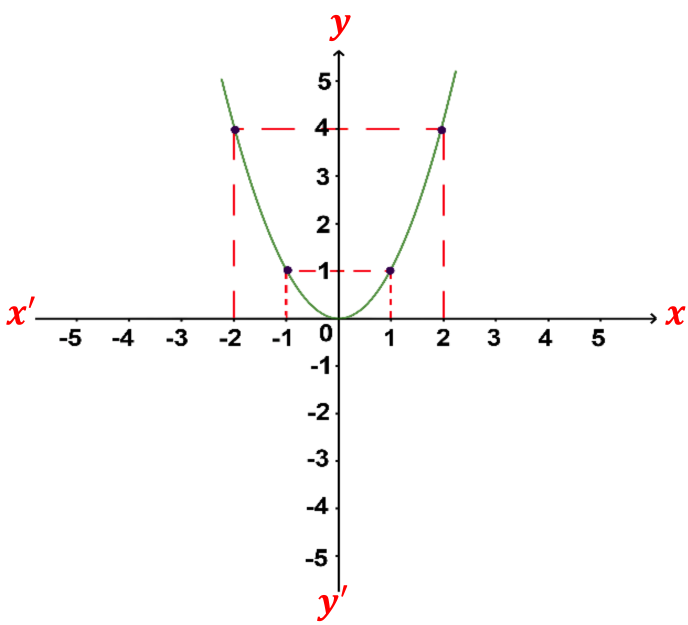


- Fonkisyona bi awayê $f(x) = x^2$:

Di vê fonkisyonê de, her endamek bi dama xwe ve tê girêdan û xêzikeke pêldayî, vekirî û ber bi jor ve wê nîşan dike û ew fonkisyoneke cot e, çima?

Lûtkeya wê $O(0,0)$ e û ew di $\mathbb{R}$ de pênasekirî ye û komika nirxan ya giştî $\mathbb{R}$ ye û ew di navbera $]-\infty, 0[$ fonkisyoneke kêmker e û di navbera $]0, +\infty[$ de zêdeker e.

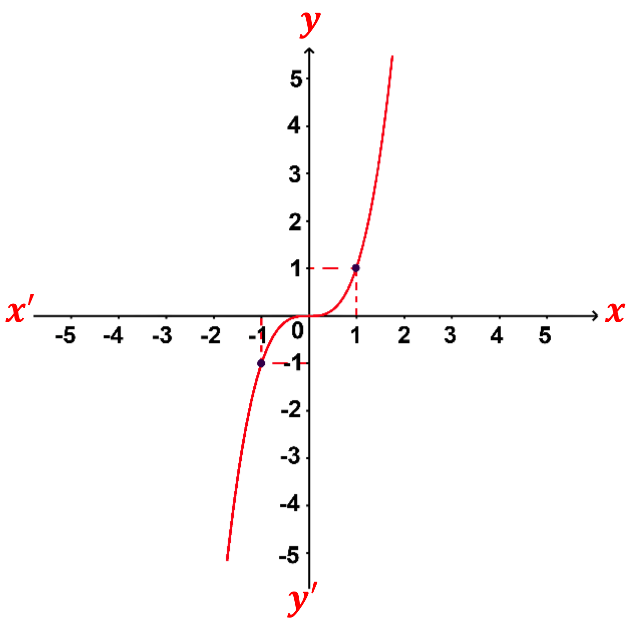
Em ji vê teşeya girafîkî re dibêjin parabol



- Fonkisyona bi awayê $f(x) = x^3$:

Di vê fonkisyonê de, her endamek bi kaba xwe ve tê girêdan û xêzikeke pêldayî ku xala sîmetrîkiya wê $O(0,0)$ be, wê nîşan dike.

Her wiha fonkisyoneke kit e û di $\mathbb{R}$ de pênasekirî ye û komika nirxan a giştî $\mathbb{R}$ ye û ew di $\mathbb{R}$ de fonkisyoneke zêdeker e.



2. Fonkisyona nirxê mutleq

Fonkisyoneke ku rêgeza girêdana wê bi vî awayî ye:

$$f(x) = |x| \ : x \in \mathbb{R}$$

Ew fonkisyoneke bişax e û bi vî awayî tê nivîsîn:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & : \ x \geq 0 \\ -x : & x < 0 \end{cases}$$

Taybetiyên fonkisyona nirxê mutleq

Çi qasî $x \in \mathbb{R}$ be, wê demê:

1) $|x| \geq 0$

2) $|x| = |-x|$

3) $|x| = \sqrt{x^2}$

Xêzkirina xêzika wê ya girafîkî

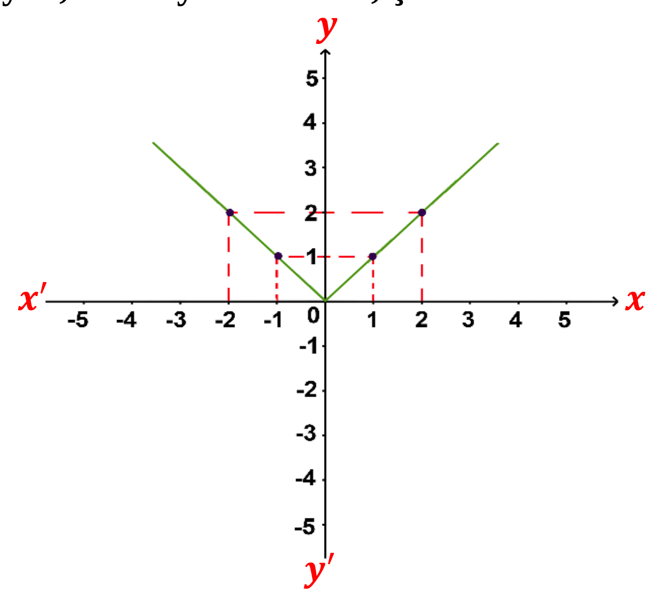
Beşa yekem: **Nîvrastekeke ku ji xala navendê dest pê dike û xwariya wê yeksanî 1 ye û di navbera $]0, +\infty[$ de zêdeker e.**

Beşa duyem: **Nîvrastekeke ku ji xala navendê dest pê dike û xwariya wê yeksanî 1 ye û di navbera $]-\infty, 0[$ de kêmker e.**

Komika pênaseya fonkisyona nirxê mutleq $\mathbb{R}$ e.

Komika nirxan a giştî $[0, +\infty[$ ye.

Ev fonkisyon, fonkisyoneke cot e, çima?



3. Fonkisyona kertî

Awayê herî sade ji fonkisyona kertî re $f(x) = \frac{1}{x}$ **:** $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Di vê fonkisyonê de her endamek bi vajiya xwe ve tê girêdan û xêzikeke pêldayî ya li gorî $O(0, 0)$ sîmetrîk wê nîşan dike û ji du parçeyan pêk tê, parçeyek di çaryeka yekem de ye û ya din jî di çaryeka sêyem de ye û her parçeyek nêzî her du tewereyan dibe û wan qut nake.

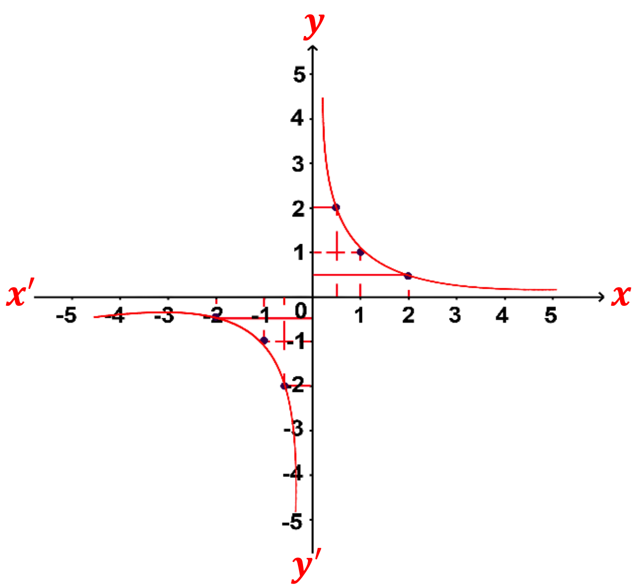
Ji ber vê yekê em dibêjin ku rasteka $x = 0$ (ya li ser $y'y$) nêzîkera tîkî ya xêzika girafîkî ye.

Di heman demê de rasteka $y = 0$ (ya li ser $x'x$) nêzîkera asoyî ya xêzika girafîkî ye.

Komika pênaseya fonkisyona kertî $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ye û komika nirxan a giştî $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ye.

Fonkisyon kit e, çima?

Fonkisyon di navbera $]-\infty, 0[$ de kêmker e û di navbera $]0, +\infty[$ de zêdeker e.



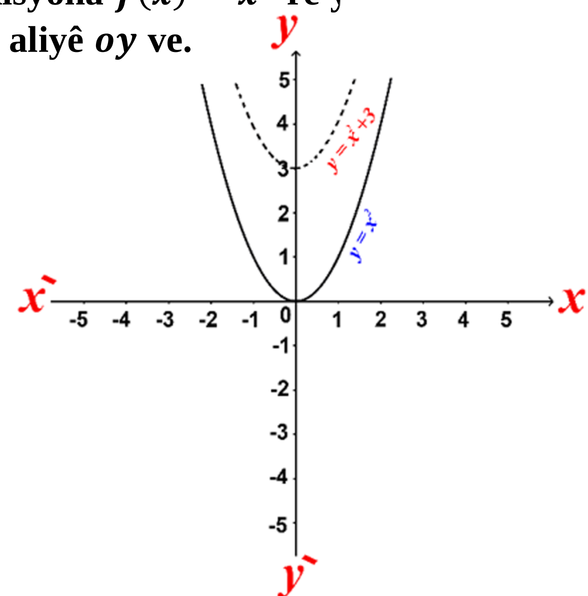
Guhartinên geomertiyî ji xêzika girafîkî ya fonkisyonê re

1. Kişandina tîkî ji xêzika girafîkî re

Ji bo xêzkirina girafîkî ji fonkisyona $f(x) + b$ re, em xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x)$re xêz bikin û piştre bi qasî b men bi aliyê oy ve bikişînin, heger $b > 0$ be û bi aliyê oy' ve bikişînin, heger $b < 0$ be.

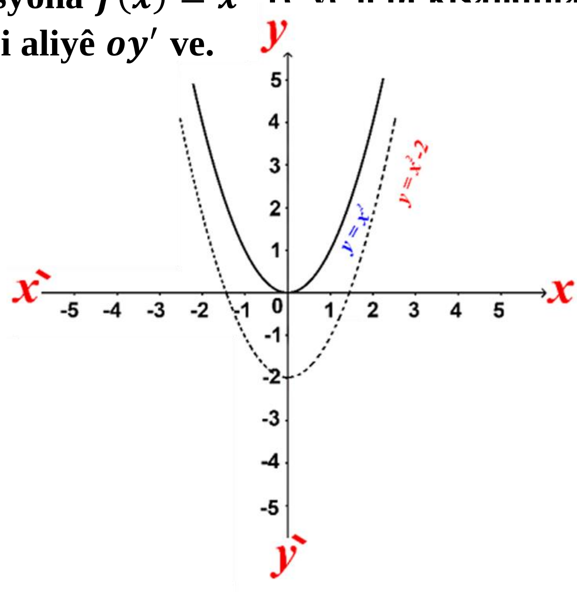
Mînak 1: Em xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = x^2 + 3$ re xêz bikin:

Em dibînin ku xêzika girafîkî ji vê fonkisyonê re, heman xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = x^2$ re ye û bi kişandina wê bi qasî 3 menan bi aliyê oy ve.



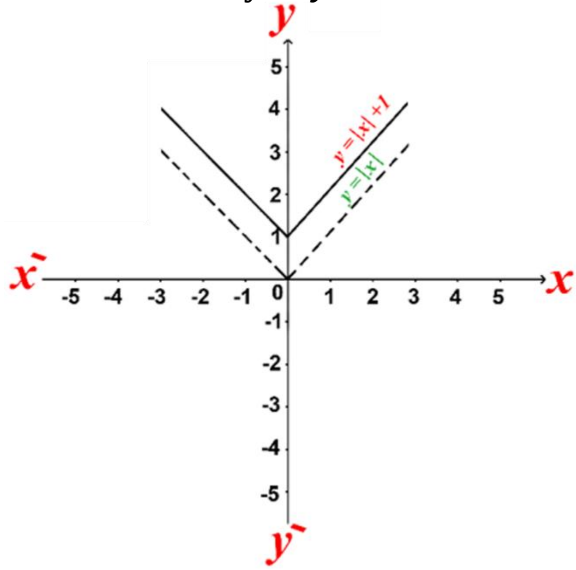
Mînak 2: Em xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = x^2 - 2$ re xêz bikin:

Em dibînin ku xêzika girafîkî ji vê fonkisyonê re, heman xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = x^2$ re ye û bi kişandina wê bi qasî -2 menan bi aliyê oy' ve.



Mînak 3: Em xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = |x| + 1$ re xêz bikin:

Em dibînin ku xêzika girafîkî ji vê fonkisyonê re, heman xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = |x|$ re ye û bi kişandina wê bi qasî $+1$ menan bi aliyê oy ve.



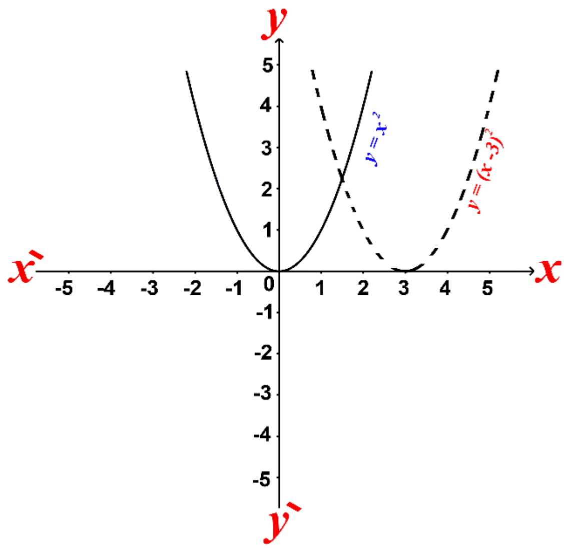
2. Kişandina asoyî ji xêzika girafîkî re

1. Ji bo xêzkirina girafîkî ji fonkisyona $f(x) = (x - a)^2$ re:

Heman xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = x^2$ re ye bi qasî a mena bi aliyê ox ve heger $a > 0$ be û bi aliyê ox' ve bikişînin, heger $a < 0$ be.

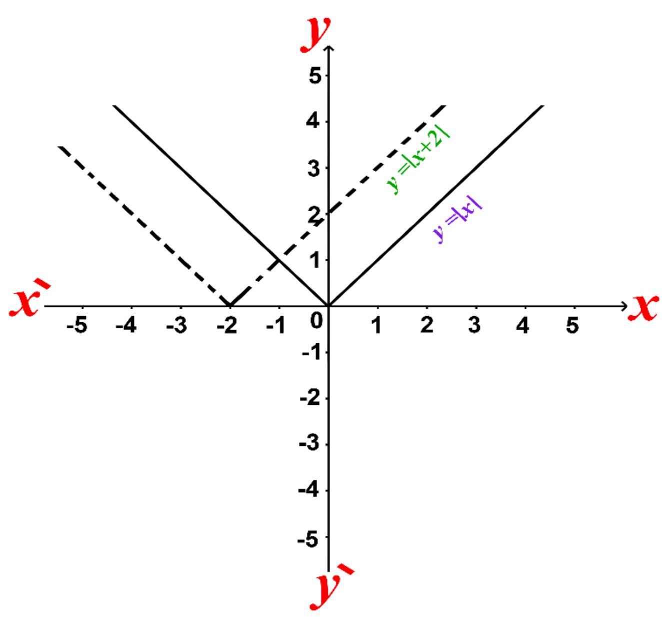
Mînak 1: Em xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = (x - 3)^2$ re xêz bikin:

Em dibînin ku xêzika girafîkî ji vê fonkisyonê re, heman xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = x^2$ re ye û bi kişandina wê bi qasî 3 menan bi aliyê ox ve.



Mînak 2: **Em xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = |x+2|$ re xêz bikin:**

Em dibînin ku xêzika girafîkî ji vê fonkisyonê re, heman xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = |x|$ re ye û bi kişandina wê bi qasî -2 menan bi aliyê ox' ve.

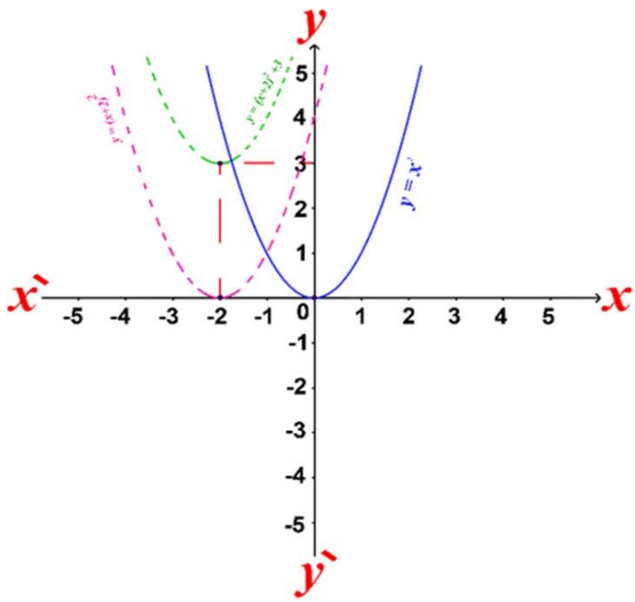


2. Ji bo xêzkirina girafîkî ji fonkisyona $f(x) = (x - a)^2 + b$ re:

Heman xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = x^2$ re ye û bi kişandina wê bi aliyê ox yan ox' ve li gorî nirxê a û piştre kişandina wê tîkî bi aliyê oy yan jî oy' li gorî nirxê b.

Mînak: Em xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = (x + 2)^2 + 3$ re xêz bikin:

Em dibînin ku xêzika girafîkî ji vê fonkisyonê re, heman xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = x^2$ re ye û bi kişandina wê bi qasî -2 menan bi aliyê ox' ve û bi qasî $+3$ bi aliyê oy ve.



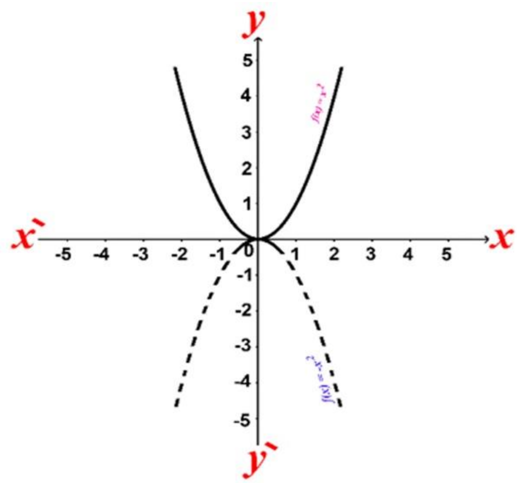
3. Ji bo xêzkirina girafîkî ji fonkisyona $y = -f(x)$:

Em xêzika girafîkî ji fonkisyona $y = f(x)$ re xêz bikin û piştre hevbera wê li gorî tewereya $x'x$ bibin.

Mînak 1: Em xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = -x^2$ re xêz bikin:

Em dibînin ku xêzika girafîkî ji vê fonkisyonê re, heman xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = x^2$ re ye.

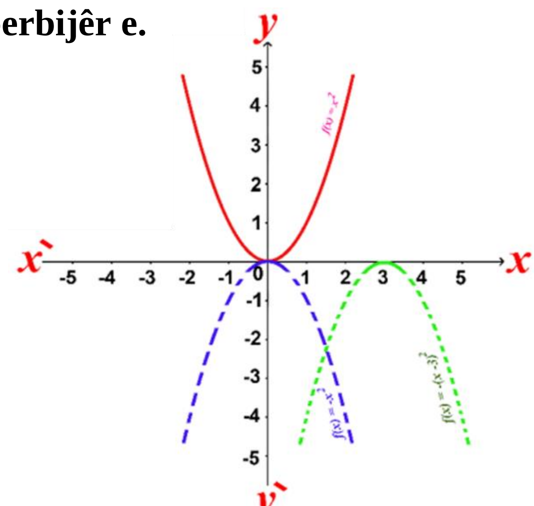
Piştre em hevbera wê li gorî $x'x$ bibin, ango vekirina xêzika pêldayî ber bi jêr e.



Mînak 2: Em xêzika girafîkî ji $f(x) = -(x-3)^2$ re xêz bikin:

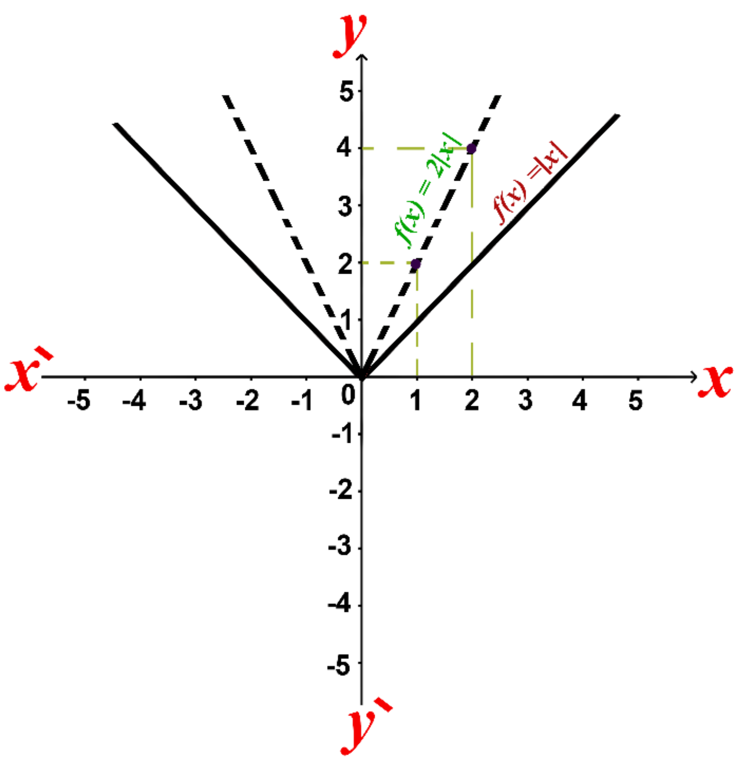
Em dibînin ku xêzika girafîkî ji vê fonkisyonê re, hevbera xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = x^2$ re ye li gorî $x'x$.

Piştre em wê bi qasî $+3$ bi aliyê ox ve bikişînin, ango vekirina xêzika pêldayî berbijêr e.



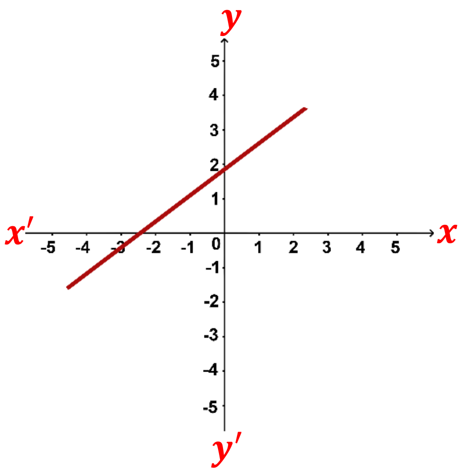
Mînak 3: **Em xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = 2|x|$ re xêz bikin:**

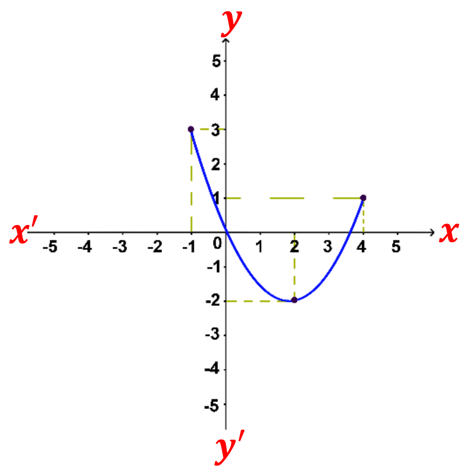
Em dibînin ku xêzika girafîkî ji vê fonkisyonê re, heman xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = |x|$ re ye û bi têbîniya ku ji her coteke rêzkirî re (x, y) ji xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = |x|$ re, coteke rêzkirî $(x, 2y)$ ji xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = 2|x|$ re heye.

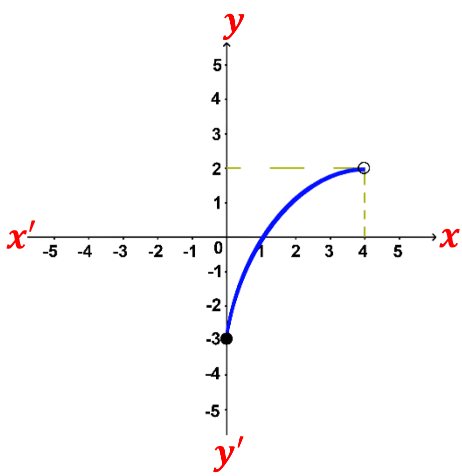


HÎNDARÎ

1. Di teşeyên li jêr de, em ji xêzkirina komika pênaseyê û komika nirxan a giştî ji fonkisyonê re encamê bigirin û piştre guhartina wê bibînin:





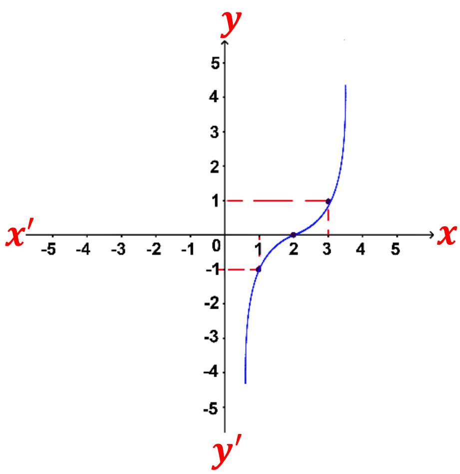


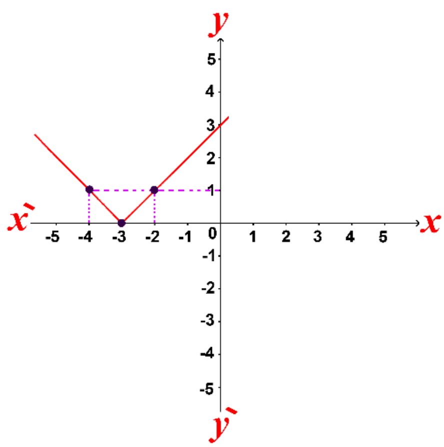
2. Em xêzika girafîkî ji fonkisyonên li jêr re bibînin:

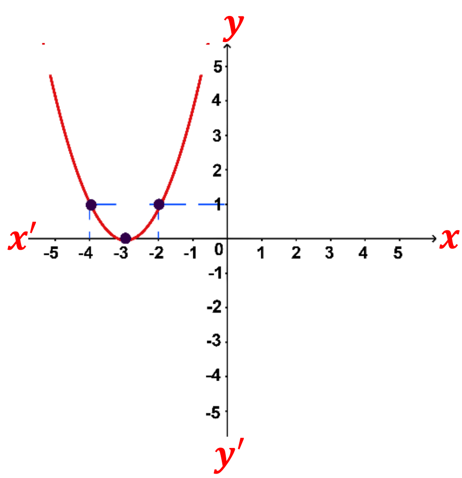
$$f(x) = x^2 - 1 \qquad g(x) = x^2 + 2$$

$$h(x) = |x| + 3 \qquad k(x) = x^3 - 4$$

3. Em rêgeza girêdanê ji fonkisyonên li jêr xêzkirî re binivîsin:







4. Em guhartinên geometriyî ji bo xêzkirina xêzika girafîkî ji fonkisyonên li jêr re bi kar bînin:

$$f(x) = (x + 2)^2 - 4 \qquad g(x) = 4 - x^2$$

$$h(x) = -(x - 1)^2 + 2 \qquad k(x) = \frac{1}{2}|x - 7| + 2$$

BEŞA DUYEM: FONKISYONA HÊZÎ Û YA LOGARÎTMA

1. FONKISYONA BI HÊZA KERTÎ
2. FONKISYONA VAJÎ
3. FONKISYONA LOGARÎTMAYÊ

WANEYA YEKEM: HEJMARÊN BI HÊZA KERTÎ

Pêşgotin

Logarîtma di bîrkariyê de, di destpêka sedsala hevdeh de hat naskirin, ji hêla zanyarê iskotlendî John Napier ve ji bo hêsankirina hesaban.

Piştre endeziyar û gemîvanên gemiyan logarîtmayê ji bo hesabkirinên xwe bi awayekî hêsan bi kar anîn.

Di sedsala hejdeh de, zanyarê siwêsrî Leonhard Euler têgîna logarîtmayê bi têgîna fonkisyona hêzî ve girê da.

Sûd ji logarîtmayê di gelek derfetên fireh de tê girtin.

Mînak: Dêsîbel meneke logarîtmayê ye, rêjeya di navbera du qaseyên fîziyayê de dide û di derfetên deng û elektronîkan de tê bikaranîn.

Di heman demê de, hêza hîdrojenî meneke logarîtmayê ye; di kîmiyayê de ji bo nîşankirina asîdbûna pişaftiyê tê bikaranîn.

1. Hejmarên bi hêza kertî

Me berê nas kiribû ku kokdamiya hejmareke rast a pozîtîv (a) hejmareke din e (b) ku dama wê yeksanî (a) be.

$$\sqrt{a} = b \iff (b)^2 = a$$

Di heman demê de, me dîtibû ku $\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$: n hejmareke cot e.

Mînak: $\sqrt{(3)^4} = (3)^{\frac{4}{2}} = (3)^2 = 9$

Heger n hejmareke kit be, ev taybetî rast e.

Mînak: $\sqrt{(2)^3} = (2)^{\frac{3}{2}}$

Em ji $(2)^{\frac{3}{2}}$ re dibêjin hejmara bi hêza kertî.

Pênase:

Ji her hejmareke rast re $a \geq 0$ û $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$

1) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ev têkilî rast dimîne dema ku $a < 0$, $n > 1$

2) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$: $a \in \mathbb{R}$, n, m du hejmarên tam in û faktora hevbeş di navbera wan de tune ye û $n > 1$ e.

Encam	Rêgezên hejmarên bi hêza kertî, heman rêgezên hejmarên bi hêza tam e.

Mînak: **Em nirxên hejmarên bi hêz ên li jêr bibînin:**

- $(16)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$
- $(-9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{-9}$

Di $\mathbb{R}$ de kokdamiya hejmara nîgetîv tune ye.

- $-(27)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{27} = -3$
- $(16)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{(16)^3} = (\sqrt[2]{16})^3 = (4)^3 = 64$
- $(27)^{-\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{(27)^{\frac{4}{3}}} = (\dfrac{1}{\sqrt[3]{27}})^4 = (\dfrac{1}{3})^4 = \dfrac{1}{81}$

Rahênan: **Em nirxên hejmarên bihêz ên li jêr bibînin:**

$(125)^{\frac{1}{3}}$, $(-81)^{\frac{3}{4}}$, $(128)^{-\frac{2}{7}}$

Taybetiyên kokên bi nîşana n

$$\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Mînak: **Em encama bikaranînên li jêr bi awayê herî sade bibînin:**

$$-\sqrt[3]{8a^6 . b^9} = -\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{a^6} \times \sqrt[3]{b^9} = -2 . a^2 . b^3$$

$$\sqrt[4]{\frac{16}{a^8}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{a^8}} = \frac{2}{a^2}$$

Fonkisyona hêzî

Her fonkisyona hejmarî f ya bi awayê
$f(x) = a^x \;:\; a > 0 \;,\; a \neq 1 \;,\; x \in \mathbb{R}$ ye.

Mînak:

$f(x) = 2^x$ fonkisyoneke hêzî ye, bingeha wê (2) ye û hêza wê (x) e.

$g(x) = 5^{x-1}$ fonkisyoneke hêzî ye, bingeha wê (5) e û hêza wê $(x-1)$ ye.

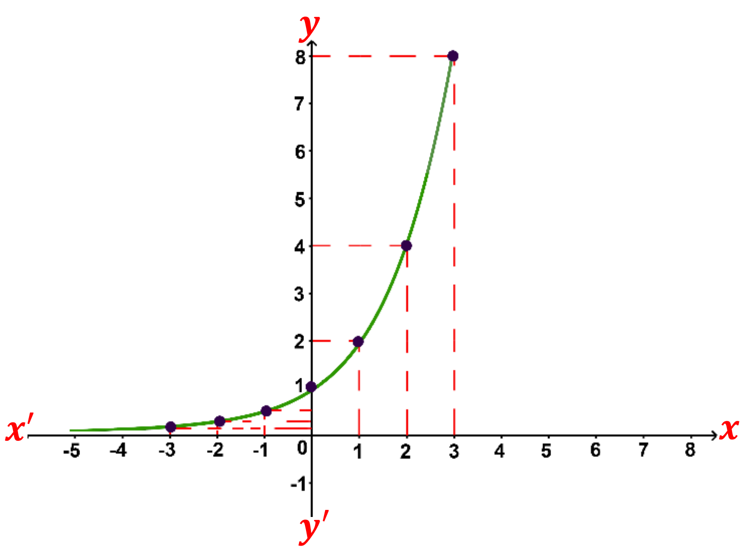
Rahênan: **Em bibînin kîjan fonkisyonên li jêr hêzî ne:**

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = 3^x$
- $h(x) = \frac{3}{x+1}$
- $u(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$
- $v(x) = (-2)^x$

Xêzkirina xêzika girafîkî ji fonkisyona hêzî re

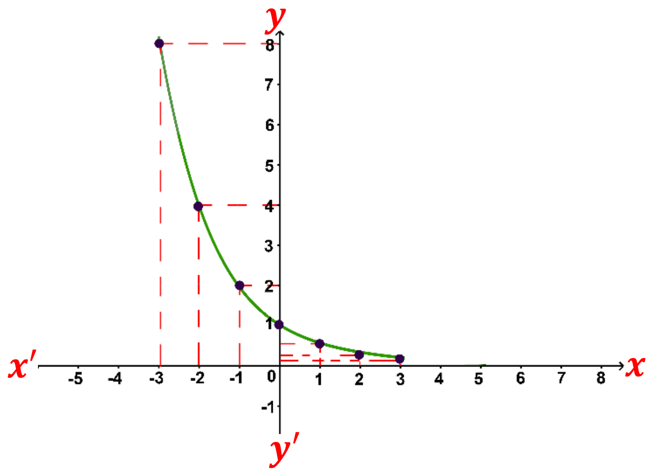
- Em xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = 2^x$ re di navbera $[-3, +3]$ de xêz bikin:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



- Em xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ re di navbera $[-3, +3]$ de xêz bikin:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Taybetiyên fonkisyona hêzî

Heger $f(x) = a^x$; $a > 0$, $a \neq 1$ fonkisyoneke hêzî be:

1. Komika pênaseya fonkisyona hêzî $\mathbb{R}$ ye.

2. Komika nirxan a giştî $]0, +\infty[$ ye.

3. Heger $a > 1$ be, wê demê fonkisyon di hemû komika pênaseyê de zêdeker e, ji ber vê yekê bi navê mezinbûna hêzî tê naskirin û xêzika wê ya girafîkî li cem $-\infty$ nêzî $x'x$ dibe.

4. Heger $1 > a > 0$ be, wê demê fonkisyon di hemû komika pênaseyê de kêmker e, ji ber vê yekê bi navê biçûkbûna hêzî tê naskirin û xêzika wê ya girafîkî li cem $+\infty$ nêzî $x'x$ dibe.

5. Xêzika girafîkî ji fonkisyona hêzî re her tim di xala $(0, 1)$ re diçe.

6. **Xêzika girafîkî ji fonkisyona hêzî $f(x) = a^x$ re, hevbera xêzika girafîkî ji fonkisyona hêzî $h(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ re ye li gorî tewereya $y'y$.**

7. **Heger $a^{x_1} = a^{x_2}$ be, wê demê $x_1 = x_2$**

Fonkisyona hêzî ya nêpîr (Napier)

Pênase: **Heger fonkisyona $f(x) = e^x$ di $\mathbb{R}$ de pênasekirî be li gorî $e = 2.718$ (hejmareke nêpîrî ye), em ji vê fonkisyonê re dibêjin fonkisyona hêzî ya nêpîrî.**

- **Taybetiyên wê:**

1. **Komika pênaseya fonkisyona hêzî ya nêpîrî $f(x) = e^{g(x)}$ komika pênaseya $g(x)$ e.**

2. **Komika wê ya nirxan: $]0\, , +\infty[$**

3) $e^x > 0 \quad , \quad e^{-x} > 0$

4) $e^0 = 1 \quad , \quad e^1 = e$

5) $e^{x_1} = e^{x_2} \Longrightarrow x_1 = x_2$

Rahênan: **Em komika pênaseya $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$ bibînin.**

Hevkêşeya hêzî

Her hevkêşeya ku pêkhateyekê bi vî awayê a^x : $a > 1$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$ ye.

Ji bo çarekirina hevkêşeyên hêzî, divê em bingehan bikin wekhev û piştre taybetiya $a^{x_1} = a^{x_2}$ bi kar bînin ji bo em nirxên nenas bi dest bixin.

Mînak 1: Em hevkêşeya $3^{2x-7} = 1$ çare bikin:

Em her du aliyên hevkêşeyê bi awayê hejmarên heman bingeh binivîsin û ji ber ku $3^0 = 1$ ye, em dikarin hevkêşeyê bi awayê $3^{2x-7} = 3^0$ binivîsin.

Li gorî taybetiya (7): $2x - 7 = 0 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

Komika çareyên hevkêşeyê: $\left\{\frac{7}{2}\right\}$

Mînak 2: Em hevkêşeya $5^{2x} - 5^x = 0$ çare bikin:

$$5^{2x} = 5^x \Rightarrow 2x = x \Rightarrow 2x - x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Komika çareyên hevkêşeyê: $\{0\}$

Mînak 3: Em hevkêşeya $(16)^x - 12(4)^x - 64 = 0$ çare bikin:

Em $(16)^x = (4)^{2x}$ binivîsin.

Heger $(4)^x = y \;:\; y > 0$ be:

$$y^2 - 12y - 64 = 0 \Rightarrow (y + 4)(y - 16) = 0$$

Yan: $y = -4$ nayê pejirandin ji ber ku nîgetîv e.

Yan jî: $y = 16$ tê pejirandin.

$$(4)^x = 16 \Rightarrow (4)^x = (4)^2 \Rightarrow x = 2$$

Komika çareyên fonkisyonê: $\{2\}$

Mînak 4: Em hevkêşeyên li jêr çare bikin:

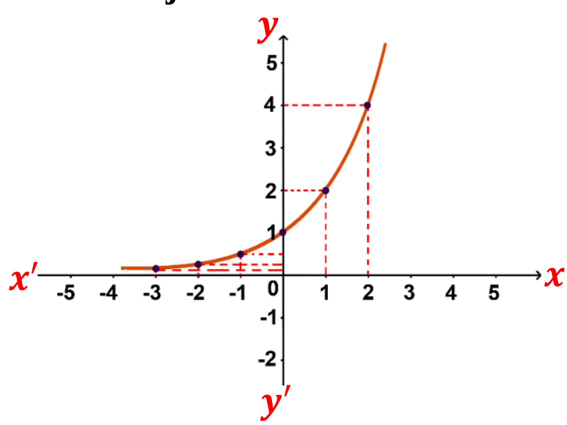
- $e^x = 1 \Rightarrow e^x = e^0 \Rightarrow x = 0$
- $e^x = e \Rightarrow e^x = e^1 \Rightarrow x = 1$
- $\frac{e^{2x}}{e^2} = e^x \Rightarrow e^{2x}.e^{-2} = e^x \Rightarrow e^{2x-2} = e^x$

$$\Rightarrow 2x - 2 = x \Rightarrow x = 2$$

HÎNDARÎ

1. Teşeya li jêr fonkisyona f nîşan dide li gorî $f(x) = (3)^x$

Em li ser heman teşeyê xêzika girafîkî ji fonkisyona h re li gorî $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ xêz bikin û piştre komika pênaseyê û komika nirxan a giştî ji her du fonkisyonên f , h re bibînin û kîjan zêdeker e û kîjan kêmker e?



2. Heger $f(x) = (4)^x$ be:

- Em nirxên $f(0)$, $f(-2)$, $f(2)$ û $f(x+2)$ bibînin.

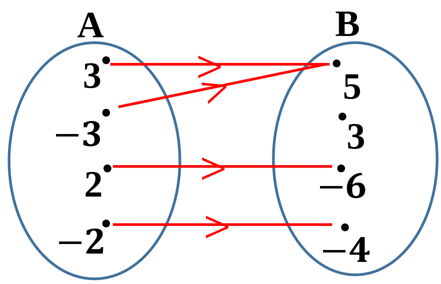
- Em $f(x)$. $f(-x)$ bibînin.

3. Em hevkêşeyên li jêr di $\mathbb{R}$ de çare bikin:

- $5^{2x} = 25$
- $2 \times 2^{3x} - 1 = 0$
- $2^{5x-10} = 1$
- $2^{2x} - 10(2^x) + 16 = 0$
- $3^{2x+2} = 81$
- $(e^x)^5 = e^x . e^{12}$
- $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

WANEYA DUYEM: FONKISYONA VAJÎ

1. Heger $f : A \longrightarrow B$ fonkisyonek be û bi şemaya tîrî hatibe nîşankirin:



Em dibînin ku:

Komika pênaseyê ya fonkisyonê: $A = \{3, -3, 2, -2\}$

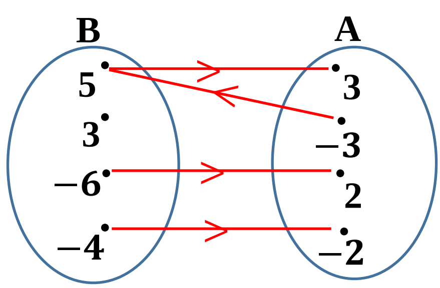
Komika nirxan a fonkisyonê: $B = \{3, 5, -6, -4\}$

Komika nirxan a giştî ya fonkisyonê: $f(A) = \{5, -6, -4\}$

Lê rêgeza girêdanê: $G = \{(3, 5), (-3, 5), (2, -6), (-2, -4)\}$

Em encamê digirin ku şemaya tîrî ya çûyî, fonkisyonekê nîşan dide, ji ber ku her endamek ji komika pênaseyê bi endamekî tenê ve ji komika nirxan tê girêdan.

2. Heger em aliyê tîran di şemaya tîrî ya çûyî de vajî bikin, em ê têkiliyekê bi dest bixin û bi sembola f_1 ji B heta A nîşan bikin:



Komika têkiliyê ya pênaseyê: $B = \{5, 3, -6, -4\}$

Komika têkiliyê ya nirxan: $A = \{3, -3, 2, -2\}$

Rêgeza girêdanê: $G_1 = \{(5, 3), (5, -3), (-6, 2), (-4, -2)\}$

Em dibînin ku şemaya nû fonkisyonê nîşan nade, ji ber ku endamê 5 ji komika pênaseyê bi du endaman ji komika nirxan ve hatiye girêdan.

Ango: Hejmara 3 ji komika pênaseyê bi tu endamî ve ji komika nirxan nehatiye girêdan.

Encam

Em ji têkiliya f_1 re dibêjin vajiya fonkisyona f.

Em vajiya fonkisyonê bi dest dixin bi cîguhertina komika pênaseyê û komika nirxan û cîguhertina her du êxistinên her cotekê ji rêgeza girêdanê.

Têbînî

Ne girîng e ku vajiya fonkisyonekê, fonkisyonek be.

1. Heger $f: A \longrightarrow B$ fonkisyonek be û bi şemaya tîrî hatibe nîşankirin:

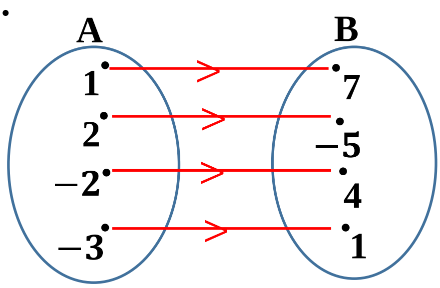
Komika pênaseyê ya fonkisyonê: $A = \{1, 2, -2, -3\}$

Komika nirxan a fonkisyonê: $B = \{7, -5, 4, 1\}$

Komika nirxan a giştî ya fonkisyonê: $f(A) = \{7, -5, 4, 1\}$

Rêgeza girêdanê: $G = \{(1, 7), (2, -5), (-2, 4), (-3, 1)\}$

Şemaya xêzkirî fonkisyonekê nîşan dide, ji ber ku her endamek ji komika pênaseyê beramberî endamekî tenê ji komika nirxan e.



2. Heger em aliyê tîran di şemaya tîrî ya çûyî de vajî bikin, em têkiliyekê bi dest dixin û bi sembola f_1 ji B heta A nîşan dikin:

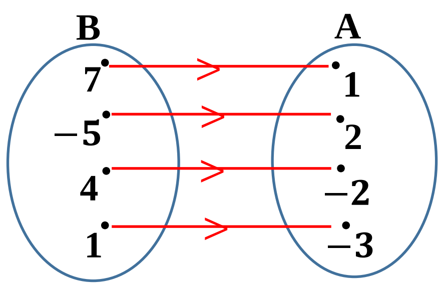
Komika têkiliyê ya pênaseyê: $B = \{7, -5, 4, 1\}$

Komika têkiliyê ya nirxan: $A = \{1, -3, 2, -2\}$

Rêgeza girêdanê: $G_1 = \{(7,1), (-5,2), (4,-2), (1,-3)\}$

Em dibînin ku şemaya nû fonkisyonê nîşan dide, ji ber ku her endamek ji komika pênaseyê beramberî endamekî tenê ji komika nirxan e.

Em ji têkiliya f_1 re dibêjin vajiya fonkisyona f



Encam | **Belkî vajiya fonkisyonekê, fonkisyonek be.**

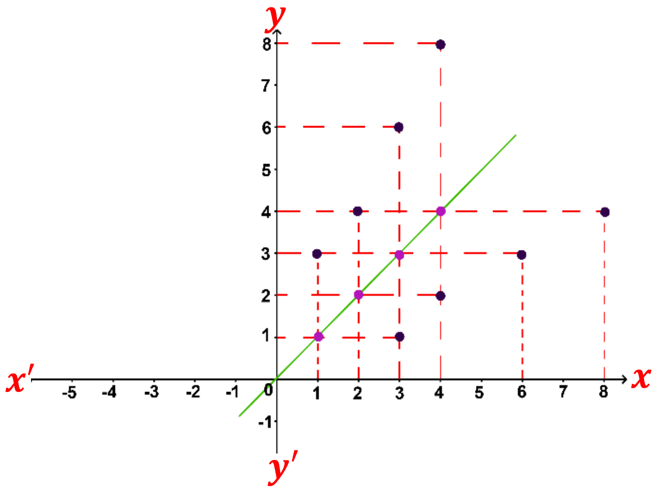
Mînak 1: **Heger f fonkisyonek be û rêgeza wê ya girêdanê $G = \{(1,3), (2,4), (3,6), (4,8)\}$ be, em rêgeza girêdana fonkisyona vajî f_1 bibînin û girafîkî her du fonkisyonan di teşeyekê de nîşan bikin.**

Em ê çi encamê bigirin?

Em êxistinên rêgeza girêdanê biguharin:

$$G_1 = \{(3,1), (4,2), (6,3), (8,4)\}$$

Em dibînin ku fonkisyona f û fonkisyona f_1 li gorî rasteka $y = x$ (nîveka çaryeka yekem) sîmetrîk e.



Mînak 2: **Heger $f(x) = 2x - 1$ fonkisyonek be:**

1. Em komika pênaseya f û komika nirxan bibînin.

2. Em komika pênaseyê, komika nirxan û rêgeza girêdana f_1 bibînin.

Em dibînin ku $f(x) = 2x - 1$ fonkisyoneke tam e, wê demê: $D_f = \mathbb{R}$ û komika nirxan $\mathbb{R}$ e.

Lê komika pênaseya fonkisyona f_1: $D_{f_1} = \mathbb{R}$ û komika nirxan $\mathbb{R}$ e.

Rêgeza girêdanê: Em êxistinan biguherin

$$y = 2x - 1 \Rightarrow x = 2y - 1 \Rightarrow 2y = x + 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{2}$$

Rahênan: **Em fonkisyona vajî ji fonkisyona $f(x) = x^2$ re bibînin û girafîkî wan nîşan bikin, bi birina nirxan ji nenasa x re weke (0, 1, 2, 3)**

Fonkisyona beramberkirinê

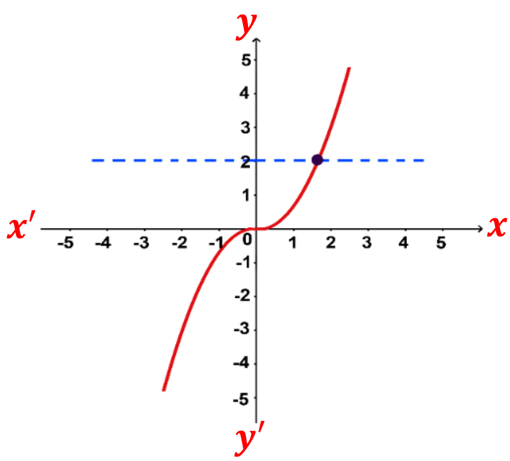
Me dîtiye ku vajiya hinek fonkisyon belkî fonkisyon be û vajiya hineke din ne fonkisyon be.

Heger vajiya fonkisyona f fonkisyonek be, wê demê em ji fonkisyonê re dibêjin beramber e û vajiya wê bi sembola f^{-1} nîşan dikin.

- **Rêbazê naskirina fonkisyona beramberkirinê ji xêzkirina girafîkî**

Heger çi xêzikeke asoyî xêzika pêldayî ya fonkisyonê di xaleke tenê de qut bike, wê demê ev xêzika pêldayî fonkisyoneke beramberkirinê nîşan dide.

Mînak: Xêzika girafîkî ya li jêr xêzkirî, fonkisyoneke beramberkirinê nîşan dide, ji ber ku her rastekeke rastênhevî $x'x$ xêzika pêldayî di xaleke tenê de qut dike.



- **Rêbazê naskirina fonkisyona beramberkirinê cebirî**

Divê komika nirxan yeksanî komika nirxan a giştî be ji fonkisyonê re, ji ber vê yekê bes e ku em tekez bikin ku ji hevkêşeya $f(x) = y$ re çareyeke tenê heye ji bo her $y \in f(D)$ be.

Mînak: Heger $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^* : f(x) = \frac{1}{x}$ fonkisyonek be, em tekez bikin ku f fonkisyoneke beramberkirinê ye.

Çi qasî $y \in \mathbb{R}^*$ be, em li çareyên hevkêşeya $f(x) = y$ bigerin: $f(x) = y \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} = y \;\Rightarrow\; x.y = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{y}$

Ji vê hevkêşeyê re çareyeke tenê heye, ji ber ku li gorî x ji pileya yekem e.

Ango: Fonkisyona f fonkisyoneke beramberkirinê ye.

4. Fonkisyona hêzê û vajiya wê

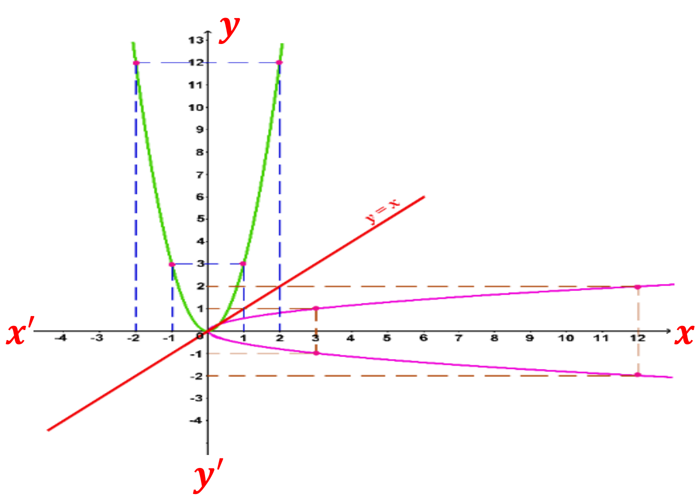
Me berê fonkisyona hêzê nas kiribû û gotibû ku fonkisyoneke di $\mathbb{R}$ de pênasekirî ye û rêgeza girêdana wê bi awayê $f(x) = ax^n$ li gorî ku a hejmareke neguhêr ne sifirî ye û n hejmareke tam û pozîtîv e.

Xwendina xêzika girafîkî ji fonkisyona hêzê re

Heger $f(x) = 3x^2$ fonkisyonek be, weke li jêr:

Tabloya xêzkirinê:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	12	3	0	3	12



Em dibînin ku komika pênaseya fonkisyonê $D_f = \mathbb{R}$ ye û komika wê ya nirxan $\mathbb{R}$ ye û komika wê ya nirxan a giştî $[0, +\infty[$ ye.

Em f_1 vajiya vê fonkisyonê bibînin:

$y = 3x^2$ em di navbera nenasan de biguharin

$$x = 3y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3}x \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x}$$

Ev tê wateya ku her nirxek ji nenasa x re beramberî du nirxan ji nenasa y re ye.

x	3	6	0
$f(x)$	± 1	$\pm\sqrt{2}$	0

Em dibînin ku xêzika girafîkî ji fonkisyona f û vajiya wê f_1 re li gorî nîveka çaryeka yekem $y = x$ sîmetrîk in.

Di heman demê de em dibînin ku vajî fonkisyonê nîşan nade, ji ber ku rasteka rastênhevî tewareya $y'y$ wê di du xalan de qut dike.

Mînak: **Heger $f(x) = x^3$ fonkisyonek be:**

1. Em tekez bikin ku f beramberkirin e.

2. Em vajiya wê f^{-1} bibînin û xêzika wê ya girafîkî li ser heman teşeyê xêz bikin.

Em dibînin ku fonkisyona f di $\mathbb{R}$ de pênasekirî ye û komika wê ya nirxan $\mathbb{R}$ e.

Em mercê beramberkirê binivîsin:

Çi qasî $y \in \mathbb{R}$ be, ji hevkêşeyê re çareyeke tenê heye:

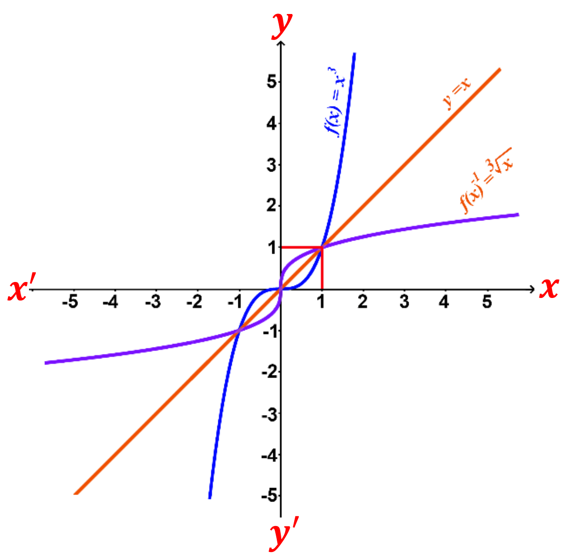
$$f(x) = y \Rightarrow x^3 = y \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

$x = \sqrt[3]{y}$ çareyeke tenê ye, ji ber ku li gorî x ji pileya yekem e û her wiha f beramberkirin e.

Em fonkisyona vajî f^{-1} bibînin:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$

Em dibînin ku vajî fonkisyonek e ji ber ku rasteka rastênhevê $y'y$ wê di xaleke tenê de qut dike.



Encam

Vajiya fonkisyona hejmareke ku hêza wê cot be, ne fonkisyon e.

Vajiya fonkisyona hejmareke ku hêza wê kit be, fonkisyon e.

HÎNDARÎ

1. Em hêmaya ✓ li pêşiya hevoka rast û hêmaya × li pêşiya hevoka şaş binivîsin:

- Komika pênaseya fonkisyonê, komika pênaseya fonkisyona vajiya wê ye.

- Fonkisyona di navberekê de zêdeker, her tim fonkisyoneke vajî di heman navberê de jê re heye.

- Her tim ji fonkisyona cot re fonkisyoneke vajî heye.

- Her tim ji fonkisyona kit re fonkisyoneke vajî heye.

2. Em fonkisyona vajî ji fonkisyona $f(x) = 2x + 1$ re bibînin û fonkisyon û vajiya wê di teşeyekê de girafîkî nîşan bikin bi birina nirxan ji nenasa x re weke $(-1, 0, 1)$

3. Heger $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ fonkisyonek be li gorî $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$

Em tekez bikin ku f beramberkirin e û f^{-1} bibînin.

4. Heger $f(x) = x^2$ fonkisyonek be, em vajiya fonkisyonê f_1 bibînin û xêzika wê ya girafîkî li ser heman teşeyê xêz bikin.

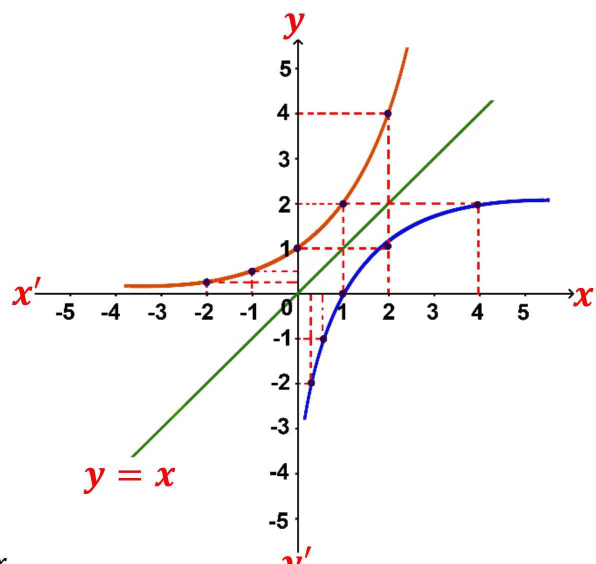
WANEYA SÊYEM: FONKISYONA LOGARÎTMAYÊ

Me berê fonkisyona hêzî $y = 2^x$ dîtiye û li xêzika wê ya girafîkî weke li jêr nîşan kiriye:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

Em fonkisyona wê ya vajî $x = 2^y$ nîşan bikin:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2



$x = 2^y$ vajiya $y = 2^x$ ye.

Em ji nenasa y re di hevkêşeya $x = 2^y$ de dibêjin logarîtmaya x û bi awayê $y = \log_2 x$ tê nivîsîn û bi awayê y yeksanî logarîtmaya x li gorî bingeha (2) tê xwendin.

Têbînî

Em ji nivîsîna $y = 2^x$ re dibêjin awayê hêzî, lê ji nivîsîna $y = \log_2 x$ re dibêjin awayê logarîtmayî.

Pênase: Heger $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{+*}\backslash\{\mathbf{1}\}$ be, wê demê fonkisyona $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \log_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x}$ fonkisyoneke vajî ji fonkisyona $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$ re ye.

Em ji $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \log_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{x}$ re dibêjin fonkisyona logarîtmayî.

Komika pênaseya fonkisyona logarîtmayî $\mathbb{R}^{+*}$ ye.

Komika nirxan a giştî $\mathbb{R}$ ye.

Mînak: **Em awayê hêzî bi awayê logarîtmayî veguharin:**

- $\mathbf{2^4 = 16 \Leftrightarrow 4 = \log_2 16}$
- $\mathbf{5^2 = 25 \Leftrightarrow 2 = \log_5 25}$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 4 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$
- $\mathbf{10^{-2} = 0.01 \Leftrightarrow -2 = \log_{10} 0.01}$
- $\boldsymbol{a}^0 = 1 \;:\; \boldsymbol{a} > 1 \quad \Leftrightarrow 0 = \log_{\boldsymbol{a}} 1$

Rahênan:

1. Em awayê hêzî bi awayê logarîtmayî veguharin:

- $\mathbf{7^2 = 49}$
- $\left(\sqrt{2}\right)^{-10} = 512$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$

2. Em awayê logarîtmayî bi awayê hêzî veguharin:

- $\log_3 81 = 4$
- $\log_2 128 = 7$
- $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$

Hesabê nirxê logarîtmaya hejmarekê ji bingehekî diyarkirî re

Mînak 1: Em nirxê $\log_{10} 0.001$ bibînin:

Em bikin awayê hêzî:

$$10^x = 0.001 \Leftrightarrow 10^x = \frac{1}{1000} \Leftrightarrow 10^x = \frac{1}{(10)^3}$$

$$\Leftrightarrow 10^x = 10^{-3} \Leftrightarrow x = -3$$

Ango: $\log_{10} 0.001 = -3$

Mînak 2: Em nirxê $\log_4 256$ bibînin:

Em bikin bi awayê hêzî:

$$4^x = 256 \Leftrightarrow 4^x = 4^4 \Leftrightarrow x = 4$$

Ango: $\log_4 256 = 4$

Encam

Heger $a > 1$ be, wê demê:

1. $\log_a a = 1$ ji ber ku $a^1 = a$
2. $\log_a 1 = 0$ ji ber ku $a^0 = 1$
3. $\log_a \frac{1}{a} = -1$ ji ber ku $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Taybetiyên logarîtmayê

Çi qasî $n, m \in \mathbb{R}^{+*}$ bin û $a > 1$ be, wê demê:

- $\log_a(m \times n) = \log_a m + \log_a n$
- $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$
- $\log_a\left(\frac{1}{n}\right) = -\log_a n$
- $\log_a(m^r) = r \log_a m \quad : r \in \mathbb{Q}$

Mînak: Em encama $\log_{10}(50) + \log_{10}(2)$ bi awayê herî sade bibînin:

Li gorî taybetiya yekem:

$$\log_{10}(50) + \log_{10}(2) = \log_{10}(50 \times 2)$$

$$= \log_{10}(100) = \log_{10}(10)^2 = 2\log_{10}(10) = 2 \times 1 = 2$$

Logarîtmaya dehî

Logarîtmaya ku bingehê wê 10 e û bi sembola log (bêyî gotina bingehê 10) tê nîşankirin.

Komika pênaseya fonkisyona logarîtmayê $f(x) = \log[g(x)]$ **bi vî awayî ye:**

$$D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ g(x) > 0\}$$

Mînak: Em D komika pênaseya fonkisyona li jêr bibînin:

$$f(x) = \log_6(x^2 - x - 6)$$

Mercê logarîtmayê: $x^2 - x - 6 > 0$

Em hêmaya wê nas bikin:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

Yan: $x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3$

Yan jî: $x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$

x	$-\infty$	-2		3		$+\infty$
x^2-x-6	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2-x-6>0$	Pêkhatî ye		Ne pêkhatî ye		Pêkhatî ye	

$$D =]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$$

Fonkisyona logarîtmayê ya nêpîrî

Pênase: Fonkisyona logarîtmayê ya ku bingeha wê e ye û bi sembola ln tê nîşankirin (bê bîranîna bingeha e).

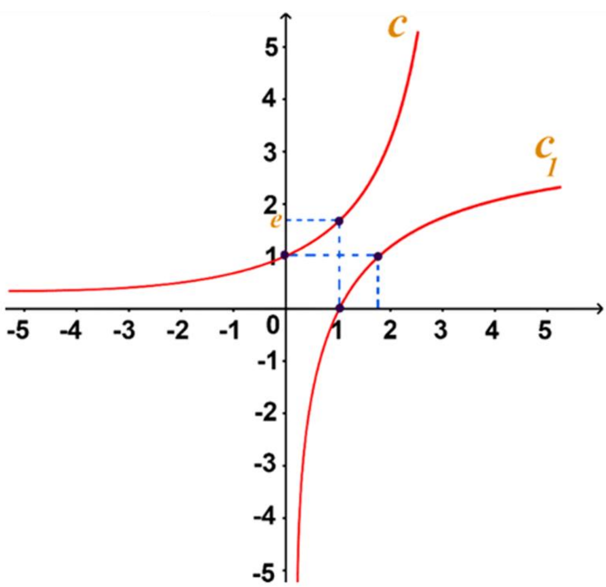
Bi vî awayî tê nivîsîn: $ln \; :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \;\; : x \rightarrow ln(x)$

Li gorî ku: $x = e^y \Leftrightarrow ln(x) = y$

Têbînî

Fonkisyona logarîtmayê ya nêpîrî, fonkisyoneke vajî ye ji fonkisyona hêzî ya nêpîrî re ye $f(x) = e^x$

Ji ber vê yekê xêzika girafîkî C_1 ji fonkisyona ln re dibe hevbera xêzika girafîkî C ya fonkisyona hêzî li gorî nîveka çaryeka yekem.



- **Taybetiyên wê**

1. $\forall\, x \in \mathbb{R} \implies \ln e^{x} = x$

2. $x > 0 \implies e^{\ln x} = x$

3. $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 = \ln x_2$

4. $\ln(e) = 1 \quad , \quad \ln(1) = 0$

Mînak: **Em bikaranînên li jêr bibînin:**

$$e^{\ln(x+1)} = x + 1 \quad , \quad \ln e^{-3} = -3 \quad , \quad e^{\ln 6} = 6$$

Rahênan: **Em komika pênaseya fonkisyona li jêr bibînin:**

$$f(x) = \log_{10}(x^2 - 9) + 2\log_{10}\left(\frac{1}{x+3}\right) + 4\log_{10}(x)$$

Encam

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log(x_1) = \log(x_2)$$

- **Hevkêşeyên logarîtmayê**

Her hevkêşeya ku di nava xwe de log ji semboleke guhêr re digire.

Gavên çareyê:

1. Em destpêkê komika pênaseyê $D = D_1 \cap D_2$ bibînin li gorî ku: D_1 komika pênaseya aliyê yekem ji hevkêşeyê ye.

D_2 komika pênaseya aliyê duyem jî ji hevkêşeyê ye.

2. Em encama $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log(x_1) = \log(x_2)$ bi kar bînin.

Mînak: Em di $\mathbb{R}$ de hevkêşeya li jêr çare bikin:

$$\log(x-1)+\log(x+1)=\log 8$$

Em komika pênaseyê bibînin:

$D=\{x\ :\ x-1>0\}\cap\{x\ :\ x+1>0\}$

$D=]1\,,+\infty[\cap]-1\,,+\infty[$

$\quad=]1\,,+\infty[$

Li gorî taybetiyên logarîtmayê:

$\log[(x-1)(x+1)]=\log 8$

$x^2-1=8$

$x^2=9\ \Rightarrow x=\pm 3$

Çareya hevkêşeyên hêzî bi alîkariya logarîtmayê

Mînak: Em hevkêşeya $3^x=2^{\frac{1}{x}}\ :\ x>0$ çare bikin û encamê, li du jimarên dehî yên herî nêzîk, girover bikin:

$\log(3^x)=\log(2^{\frac{1}{x}})$

Li gorî taybetiyên logarîtmayê:

$x\log(3)=\frac{1}{x}\log(2)$

$x^2\log(3)=\log(2)$

$x^2=\frac{\log 2}{\log 3}$

$x=\sqrt{\frac{\log 2}{\log 3}}$

$x\approx 0.79$

HÎNDARÎ

1. Em encama logarîtmayên li jêr bibînin:

- $\log_2(64)$
- $\log_{10}(10)$
- $\log_{10}(0.01)$

2. Em nirxên her du qaseyên li jêr bibînin:

- $\log_{10}(30) - \log_{10}(3)$
- $\log_5 \sqrt{125}$

3. Em komikên pênaseyê ji fonkisyonên li jêr re bibînin:

- $f(x) = \log(\frac{x+1}{x-1})$
- $g(x) = \log(\sqrt{x^2 + 1})$
- $h(x) = \log(x^2 + x + 1)$

4. Em hevkêşeyên li jêr di $\mathbb{R}$ de çare bikin:

- $\log(3x) = \log(6)$
- $\log(x^2 + 3x) = \log(2x + 2)$
- $2^{x+1} = 5$

BEŞA SÊYEM: DAWÎ Û DOMDARÎ

1. DAWIYA FONKISYONÊ
2. DOMDARIYA FONKISYONÊ

WANEYA YEKEM: DAWIYA FONKISYONÊ

Pêşgotin

- **Dawiya fonkisyonê tê wateya nirxê ku fonkisyon nêzî wê dibe, dema ku nenas nêzî nirxekî dibe.**
- **Zanyarê firansiz Couchy (Koşî) yekemîn kesê ku têgîna dawiyê baş nas kiriye weke di roja me ya îro de.**

- **Cureya qaseyên di komika hejmarên rast $\mathbb{R}$ de:**

Em encama bikaranînên li jêr bibînin:

$2 \times 3 = 6$ **em dibînin ku encama (6) qaseyeke neguhêr e.**

$20 \div 5 = 4$ **em dibînin ku encama (4) qaseyeke neguhêr e.**

$0 \div 0$ **em dibînin ku encama qaseyeke nediyar e.**

$\frac{\infty}{\infty}$, $+\infty - \infty$, $\infty \times 0$ **qaseyên nediyar in.**

- **Agahî:**

Bikaranînên li ser komika hejmarên rast $\mathbb{R}$ û her du sembolên $+\infty$, $-\infty$ ji her $a \in \mathbb{R}$ re weke li jêr e:

1. $+\infty + a = +\infty$

2. $-\infty + a = -\infty$

3. $+\infty \times a = \begin{cases} +\infty & : \; a > 0 \\ -\infty & : \; a < 0 \end{cases}$

4. $-\infty \times a = \begin{cases} +\infty & : \quad a < 0 \\ -\infty & : \quad a > 0 \end{cases}$

Mînak: **Em encama bikaranînên li jêr bibînin:**

$3 + \infty \quad , \quad 5 - \infty \quad , \quad 0 \div 2 \quad , \quad 0 \div 0 \quad , \quad 2 \times \infty \quad , \quad -7 \times -\infty$

Çare:

$3 + \infty = +\infty$

$5 - \infty = -\infty$

$0 \div 2 = 0$

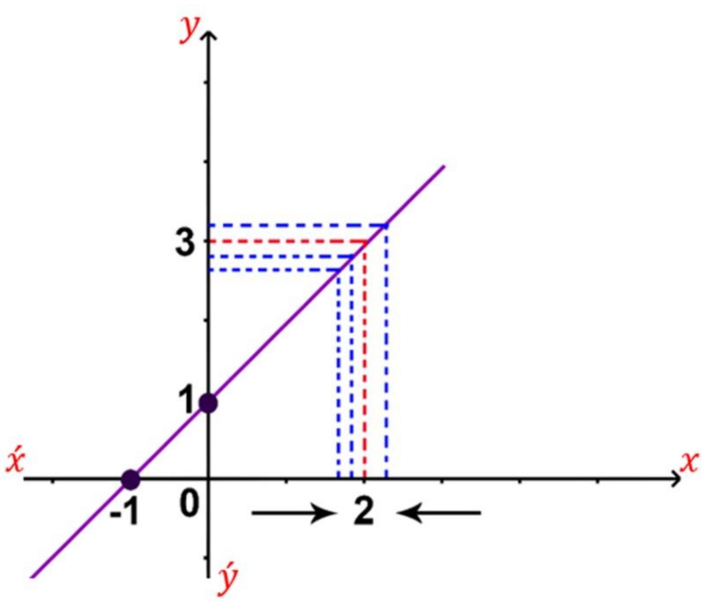
$0 \div 0 =$ **nediyar e**

$2 \times (+\infty) = +\infty$

$-7 \times (-\infty) = +\infty$

1. Dawiya fonkisyona hejmarî li cem hejmarekê x_0

1. Teşeya li jêr xêzika girafîkî ji fonkisyona f re di $\mathbb{R}$ de pênasekirî ye li gorî têkiliya $f(x) = x + 1$



Em dibînin ku çi qasî x nêzî hejmara (2) dibe, ji aliyê rastê an jî çepê ve, wê demê $f(x)$ nêzî hejmara (3) dibe û ev dawî bi sembola $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ tê nîşankirin.

Em di vê rewşê de dibînin ku dawiya fonkisyona f li cem hejmara (2) yeksanî nirxê fonkisyonê li cem hejmara (2)

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$$

Mînak: Em encama $\lim_{x \to 2}(3x^2 - 3)$ bibînin:

Em hejmara (2) li cihê x binivîsin:

$$\lim_{x \to 2}(3x^2 - 3) = 3(2)^2 - 3$$

$$= 12 - 3$$

$$= 9$$

Têbînî

Di rewşine zehmetî de di bicihbûnê de heye û dibe ku encamine ne diyar werin bidestxistin.

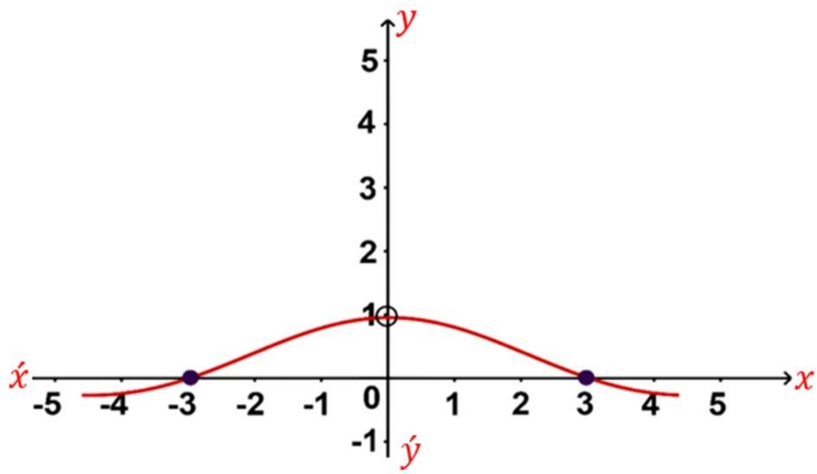
2. Heger fonkisyona $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de pênasekirî be, bi têbîniya xêzika girafîkî ji vê fonkisyonê re, dema ku x nêzî hejmara (0) dibe, ji aliyê rastê an jî çepê ve, wê demê $f(x)$ nêzî hejmara (1) dibe.

Em dibêjin ku fonkisyon li hejmara (1) bi dawî dibe, dema ku x li hejmara (0) bi dawî dibe.

Em dawiya vê fonkisyonê bi awayê $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ binivîsin.

Em dibînin ku di vê mînakê de, dawiya fonkisyona f li cem hejmara (0) ne yeksanî nirxê fonkisyonê li cem hejmara (0) ye, ango: $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

Ji ber vê yekê em bazinekî biçûk li cem hejmara (1) çêdikin, ji ber ku dema em x bikin (0) em nirxekî nediyar $(\frac{0}{0})$ bi dest dixin.



Pênaseya dawiya fonkisyonê

Heger nirxê fonkisyon f nêzî nirxekî tenê ℓ bibe, dema ku x nêzî x_0 bibe ji her du aliyên rastê û çepê ve, wê demê dawiya fonkisyona $f(x)$ yeksanî ℓ ye û bi awayê $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ tê nivîsîn û bi awayê dawiya fonkisyona f yeksanî ℓ dema ku x li x_0 bi dawî dibe tê xwendin.

Mînak: **Em encama $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ bibînin:**

Fonkisyon di $\mathbb{R} \backslash \{3\}$ de pênasekirî ye, ji ber vê yekê em x bikin hejmara (3):

$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$ **rewşeke nediyar e.**

Em vê rewşê rakin:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+3) = 3+3 = 6$$

Em dibînin ku dawî ji fonkisyonê re dema ku x diçe 3 heye, lê nayê wateya ku fonkisyon li cem $x = 3$ pênasekirî be.

Di dawiyan de teorî

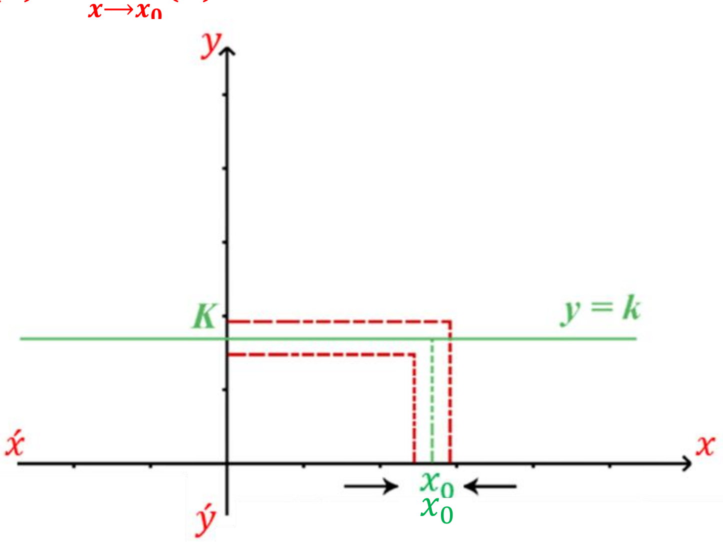
1. Heger $f(x)$ fonkisyona pirpêkhate be û $x_0 \in \mathbb{R}$ be, wê demê $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Mînak: Em encama $\lim_{x \to 1}(x^2 - 3x - 4)$ bibînin:

$$\lim_{x \to 1}(x^2 - 3x - 4) = (1)^2 - 3(1) - 4 = -6$$

2. Heger $f(x) = k \,:\, k$ hejmareke neguhêr be, fonkisyoneke neguhêr be, wê demê:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (k) = k$$



Mînak: Em encama $\lim\limits_{x \to 3}(-4)$ bibînin:

$$\lim_{x \to 3}(-4) = -4$$

3. Heger f , g du fonkisyonên di $D \subseteq \mathbb{R}$ de pênasekirî bin li gorî ku $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$ be, wê demê:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \pm b$
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a \,.\, b$
- $\lim\limits_{x \to x_0} [k \,.\, f(x)] = k \,.\, a \quad : \quad k \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{a}{b} \quad : \quad b \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = a^n \quad : \quad a^n \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{a} \quad : \quad a > 0$

Mînak: Em dawiya fonkisyonên li jêr bibînin:

- $f(x) = \frac{2x+7}{x^2+2x-5}$ **dema ku** $x \to -1$

$$\lim_{x \to -1} \frac{2x+7}{x^2+2x-5} = \frac{\lim\limits_{x \to -1}(2x+7)}{\lim\limits_{x \to -1}(x^2+2x-5)} = \frac{2(-1)+7}{(-1)^2+2(-1)-5} = \frac{4}{-9} = \frac{-2}{3}$$

- $f(x) = \sqrt{4x^2 + 9}$ **dema ku** $x \to -2$

$$\lim_{x \to -2} \sqrt{4x^2 + 9} = \sqrt{\lim_{x \to -2}(4x^2 + 9)} = \sqrt{4(-2)^2 + 9}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

Dawiya fonkisyonekê li cem rewşên nediyar

Rêgez: Heger $f(x) = g(x)$ be, dema ku $x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ be û $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$ be, wê demê: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Mînak 1: Em dawiya fonkisyona $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ dema ku $x \to 1$ bibînin:

Em dibînin ku fonkisyon li cem $x = 1$ ne pênasekirî ye û encama bicihbûnê $\frac{0}{0}$ ne diyar e, ji ber vê yekê em ê awayekî din bidin fonkisyonê:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2$$

Mînak 2: Em dawiya fonkisyona $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}$ dema ku $x \to 4$ bibînin:

Em dibînin ku fonkisyon li cem $x = 4$ ne pênasekirî ye û encama bicihbûnê $\frac{0}{0}$ nediyar e, ji ber vê yekê em ê awayekî din bidin fonkisyonê:

Em ê par û paranê hevdanî hevjimara pare bikin:

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x-3}-1)}{x-4} \times \frac{(\sqrt{x-3}+1)}{(\sqrt{x-3}+1)} = \lim_{x \to 4} \frac{x-3-1}{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}$$

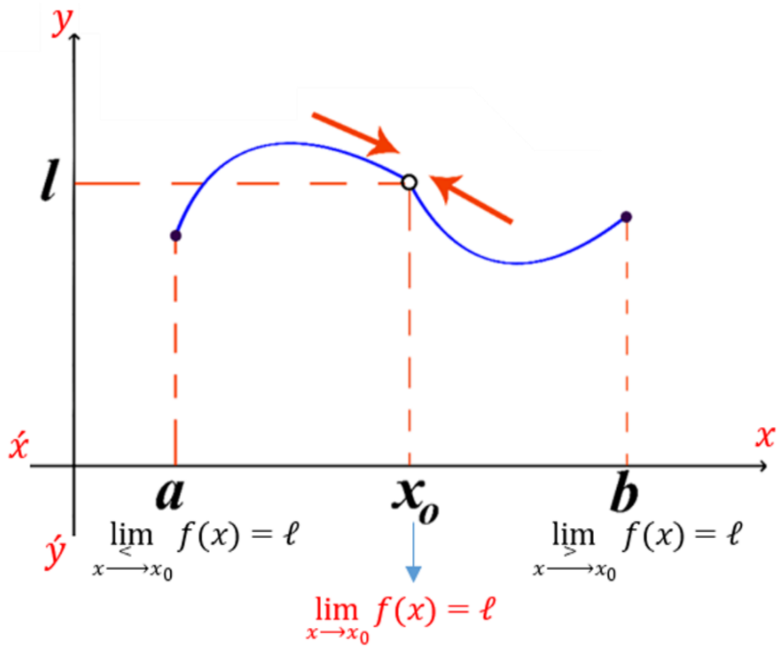
$$= \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{(\sqrt{x-3}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4-3}+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Dawiya fonkisyonê li cem x_0 ji aliyê rastê û çepê ve



Heger ℓ dawiya fonkisyona f li cem x_0 ji aliyê rastê ve be û bi sembola $\lim\limits_{\substack{> \\ x \longrightarrow x_0}} f(x) = \ell$ bê nîşankirin.

Di heman demê de heger ℓ dawiya fonkisyona f li cem x_0 ji aliyê çepê ve be jî û bi sembola $\lim\limits_{\substack{< \\ x \longrightarrow x_0}} f(x) = \ell$ bê nîşankirin.

Em ji teşeyê dibînin ku: $\lim\limits_{\substack{> \\ x \longrightarrow x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \longrightarrow x_0}} f(x)$

Em dibêjin ku ji fonkisyona f re dema ku $x \longrightarrow x_0$ dawî heye.

Têbînî

Heger $\lim\limits_{\substack{> \\ x \longrightarrow x_0}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{< \\ x \longrightarrow x_0}} f(x)$ be, em dibêjin ku ji fonkisyona f re dema ku $x \longrightarrow x_0$ dawî tune ye.

Mînak: Teşeya li jêr, xêzika girafîkî ji fonkisyona f ya di $\mathbb{R}$ de pênasekirî ye li gorî $f(x) = \begin{cases} 2x & : \ x > 1 \\ 3x^2 & : \ x \leq 1 \end{cases}$

Em $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$, $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$ bibînin û piştre encamê bigirin ku $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ heye yan jî na:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = 2(1) = 3$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = 3(1)^2 = 3$$

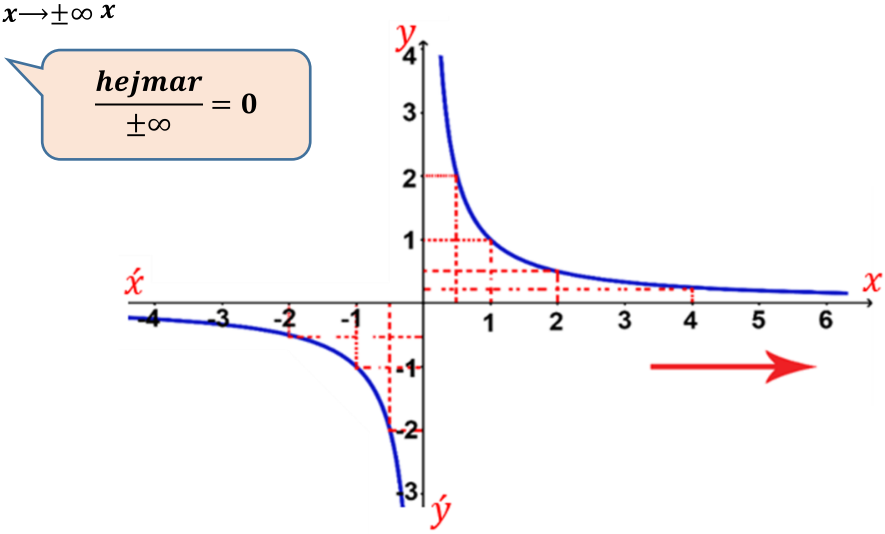
Em dibînin ku: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) \neq \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$

Ev tê wateya ku $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ tune ye û ji fonkisyona f re li cem hejmara (1) tune ye.

2. Dawiya fonkisyonê li cem (∞)

* **Rêgeza (1):**

Di teşeya li jêr de, em dibînin ku çi qasî x nêzî bêdawiyê dibe, nirxên $f(x)$ nêzî hejmara (0) dibe, ji ber vê yekê em $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ dinivîsin.



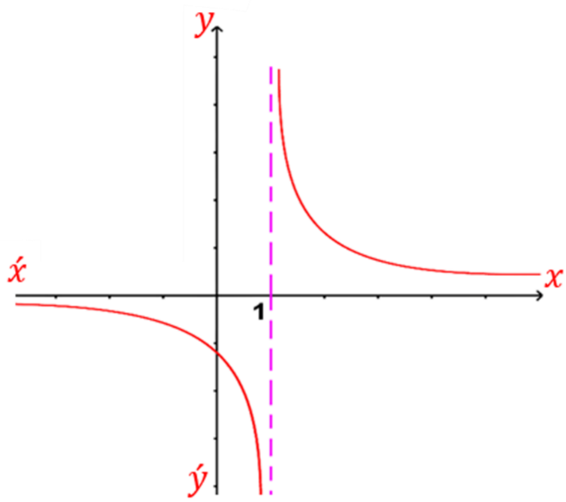
Encam $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{k}{x^n} = 0 \; : \quad n \in \mathbb{R}^+ \;,\; k$ **hejmareke neguhêr e.**

Mînak: **Em dawiya fonkisyona $f(x) = \frac{5}{x-1}$ ya di $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ de pênasekirî dema ku $x \longrightarrow \pm\infty$ bibînin:**

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{5}{x-1}\right) = \frac{5}{\pm\infty} = 0$$

Rêgeza (2):

Di teşeya li jêr de:



Heger nirxên f dema ku $x \longrightarrow x_0 = 1$ ji aliyê rastê ve zêde bibe, wê demê fonkisyona f li $+\infty$ bi dawî dibe.

Heger nirxên f dema ku $x \longrightarrow x_0 = 1$ ji aliyê çepê ve kêm bibe, wê demê fonkisyona f li $-\infty$ bi dawî dibe.

Heger k hejmareke neguhêr be û $f(x) = \frac{k}{x-a}$ be, wê demê:

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} a} \frac{k}{x-a} = +\infty \qquad\qquad \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} a} \frac{k}{x-a} = -\infty$$

$$\frac{hejmar}{0} = \infty$$

Ji bo naskirina hêmaya ∞ em hêmaya paranê lêkolîn bikin.

Mînak: Em dawiya $f(x) = \frac{2}{x-3}$ ya di $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ de pênasekirî dema ku $x \longrightarrow \pm\infty$ û $x \longrightarrow 3$ bibînin:

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} \frac{2}{x-3} = \frac{2}{\pm\infty} = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3} \frac{2}{x-3} = \frac{2}{0} = \cdots\ \infty$$

Ji bo naskirina hêmaya ∞ em hêmaya paranê lêkolîn bikin:

$$x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 3$$

$$\lim_{x\overset{>}{\longrightarrow}3} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\overset{<}{\longrightarrow}3} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	

Rêgeza (3):

Dawiya pirpêkhateyekê li cem $\pm\infty$ dawiya pêkhateya bilintirîn hêz e.

Heger $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ pirpêkhateyek be, wê demê:

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} (a_n)$$

Mînak 1: Em encama $\lim_{x\longrightarrow+\infty} (-4x^2)$ bibînin:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} (-4x^2) = -4(+\infty)^2 = -4 \times (+\infty) = -\infty$$

Mînak 2: Em encama $\lim_{x\longrightarrow-\infty} (2x^3 - 5x^2 - 2x + 1)$ bibînin:

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} (2x^3 - 5x^2 - 2x + 1) = \lim_{x\longrightarrow-\infty} (2x^3) = 2(-\infty)^3$$

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} (2x^3 - 5x^2 - 2x + 1) = 2 \times (-\infty) = -\infty$$

Rêgeza (4):

Dawiya fonkisyona kertî li cem $\pm\infty$ dawiya pêkhateya bilindtirîn hêz e ji parê û bilindtirîn hêz e ji paranê.

Ango: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

$$= \begin{cases} +\infty\,, -\infty & : \quad n > m \\ \frac{a_n}{b_m} & : \quad n = m \\ 0 & : \quad n < m \end{cases}$$

Mînak: **Em encama dawiyên li jêr bibînin:**

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3+3x+1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2)$
  $= 2(+\infty)^2$
  $= +\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x+1}{2x-3}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{2x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x-3}{x^2-9x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)$
  $= \frac{1}{+\infty} = 0$

3. Dawiya fonkisyona sêgoşeyî

Rêgez:

Heger x pîvana goşeyekê bi radyan be, wê demê:

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad : \quad a \in \mathbb{R}^*$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 0$

Mînak: **Em encama dawiyên li jêr bibînin:**

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \times 5 = 1 \times 5 = 5$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (\frac{\sin 3x}{x} \times \frac{1}{\cos 3x})$

$$= \lim_{x \to 0} (\frac{\sin 3x}{3x}) \times \lim_{x \to 0} (\frac{3}{\cos 3x})$$

$$= \lim_{x \to 0} (\frac{\sin 3x}{3x \cos 3x} \times 3)$$

$$= 1 \times 3 = 3$$

HÎNDARÎ

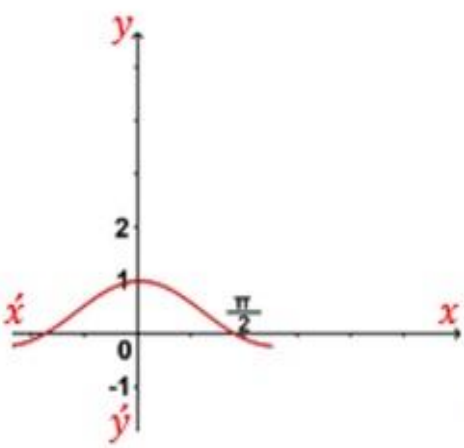
1. Em encama bikaranînên li jêr di $\mathbb{R}$ de bibînin:

$\mathbf{0} \div (-\mathbf{4})$ $\qquad$ $\mathbf{5} \div \mathbf{0}$ $\qquad$ $\mathbf{9} \div (+\infty)$

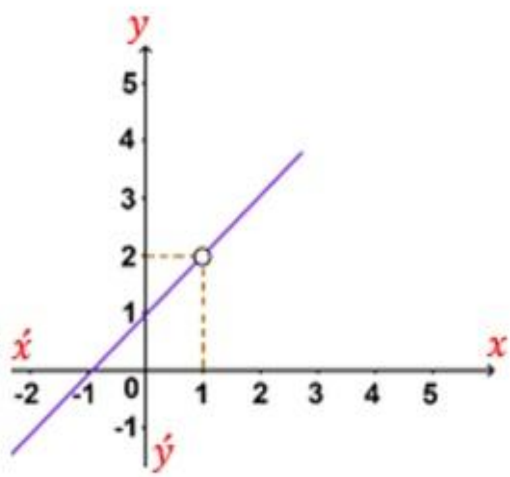
$+\infty \times \mathbf{0}$ $\qquad$ $(-\mathbf{2}) \times (+\infty)$ $\qquad$ $-\infty + \mathbf{12}$

$+\infty + \infty$ $\qquad$ $(+\infty) \div (+\infty)$

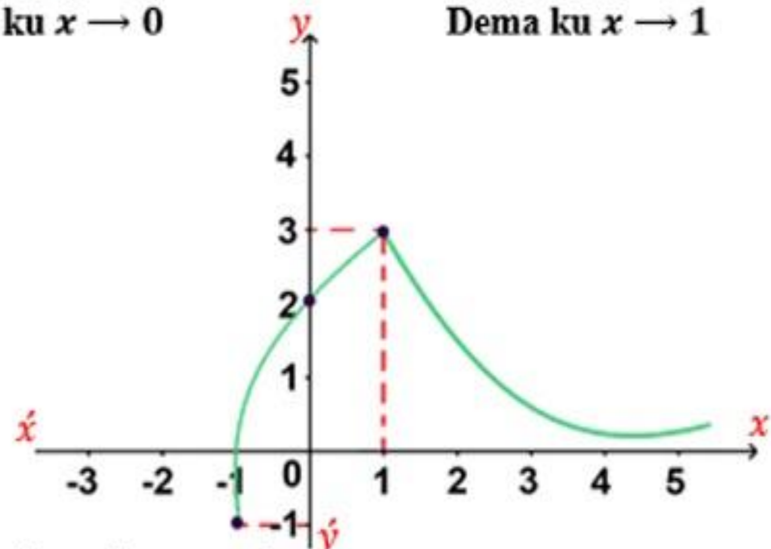
2. Ji xêzika girafîkî em dawiya fonkisyonên li jêr bibînin:



Dema ku $x \longrightarrow 0$



Dema ku $x \longrightarrow 1$



Dema ku $x \longrightarrow 1$

3. Em encama dawiyên li jêr bibînin:

$\lim\limits_{x\to 0}(x^2-4)$

$\lim\limits_{x\to 1}(2x-2)$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to -2}(5)$

$\lim\limits_{x\to -\infty}(-2x^2+x-1)$

$\lim\limits_{x\to \mp\infty}(\dfrac{1}{x^2})$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{-5}{x-2})$

$\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{2x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to 5}(\dfrac{x^2-5x}{\sqrt{x+4}-3})$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$

4. Heger f fonkisyoneke di $\mathbb{R}$ de pênasekirî ye li gorî $f(x)=\begin{cases}2x & : \ x>1\\ 3x^2 & : \ x\le 1\end{cases}$

Em $\lim\limits_{x\overset{>}{\longrightarrow}-1} f(x)$, $\lim\limits_{x\overset{<}{\longrightarrow}-1} f(x)$ **bibînin û piştre encamê bigirin ku** $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ **heye yan jî na û çima?**

WANEYA DUYEM: DOMDARIYA FONKISYONÊ

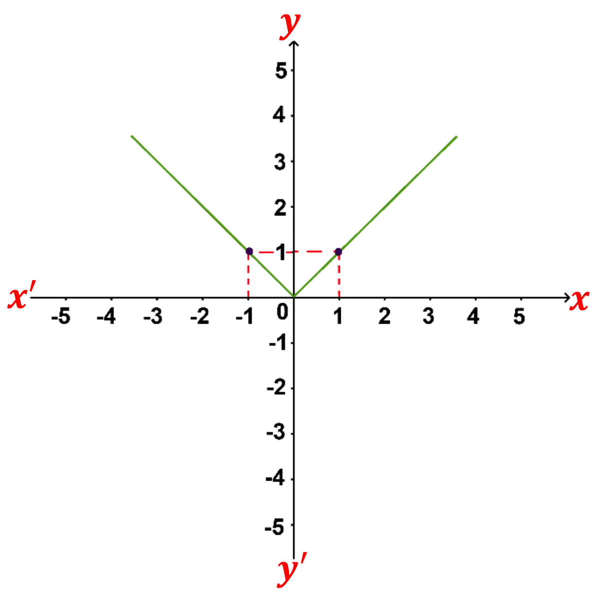
Domdariya fonkisyonê tê wateya ku xêzkirina girafîkî jê re bi hev ve ye, bêqutkirin di navbereke diyarkirî de ye.

Her wiha çi guhartineke biçûk di nenasê de çêbibe, dê guhertineke biçûk di nirxê fonkisyonê de jî çêbibe.

1- Domdariya fonkisyonê li cem xalekê

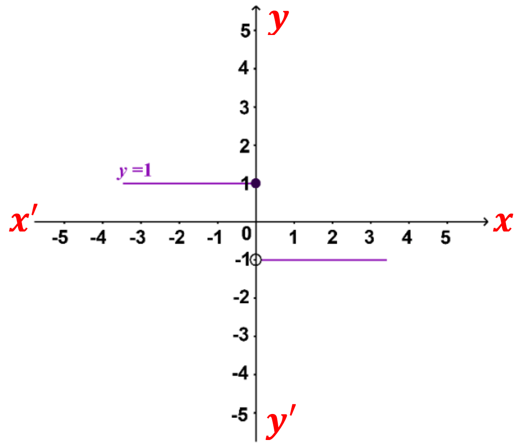
Em her du teşeyên li jêr bibînin:

- $f_1(x) = |x|$



Em dibînin ku xêzika girafîkî bi hev ve ye û qutkirin tê de tune ye li cem her xalekê ji komika pênaseyê, ji ber vê yekê f_1 di komika pênaseyê de domdar e.

- $f_2(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \leq 1 \\ -1 & : \quad x > 1 \end{cases}$



Em dibînin ku xêzika girafîkî ne bi hev ve ye li cem xalekê ji komika pênaseyê, ji ber vê yekê f_2 li cem wê xalê ne domdar e.

Pênase

Heger fonkisyona f di navbera vekirî $I \subseteq \mathbb{R}$ de û $x_0 \in$ I be, em dibêjin ku f li cem x_0 domdar e, heger ev merc pêk hat: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Encam

Dema ku $x_0 \in$ I be, fonkisyon li cem x_0 ne domdar e.

Mînak: **Heger $f(x) = \begin{cases} x & : \quad x \leq 1 \\ x+1 & : \quad x > 1 \end{cases}$ fonkisyonek be:**

1. Em komika pênaseyê bibînin.

2. Em tekez bikin ku f li cem $x = 0$ domdar e.

3. Gelo f li cem $x = 1$ domdar e yan na û çima?

4. Em xêzika wê ya girafîkî xêz bikin.

Çare:

1. Komika pênaseyê: $D = \mathbb{R}$

2. $$\left.\begin{array}{c} f(0) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

Ji ber vê yekê fonkisyon li cem $x = 0$ domdar e.

3. Rêgeza girêdanê li aliyê rast û çepê yê hejmara (1) cuda ye, ji ber vê yekê em li dawiyê ji aliyê rast û çepê ve bigerin.

$$\left.\begin{array}{c} f(1) = 1 \\ \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(x) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = f(1) = 1$$

Fonkisyona f li cem (1) ji aliyê çepê ve domdar e.

Di heman demê de:

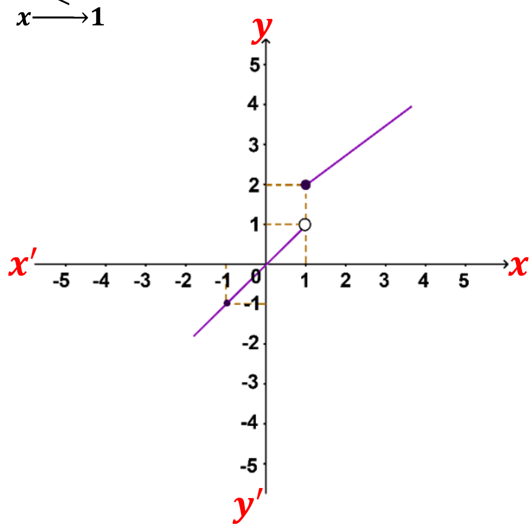
$$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Ango: $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) \neq f(1)$

Fonkisyona f li cem (1) ji aliyê rastê ve ne domdar e.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) \neq \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) \Rightarrow$ **Fonkisyon li cem (1) ne domdar e.**

4. Xêzkirin:



Mînak: Heger $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ fonkisyonek be, em domdariya fonkisyonê li cem $x = 2$ û $x = 3$ lêkolîn bikin:

Em dibînin ku fonkisyon di $D = \mathbb{R} \backslash \{2\}$ de pênasekirî ye û ji ber ku $2 \notin D$ ye, wê demê fonkisyon li cem $x = 2$ ne domdar e.

Lê dema ku $x = 3$ be, em dibînin ku: $f(3) = \frac{3+3}{3-1} = \frac{6}{1} = 6$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \left(\frac{x+3}{x-2}\right) = \frac{3+3}{3-1} = \frac{6}{1} = 6$$

$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) \Longrightarrow$ Fonkisyon li cem $x = 3$ domdar e.

2- Domdariya fonkisyonê di navberekê de

Pênaseya (1)

Heger fonkisyona f di navbera vekirî $]a, b[$ de pênasekirî be û heta ku f di vê navbera vekirî de domdar be, divê li cem her xalekê jê domdar be, ango $\forall\, x_0 \in]a, b[$ be, wê demê f li cem x_0 domdar e.

Pênaseya (2)

Heger fonkisyona f di navbera $[a, b]$ de pênasekirî be, em dibêjin f di wê navberê de domdar e heger:

1. $f(x)$ di navbera $[a, b]$ de pênasekirî be.

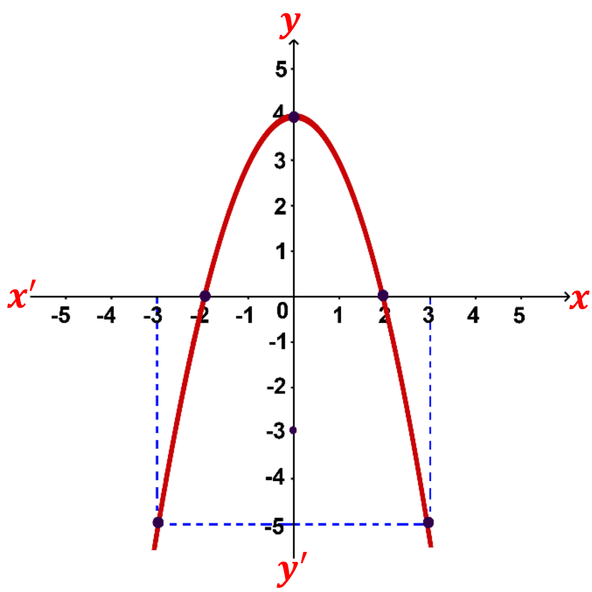
2. $\lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = f(a)$ û $\lim_{x \xrightarrow{<} b} f(x) = f(b)$

Mînak 1: **Teşeya li jêr fonkisyona $f(x) = 4 - x^2$ ya di navbera $[-3, +3]$ de pênasekirî, nîşan dide û heta ku di wê navberê de domdar be, divê di navbera vekirî $]-3, +3[$ de domdar be.**

$\Longrightarrow \ \forall\, x_0 \in \,]-3, +3[$, **wê demê** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Di heman demê de:

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -3} f(x) = f(-3)$ **û** $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} +3} f(x) = f(3)$



Mînak 2: **Heger $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ fonkisyonek be:**

1. Em komika pênaseyê D bibînin.

2. Fonkisyon di D de domdar e yan na?

3. Em xêzika wê ya girafîkî xêz bikin.

Çare:

1. Komika pênaseyê, komika çareyên newekheviya $1 - x^2 \geq 0$ ye.

Em hêmaya $1 - x^2 = 0$ lêkolîn bikin:

$$(1 - x)(1 + x) = 0$$

Yan: $x = 1$ Yan jî: $x = -1$

x	$-\infty$	-1		$+1$		$+\infty$
$1 - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$1 - x^2 \geq 0$	Ne pêkhatî ye		Pêkhatî ye		Ne pêkhatî ye	

$$D = [-1\,, +1]$$

2. Heta em tekez bikin ku fonkisyon di navbera girtî $[-1, +1]$ de, domdar be, divê di navbera vekirî $]-1, +1[$ de domdar be û piştre li cem (-1) ji aliyê rastê ve û li cem $(+1)$ ji aliyê çepê ve domdar be.

- **Domdarî di navbera vekirî $]-1, +1[$ de:**

$$\forall\, x_0 \in\ ]-1, +1[\ \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\sqrt{1 - x^2}\right)$$

$$= \sqrt{1 - {x_0}^2}$$

$$= f(x_0)$$

Ango fonkisyon li cem x_0 domdar e, her wiha di navbera vekirî $]-1, +1[$ de domdar e.

- **Domdarî li cem (-1) ji aliyê rastê ve:**

$$\lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\longrightarrow} -1} \left(\sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-1} = 0 = f(-1)$$

Ango fonkisyon li cem (-1) ji aliyê rastê ve domdar e.

- **Domdarî li cem $(+1)$ ji aliyê çepê ve:**

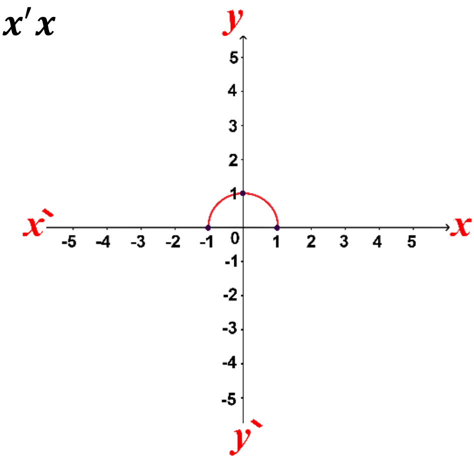
$$\lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} +1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\longrightarrow} +1} \left(\sqrt{1-x^2}\right) = \sqrt{1-1} = 0 = f(+1)$$

Ango fonkisyon li cem $(+1)$ ji aliyê çepê ve domdar e.

Em encamê digirin ku f di navbera $[-1,+1]$ de domdar e.

3. Xêzkirin:

Nîvkevana bazinê ye, navenda wê $O(0,0)$ ye û nîveşkêla wê (1) ye, ya ku li ser tewareya $x'x$



Encam:

1. Her fonkisyoneke pirpêkhate di $\mathbb{R}$ de yan jî di binkomikeke wê de domdar e.

2. Her fonkisyoneke kertî di $\mathbb{R}$ ji bilî sifirên paranê de domdar e.

3. Her fonkisyoneke sin an jî cos di $\mathbb{R}$ de pênasekirî ye.

4. Her fonkisyoneke di navbera I de û bi rêgezeke girêdanê nîşankirî be, di wê navberê de domdar e.

Mînak: **Em domdariya fonkisyonên li jêr di komikên wan yên pênaseyê de, lêkolîn bikin:**

- $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Fonkisyoneke pirpêkhate ye, di $\mathbb{R}$ de domdar e.

- $f(x) = \frac{x^2-4}{x+4}$

Fonkisyoneke kertî ye di $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$ de pênasekirî ye, her wiha di $\mathbb{R}\backslash\{-4\}$ de domdar e.

- $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{x^2-1}$

Em dizanin ku $\sin x$, $\cos x$ di $\mathbb{R}$ de pênasekirî ye, her wiha di $\mathbb{R}$ de domdar e.

Lê sifirên paranê: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Ango fonkisyona $f(x)$ di $\mathbb{R}\backslash\{-1, +1\}$ de pênasekirî ye.

Hir wiha fonkisyona f di komika pênaseyê de domdar e.

HÎNDARÎ

1. Heger $f(x) = \begin{cases} x+1 & : \ x \geq 1 \\ -2x+4 & : \ x < 1 \end{cases}$ fonkisyoneke di $\mathbb{R}$ de pênasekirî be:

- Em tekez bikin ku fonkisyon li cem $x = 2$ domdar e.

- Gelo fonkisyon li cem $x = 1$ domdar e û çima?

- Em xêzika girafîkî ji vê fonkisyonê re xêz bikin.

2. Heger $g(x) = \frac{x+1}{x-5}$ fonkisyonek be, em domdariya fonkisyonê li cem $x = 5$ û $x = 6$ lêkolîn bikin.

3. Em domdariya fonkisyonên li jêr di komikên wan ên pênaseyê de lêkolîn bikin:

- $f(x) = 5$
- $g(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$
- $h(x) = \frac{\cos x}{x-6}$

4. Heger $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ fonkisyonek be:

- Em komika pênaseyê D bibînin.

- Gelo fonkisyon di D de domdar e.

- Em xêzika girafîkî di D de xêz bikin.

BEŞA SÊYEM: DARAŞTIN

1. HEJMARA DARAŞTÎ
2. PÊKANÎNÊN DARAŞTINÊ
3. FONKISYONA RESEN

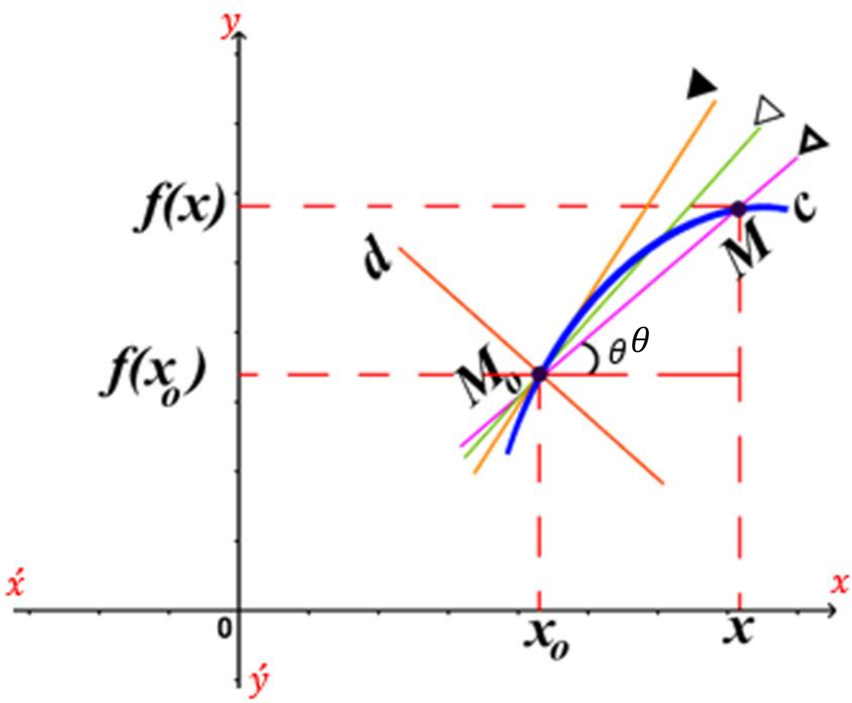
WANEYA YEKEM: HEJMARA DARAŞTÎ

Heger (C) xêzika girafîkî ji fonkisyona f re ya di D de pênasekirî be li gorî têkiliya $y = f(x)$ û heger $M_0(x_0, y_0)$ xaleke neguhêr ji xêzika C be û $M(x, y)$ xaleke bitevger be li ser xêzika girafîkî C û heger Δ rastekbireke xêzika C di her du xalên M_0 û M de:

Xwariya rasteka Δ: $m = tan\,\theta = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Heger xala M nêzî xala M_0 bibe, wê demê rasteka Δ dibe pêveka xêzika girafîkî C

Xwariya pêveka Δ: $m = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$



Têbînî:

1. Divê ev dawî hejmareke rast be.

2. Heger $m \in \mathbb{R}^*$ be, wê demê pêvek xwar e û hevkêşeya wê bi awayê $y - y_0 = m(x - x_0)$ ye.

3. Heger $m = 0$ be, wê demê pêvek rastênhevî $x'x$ e û hevkêşeya wê $y = y_0$ e.

4. Heger $m = \frac{hejmar}{0}$ be, wê demê pêvek rastênhevî $y'y$ ye û hevkêşeya wê $x = x_0$ e.

5. Rasteka d li ser pêvekê di xala pêvekirinê de tîk bi navê rasteka tîk a xêzika C di xala M_0 de tê naskirin.

Heger m xwariya pêvekê be û m' xwariya rasteka tîk be, wê demê: $m \,.\, m' = -1$

Mînak: **Heger $f(x) = 3x^2 - 5$ fonkisyonek be, em xwariya pêveka xêzika girafîkî li cem xala $A(2, 7)$ bibînin û piştre hevkêşeya pêvekê jê re li cem xala A binivîsin:**

Em dibînin ku: $f(2) = 3(2)^2 - 5 = 7$

$\Longrightarrow A(2, 7)$ endama xêzika girafîkî ya fonkisyona f ye.

$$m = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5 - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5 - 7}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 12}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3(x+2)(x-2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} 3(x + 2) = 12$$

$m = 12 \implies$ **Hevkêşeya pêvekê bi vî awayî ye:**

$$y - y_0 = m(x - x_0) \implies y - 7 = 12(x - 2)$$

$$\implies y - 7 = 12x - 24$$

$$\implies y = 12x - 17$$

Pênaseya hejmara daraştî

Heger f fonkisyoneke hejmarî di D de domdar be û $x_0 \in D$ be, em fonkisyona g ya di $D' = D\backslash\{x_0\}$ pênasekirî li gorî têkiliya $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ çêkin.

Heger ji fonkisyona $g(x)$ re dema ku $x \longrightarrow x_0$ dawiyeke rast hebe, em dibêjin ku fonkisyona f li cem x_0 tê daraştin, nirxê dawiyê bi navê nirxê hejmarî ji daraştî re li cem x_0 tê naskirin û bi sembola $f(x_0)$ tê nîşankirin.

Her wiha: $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = f'(x_0)$

Encam:

1. $m(x_0) = f'(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Ango: Pêvek û xêzika girafîkî C di xala M_0 de, nirxê hejmarî li cem x_0 ji daraştî re ye.

2. Heger $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ **be, wê demê em dibêjin ku fonkisyon li cem x_0 nayê daraştin.**

3. Ev pênase rast dimîne, dema ku em li hejmara daraştî ji aliyê rastê an jî çepê yê x_0 bigerin û dema ku her du dawî yeksan bin, em dibêjin ku fonkisyon li cem x_0 tê daraştin.

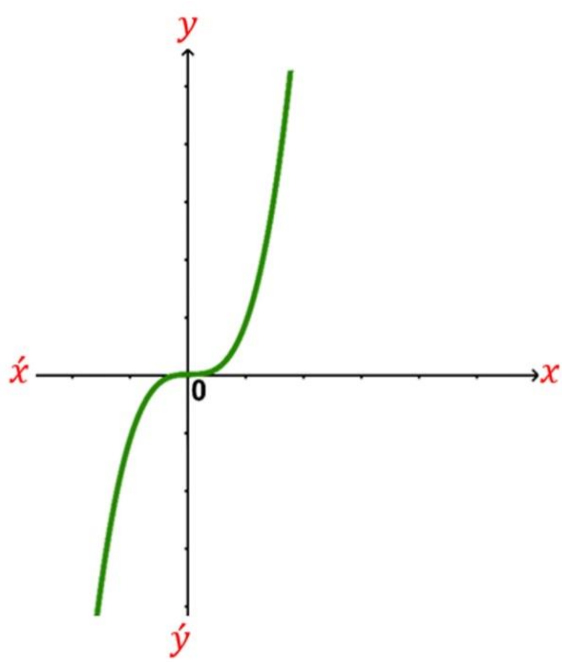
Mînak 1: **Heger C xêzika girafîkî ji fonkisyona $f(x) = x^3$ ya di $\mathbb{R}$ pênasekirî be, em daraştina fonkisyona f li cem $x = 0$ lêkolîn bikin:**

Em fonkisyona $g(x)$ li gorî $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ çêkin:

$$g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^3-0}{x-0} = x^2$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 \in \mathbb{R}$$

Fonkisyona f li cem $x = 0$ tê daraştin û $m = f'(0) = 0$



Mînak 2: **Em daraştina fonkisyona f ya di $\mathbb{R}$ de pênasekirî li gorî $f(x) = |x+1|$ dema ku $x = -1$ be, lêkolîn bikin:**

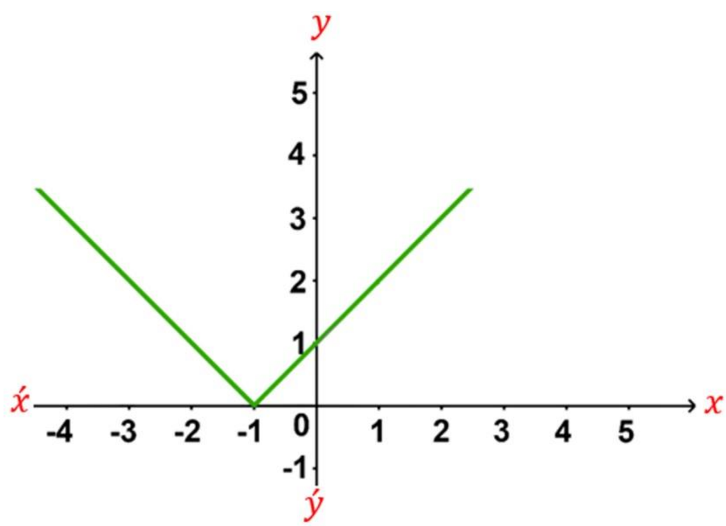
Em fonkisyona g ya di $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ de pênasekirî çêkin:

$$g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{|x+1|-0}{x+1} = \frac{|x+1|}{x+1}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \left(\frac{x+1}{x+1}\right) = 1 \Rightarrow m_1(-1) = 1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} -1} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} -1} \left(\frac{-x-1}{x+1}\right) = -1 \Rightarrow m_2(-1) = -1 \in \mathbb{R}$$

Lê $m_1(-1) \neq m_2(-1)$ $\Rightarrow$ Fonkisyon li cem $x = -1$ nayê daraştin.



Rahênan: **Em daraştina fonkisyona f ya di $\mathbb{R}$ de pênasekirî li gorî $f(x) = 3x^2 - 4$ dema ku $x = 5$ be, lêkolîn bikin û $f'(x)$ bibînin.**

Rêgezên daraştinê

1. Daraştiya hejmara neguhêr:

Heger $f(x) = a \;:\; a \in \mathbb{R}$ be, wê demê $f'(x) = 0$

Mînak: Em daraştiya fonkisyona $f(x) = 4$ bibînin:

Em dibînin ku f fonkisyoneke neguhêr e $\Longrightarrow f'(x) = 0$

2. Daraştiya fonkisyona ji pileya yekem:

Heger $f(x) = ax + b \;:\; a, b \in \mathbb{R}$ be, wê demê $f'(x) = a$

Mînak: Em daraştiya fonkisyona $f(x) = 3x - 1$ bibînin:

Em dibînin ku f fonkisyoneke ji pileya yekem e $\Longrightarrow f'(x) = 3$

2. Daraştiya fonkisyona ji pileya n:

Heger $f(x) = ax^n \;:\; a, n \in \mathbb{R}^* \backslash \{1\}$ be, wê demê:

$$f'(x) = a\,.\,n\,.\,x^{n-1}$$

Mînak: Em daraştiya fonkisyona $f(x) = 2x^3$ bibînin:

Em dibînin ku f fonkisyoneke ji pileya sêyem e $\Longrightarrow$

$$f'(x) = 3 \times 2x^2 \;\Longrightarrow f'(x) = 6x^2$$

4. Daraştiya komkirin an jî derxistina fonkisyonan, komkirina daraştiyên fonkisyonan e.

$$f(x) = f_1 \mp f_2 \mp \cdots \mp f_n \Longrightarrow\; f'(x) = f'_1 \mp f'_2 + \cdots \mp f'_n$$

Mînak: Em daraştiya fonkisyona $f(x) = 3x^2 + 2x + 7$ bibînin:

$$f(x) = f_1 + f_2 + f_3 \Longrightarrow f'(x) = f'_1 + f'_2 + f'_3$$
$$= 2 \times 3x + 2 + 0 = 6x + 2$$

5. Daraştiya hevdana du fonkisyonan:

$$f(x) = g(x).h(x) \Longrightarrow f'(x) = g'(x).h(x) + h'(x).g(x)$$

Mînak: Em daraştiya fonkisyona $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$ bibînin:

$$f'(x) = (2x)(x^3 + 3) + (3x^2)(x^2 + 1)$$
$$= 2x^4 + 6x + 3x^4 + 3x^2$$
$$= 5x^4 + 3x^2 + 6x$$

6. Daraştiya parvekirinê:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Longrightarrow f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - h'(x).g(x)}{\big(h(x)\big)^2}$$

Mînak: Em daraştiya fonkisyona $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+1}$ bibînin:

$$f'(x) = \frac{2x(x^3 + 1) - (3x^2)(x^2 - 1)}{(x^3 + 1)^2}$$
$$= \frac{2x^4 + 2x - 3x^4 + 3x^2}{(x^3 + 1)^2}$$
$$= \frac{-x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^3 + 1)^2}$$

7. Daraştiya fonkisyona lêkhatî:

$$f(x) = a[g(x)]^n \qquad : a, n \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = a.n[g(x)]^{n-1}.g'(x) \qquad : a, n \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$$

Mînak: **Em daraştiya fonkisyona** $f(x) = 3(x^2+1)^4$ **bibînin:**

$$f(x) = 3(x^2+1)^4 \Longrightarrow f'(x) = 3 \times 4(x^2+1)^3(2x)$$
$$= 24x(x^2+1)^3$$

8. Daraştiya kokdamê:

$$f(x) = \sqrt[2]{g(x)} \Longrightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt[2]{g(x)}}$$

Mînak: **Em daraştiya fonkisyona** $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ **bibînin:**

$$f(x) = \sqrt{x^2-1} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$$

9. Daraştiya fonkisyona nirxê mutleq:

$$f(x) = |g(x)| \Longrightarrow f'(x) = \frac{g(x).g'(x)}{|g(x)|}$$

Mînak: **Em daraştiya fonkisyona** $f(x) = |2x+1|$ **bibînin:**

$$f(x) = |2x+1| \Longrightarrow f'(x) = \frac{(2x+1)(2)}{|2x+1|} = \frac{4x+2}{|2x+1|}$$

10. Daraştiya fonkisyona sin:

$$f(x) = sin\, x \Longrightarrow f'(x) = cos\, x$$

Rewşeke taybet:

$$f(x) = sin\, g(x) \Longrightarrow f'(x) = g'(x)\,.\, cos\, g(x)$$

Mînak: Em daraştiya fonkisyona $f(x) = sin(3x - 1)$ bibînin:

$$f(x) = sin(3x - 1) \Longrightarrow f'(x) = 3\, cos(3x - 1)$$

11. Daraştiya fonkisyona cos:

$$f(x) = cos\, x \Longrightarrow f'(x) = -\, sin\, x$$

Mînak: Em daraştiya fonkisyona $f(x) = cos(\frac{\pi}{2} + 4x)$ bibînin:

$$f(x) = cos(\frac{\pi}{2} + 4x) \Longrightarrow f'(x) = -\, 4\, sin(\frac{\pi}{2} + 4x)$$

12. Daraştiya fonkisyona hêzî:

$f(x) = a^{g(x)} \Longrightarrow f'(x) = g'(x)\,.\, a^{g(x)}$ li gorî ku a hejmareke neguhêr e

Mînak: Em daraştiya fonkisyona $f(x) = 3^{2x-1}$ bibînin:

$$f(x) = 3^{2x-1} \Longrightarrow f'(x) = 2 \times 3^{2x-1}$$

13. Daraştiya fonkisyona logarîtmayî:

$$f(x) = \log[g(x)] \Longrightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Mînak: **Em daraştiya fonkisyona** $f(x) = \log(5x^2 - 1)$ **bibînin:**

Rahênan: **Em daraştiyên fonkisyonên li jêr bibînin û piştre** $f'(a)$ **bibînin:**

$f_1(x) = -\sqrt{3}$ $\quad : a = 0$

$f_2(x) = \sqrt{x}$ $\quad : a = 4$

$f_3(x) = 3x$ $\quad : a = -1$

$f_4(x) = sin(2x)$ $\quad : a = \frac{\pi}{2}$

$f_5(x) = x + \sqrt{x}$ $\quad : a = 1$

$f_6(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 1)$ $\quad : a = 1$

$f_7(x) = \frac{2x - 1}{-3x + 1}$ $\quad : a = 2$

$f_8(x) = \sqrt{-2x + 4}$ $\quad : a = 1$

$f_9(x) = 5x^3 - 3x^2 + 10x + 3$ $\quad : a = -1$

HÎNDARÎ

1. Em xwariya pêveka xêzika girafîkî ya fonkisyona $f(x) = x^3 - 4$ li cem xala $A(1, -3)$ û piştre hevkêşeya pêvekê di xala A de bibînin:

2. Heger $f(x) = x^3 - 1$ fonkisyoneke di $\mathbb{R}$ de pênasekirî be, em daraştinê li cem (1) lêkolîn bikin û $f'(1)$ bi alîkariy pênaseya hejmara daraştî bibînin.

3. Em daraştiyên fonkisyonên li jêr bibînin:

- $f_1(x) = x^3 + 2x^2 - 7x$
- $f_2(x) = x + \sqrt{x + 3}$
- $f_3(x) = sin(2x + \pi)$
- $f_4(x) = x + cos(3x)$
- $f_5(x) = \frac{5x-4}{2x-3}$
- $f_6(x) = x\,.\,3^{2x}$
- $f_7(x) = (6x^3 + 3x + 1)^{10}$
- $f_8(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5$

WANEYA DUYEM: PÊKANÎNÊN DARAŞTINÊ

Lêkolîna guhertinên fonkisyonên hejmarî

1. Fonkisyona zêdeker û ya kêmker (Guhertina fonkisyonê)

Teorî:

Heger f fonkisyoneke di navbera vekirî D de daraştî be:

1. Mercê pêwîst û têr ji bo ku f di navbera D de tam zêdeker be ku $f'(x)$ di navbera D de tam pozîtîv be û di tu navbera ku binkomika D be nebe sifir.

2. Mercê pêwîst û têr ji bo ku f di navbera D de tam kêmker be ku $f'(x)$ di navbera D de tam negetîv be û di tu navbera ku binkomika D be nebe sifir.

3. Mercê pêwîst û têr ji bo ku f di navbera D de neguhêr be ku di navbera D de $f'(x) = 0$ be.

- **Nirxê mezintirîn ê herêmî**

Heger $(x_0 , f(x_0))$ xalek ji xêzika girafîkî ya fonkisyona f be û zêdekirina fonkisyonê li cem vê xalê bi dawî bibe û kêmkirina wê dest pê bike, wê demê $f(x_0)$ nirxê mezintirîn ê herêmî ye.

Ango daraştiya f hêmaya xwe li cem vê xalê ji + heta – diguhere.

- **Nirxê biçûktirîn ê herêmî**

Heger $(x_0 , f(x_0))$ xalek ji xêzika girafîkî ya fonkisyona f be û kêmkirina fonkisyonê li cem vê xalê bi dawî bibe û zêdekirina wê dest pê bike, wê demê $f(x_0)$ nirxê mezintirîn ê herêmî ye.

Ango daraştiya f hêmaya xwe li cem vê xalê ji $-$ heta $+$ diguhere.

Mînak 1: Em guhartina fonkisyona $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ ya di $\mathbb{R}$ de pênasekirî li gorî teoriya derbasbûyî lêkolîn bikin:

Em daraştiya fonkisyona f bibînin û hêmaya wê lêkolîn bikin: $f'(x) = 9x^2 + 2$

Em dibînin ku $\forall\ x \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow\ f'(x) > 0$

Li gorî teoriya derbasbûyî, fonkisyona f di $\mathbb{R}$ de tam zêdeker e.

Mînak 2: Em guhertina fonkisyona $f(x) = \frac{3}{x-1}$ ya di $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ de pênasekirî lêkolîn bikin:

Em daraştiya fonkisyonê bibînin:

$$f'(x) = \frac{-1\ \times 3}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

Em dibînin ku: $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \backslash\{1\} \quad \Longrightarrow\ f'(x) < 0$

Her wiha fonkisyon tam kêmker e.

Mînak 3: Em guhartina fonkisyona $f(x) = log(x)$ ya di $D =]0, +\infty[$ de pênasekirî lêkolîn bikin:

Em dibînin ku: $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$

Her wiha fonkisyona di D de tam zêdeker e.

Mînak 4: Em guhartina fonkisyona $f(x) = e^x$ ya di $D = \mathbb{R}$ de pênasekirî lêkolîn bikin:

Em dibînin ku: $f'(x) = e^x > 0$

Her wiha fonkisyon di D de tam zêdeker e.

2. Gavên lêkolîna guhertina fonkisyonên hejmarî

Heger f fonkisyoneke hejmarî be:

1. Em komika pênaseya fonkisyona f bibînin û bi awayê navber an jî yekgirtina navberan tê nivîsîn.

2. Em dawiya $f(x)$ li cem aliyên navberên vekirî ji komika pênaseyê bibînin û nirxên $f(x)$ li cem aliyên navberên girtî bibînin.

3. Em $f'(x)$ bibînin û hêmaya wê di hundirê komika pênaseyê de lêkolîn bikin.

4. Em agahiyên derbasbûyî di hundirê tabloyekê de bi rêxistin bikin.

Ew tablo bi navê tabloya guhertina fonkisyonê tê naskirin li gorî ku tîrên berbijor zêdekirinê û tîrên berbijêr kêmkirinê nîşan dikin.

Mînak 1: Em guhertina fonkisyona $f(x) = x^2 - 2x$ lêkolîn bikin û tabloyekê pê çêkin:

Em dibînin ku fonkisyon tam e $\Longrightarrow D = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (x^2) = (\pm\infty)^2 = +\infty$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

Em hêmaya $f'(x)$ lêkolîn bikin:

$$2x - 2 = 0 \Longrightarrow 2x = 2 \Longrightarrow x = 1 \Longrightarrow f(1) = -1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f\,(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

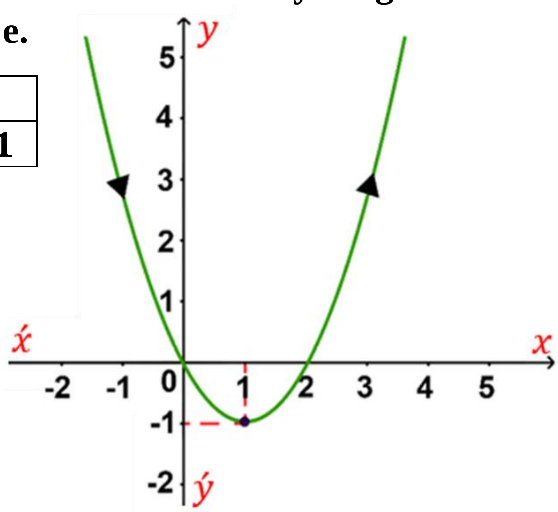
Em dibînin ku $f(1) = -1$ nirxê biçûktirîn ê fonkisyona f ye.

Her wiha fonkisyona f di navbera $]1\,, +\infty[$ de zêdeker e û di navbera $]-\infty\,, 1[$ de kêmker e.

Xêzkirin:

Naskirina xalên hevbirînê bi tewareyên girafîkî re û naskirina lûtkeyê bes e.

x	0	2	1
y	0	0	-1



Em ji xêzkirinê dibînin ku komika nirxan a giştî $f(\mathbb{R}) = [-1\,,+\infty[$ ye.

Mînak 2: Em guhartina fonkisyona $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ lêkolîn bikin û tabloyekê pê çêkin, piştre nirxê mezintirîn ji fonkisyona f re encamê bigirin, navberên zêdekirin û kêmkirinê nîşan bikin, komika nirxan a giştî bibînin û xêzika wê ya girafîkî xêz bikin:

$$D = \mathbb{R} =]-\infty\,,+\infty[$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (-x^2) = -(\pm\infty)^2 = -\infty$$

$$f'(x) = -2x + 4$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow -2x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$f(0) = 1$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f\,(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Em ji tabloyê dibînin ku:

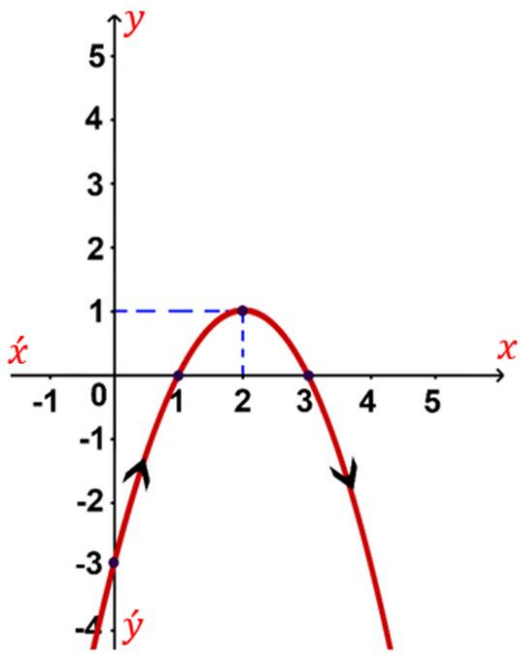
1. Nirxê mezintirîn ê herêmî ji fonkisyonê re $f(2) = 1$

2. komika nirxan $f(\mathbb{R}) =]-\infty\,,1]$

3. Fonkisyona f di navbera $]-\infty\,,2[$ zêdeker e û di navbera $]2,+\infty[$ de kêmker e.

Xêzkirin:

x	0	1	3	2
y	-3	0	0	1



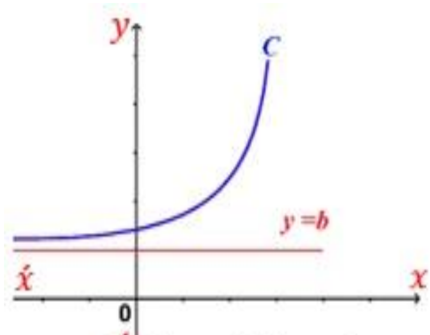
Têbînî

Ne girîng e ku nirxê mezintirîn ê herêmî, mezintirîn nirxên fonkisyonê be û di heman demê de ne girîng e ku nirxê biçûktirîn ê herêmî, biçûktirîn nirxên fonkisyonê be.

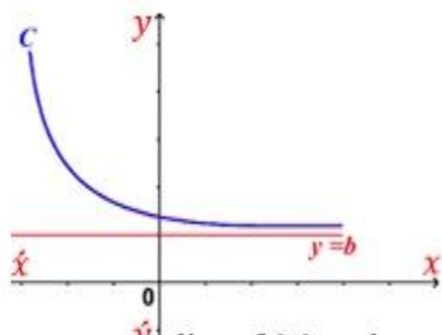
3. Rastekên nêzîker ên rastênhevî tewereyekê ji tewreyên hevtîk.

- **Nêzîkera rastênhevî tewereya $x'x$**

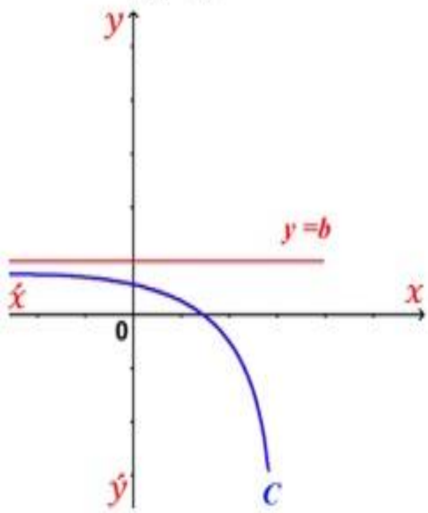
Heger C xêzika girafîkî ji fonkisyona f ya di $D \subseteq \mathbb{R}$ de pênasekirî be û heger Δ rasteka ku hevkêşeya wê $y = b$ be, û heger $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ be, wê demê em ji rasteka $\Delta: y = b$ re dibêjin nêzîkera asoyî ya xêzika C ye û rastênhevî $x'x$ e.



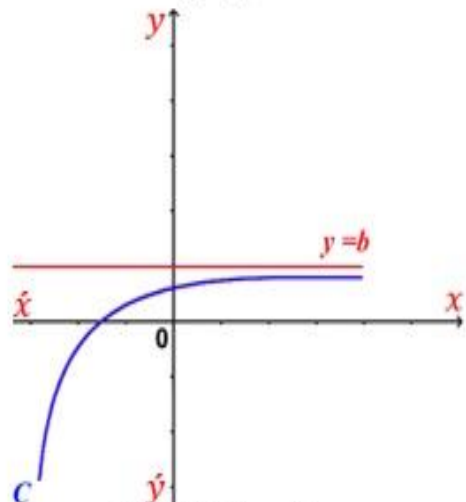
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

Têbînî

Ji bo naskirina rewşa xêzika C li gorî rasteka Δ em hêmaya derxistinê $f(x) - y_\Delta$ lêkolîn dikin û sê rewşan dibînin:

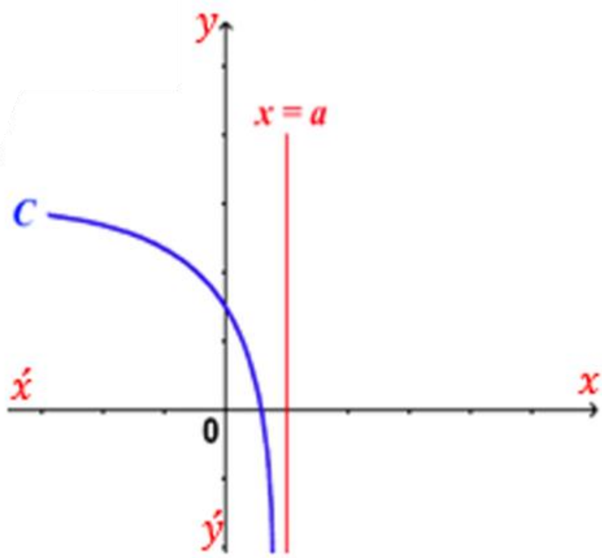
1. Di navbera ku tê de $f(x) - y_\Delta < 0$ be, xêzika C li bin rasteka Δ ye.

2. Di navbera ku tê de $f(x) - y_\Delta > 0$ be, xêzika C li ser rasteka Δ ye.

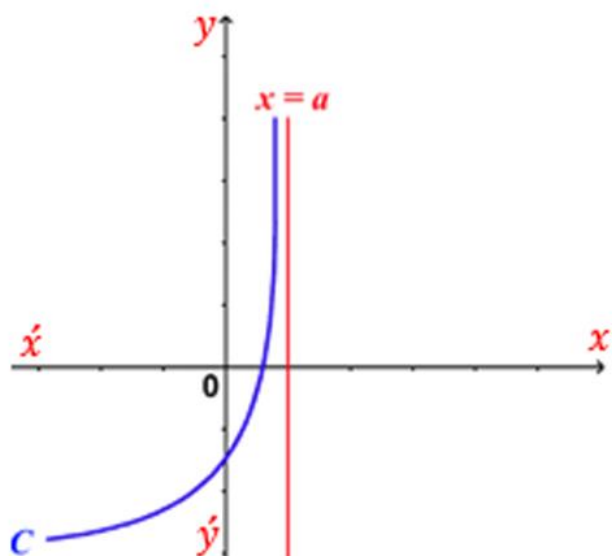
3. Di xalên ku tê de $f(x) - y_\Delta = 0$ be, xêzika C rasteka Δ dibire.

- **Nêzîkera rastênhevî tewereya $y'y$**

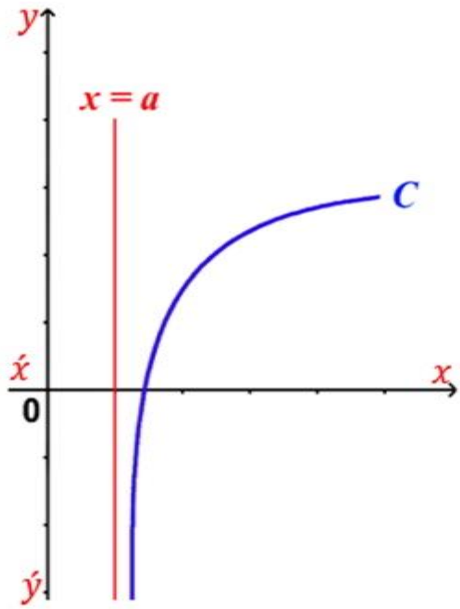
Rasteka $\Delta: x = a$ nêzîkereke tîkî ye û ratênhevî $y'y$ heger $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ be.



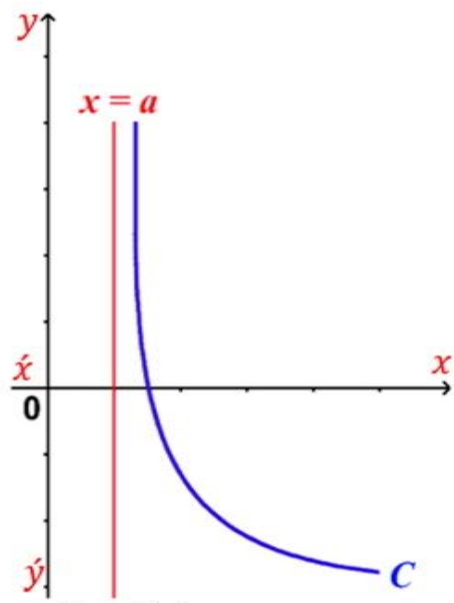
$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = -\infty$



$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$

- **Heger $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ be**

Tu nêzîkerên asoyî yan jî tîkî tune ne, em ji xala M_0 re dibêjin xala nêzîker ji xêzika girafîkî re.

Heger $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ be, tu nêzîkerên asoyî yan tîkî yan jî xalên nêzîker tune ne.

Mînak: Heger $f(x) = \frac{x-4}{x-3}$ fonkisyoneke di $\mathbb{R} \backslash \{3\}$ de pênasekirî be û C xêzika wê ya girafîkî be:

1. Em guhartina fonkisyona f lêkolîn bikin û tabloyekê pê çêkin û hevkêşeya her nêzîkereke asoyî yan jî tîkî ji xêzika C re bibînin.

2. Em hevkêşeya pêveka xêzika C ya rastênhevî nîveka çaryeka yekem $(y = x)$ binivîsin.

3. Em xêzika C û her nêzîkerek û pêvekeke hatî dîtin xêz bikin

Fonkisyona f di komika pênaseyê de, pênasekirî û domdar e: $\mathbb{R}\backslash\{3\} =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ **nêzîkereke asoyî ye, li cem $-\infty$ rastênhevî $\acute{x}x$ e**

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ **nêzîkereke asoyî ye, li cem $+\infty$ rastênhevî $\acute{x}x$ e**

Em hêmaya paranê lêkolîn bikin: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

x	$+\infty$		3		$-\infty$
$x - 3$		$+$	0	$-$	

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty \Rightarrow x = 3$$

Nêzîkereke tîkî ye, li cem $+\infty$ rastênhevî $\acute{y}y$ ye û C li aliyê çepê yê nêzîker e.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 3} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \Rightarrow x = 3$$

Nêzîkereke tîkî ye, li cem $-\infty$ rastênhevî $\acute{y}y$ ye û C li aliyê rastê yê nêzîker e.

Em daraştina fonkisyona f bibînin:

$$f'(x) = \frac{x-3-(x-4)}{(x-3)^2} = \frac{x-3-x+4}{(x-3)^2} = \frac{+1}{(x-3)^2} > 0$$

Fonkisyon her tim zêdeker e.

x	$-\infty$		3			$+\infty$
$f(x)$		+			+	
$f'(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	1	$-\infty$	$\nearrow$	1

Ji hevkêşeya nîveka çaryeka yekem em dibînin ku:

$y = x \Rightarrow m = 1$

$f'(x) = m = 1 \Rightarrow \frac{1}{(x-3)^2} = 1 \Rightarrow (x-3)^2 = 1$

Yan: $x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{4-4}{4-3} = \frac{0}{1} = 0$

Xala pêvekirina yekem: $M_1(4, 0)$

Hevkêşeya pêvekê:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 0 = 1(x - 4) \Rightarrow y = x - 4$

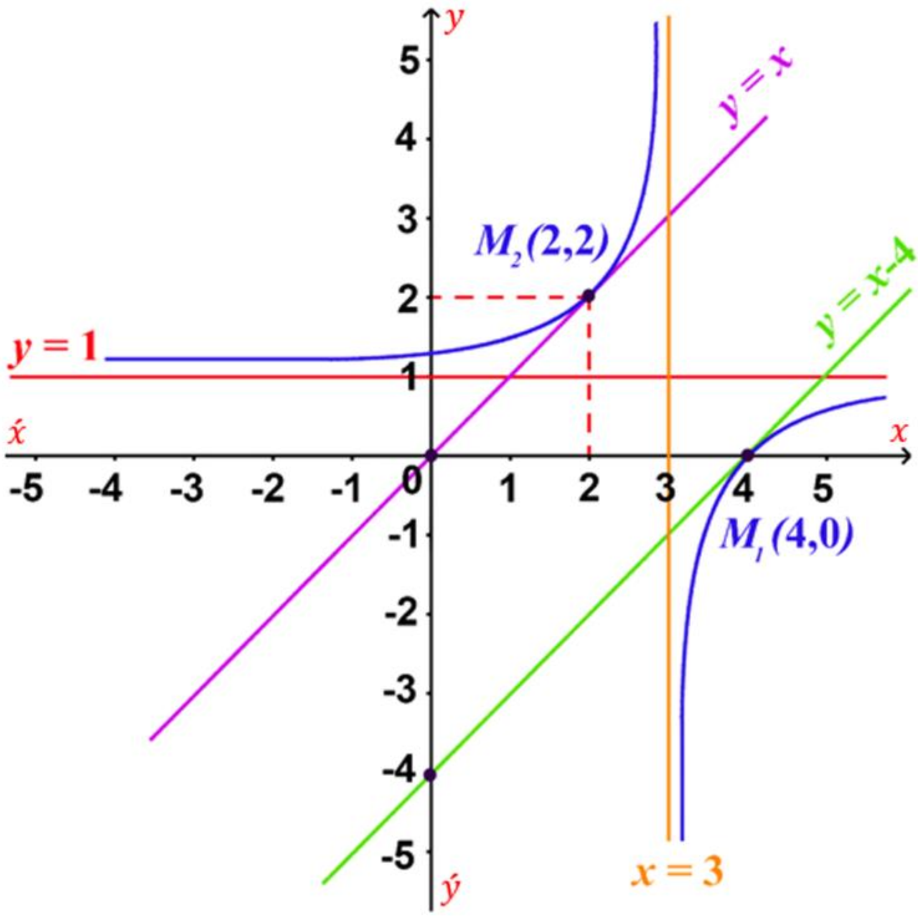
Yan jî: $x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(4) = \frac{2-4}{2-3} = \frac{-2}{-1} = 2$

Xala pêvekirina yekem: $M_2(2, 2)$

Hevkêşeya pêvekê:

$y - 2 = 1(x - 2) \Rightarrow y - 2 = x - 2 \Rightarrow y = x$

Xêzkirin:



HÎNDARÎ

1. Em guhartina fonkisyona $f(x) = (x-1)^3$ di $\mathbb{R}$ de lêkolîn bikin.

2. Heger $f(x) = x^3 + 3x^2$ fonkisyoneke di $\mathbb{R}$ de pênasekirî be:

- Em guhartina f lêkolîn bikin û tabloyekê pê çêkin.

- Em ji tabloyê nirxên mezintirîn û biçûktirîn ji f re encamê bigirin.

- Em komika nirxan a giştî bibînin.

- Em hevkêşeya $f(x) = 0$ çare bikin û piştre xêzika wê ya girafîkî xêz bikin.

3. Heger $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ fonkisyoneke di $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ de pênasekirî be û xêzika wê ya girafîkî C be:

- Em guhertina f lêkolîn bikin û tabloyekê pê çêkin û hevkêşeya her nêzîkereke asoyî yan jî tîkî ji xêzika C re bibînin.

- Em hevkêşeya pêveka xêzika C ya ku rastênhevî nîveka çaryeka yekem e, bibînin.

- Em her nêzîkerek, pêvekek û xêzika C xêz bikin.

4. Em guhertina fonkisyona $f(x) = \sqrt{x}$ di $D = [0\ ,+\infty[$ de lêkolîn bikin.

5. Em guhartina $f(x) = \frac{1}{x}$ di $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ lêkolîn bikin û piştre nêzîkerên rastênhevî tewareyên $x'x$ û $y'y$ bibînin û her nêzekereke hatî dîtin û xêzika C xêz bikin.

WANEYA SÊYEM: FONKISYONA RESEN

Me di lêkolîna daraştinê de nas kiribû ku:

Daraştiya fonkisyona $f(x) = x^3 + 3$ dibe $f'(x) = 2x^2$

Di vê rewşê de, em ji fonkisyona f re dibêjin fonkisyona resen a f' ye.

Di vî beşî de em ê bikaranîna vajî ji daraştinê re lêkolîn bikin, ango heger daraştî f' bê naskirin, çawa em ê fonkisyona resen bi dest bixin.

Mînak: Ji bo dîtina fonkisyona resen ji daraştiyê re li gorî x dibe $5x^4$

Heger em bêjin ku: $f(x) = 5x^4$

Niha em ê bi rêbazeke vajî ji bikaranîna daraştinê dest pê bikin:

$$nx^{n-1} = 5x^4 \Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 4$$

$F(x) = x^5$ yan $F(x) = x^5 + 3$ yan jî $F(x) = x^5 - 2$

Ango: $F(x) = x^5 + C \quad : \quad C \in \mathbb{R}$

Em ji $F(x)$ re dibêjin fonkisyona resen ji $f(x)$ re.

Rahênan: Em fonkisyona resen ji fonkisyonên li jêr re bibînin:

1. $f(x) = 2x$

2. $f(x) = 7x^6$

Pênase

Heger fonkisyona f di navbera $I \subseteq \mathbb{R}$ de pênasekirî be, em dibêjin F di wê navberê de fonkisyona resen e, heger her du mercên li jêr pêk hatin:

1. Fonkisyona F di navbera I de daraştî ye.

2. $\forall\ x \in I \implies F'(x) = f(x)$

Mînak: Fonkisyona $F(x) = x^2 + x + 1$ ji fonkisyona $f(x) = 2x + 1$ re fonkisyoneke resen e yan jî na?

Em $F'(x)$ bibînin: $F'(x) = 2x + 1$

Em dibînin ku: $F'(x) = f(x)$

Ango: $F(x)$ fonkisyoneke resen ji fonkisyona $f(x)$ re ye.

Rahênan: Em bibînin ku $f(x) = \frac{1}{2}x^6$ fonkisyoneke resen ji fonkisyona $f(x) = 3x^5$ ye.

Teorî 1: Ji her fonkisyoneke hejmarî f re di navbera $I \subseteq \mathbb{R}$ de domdar be, fonkisyoneke resen F di heman navberê de.

Teorî 2: Heger F di navbera I de fonkisyoneke resen ji fonkisyona f re be, wê demê:

Çi qasî neguhêr $C \in \mathbb{R}$ be, wê demê her fonkisyoneke ku rêgeza wê ya girêdanê $x \longrightarrow F(x) + C$ be, di I de fonkisyoneke resen e.

Ango: Heger f di I de fonkisyoneke domdar be, wê demê jê re hejmareke bêdawî ji fonkisyonên resen heye.

Mînak: Fonkisyona $F(x) = -x^2 + 2x$ fonkisyona resen ji fonkisyona $f(x) = -2x + 2$ re ye.

Em dibînin ku ji fonkisyona f re hejmareke bêdawî ji fonkisyonên resen heye ku rêgeza her yekê ji wan a girêdanê bi vî awayî ye:

$$F(x) = -x^2 + 2x + C \quad : \quad C \in \mathbb{R}$$

Mîna $F(x) = -x^2 + 2x + 7$ yan $F(x) = -x^2 + 2x - 5$ …

Fonkisyonên resen ji hinek fonkisyonên diyar re

Heger F di navbera $I \subseteq \mathbb{R}$ de fonkisyoneke resen be ji fonkisyona f re û heger C neguhêrek be, wê demê tabloya li jêr hinek rêgezan ji fonkisyona resen re dide xuyakirin:

Fonkisyon $f(x)$	Fonkisyona resen $F(x)$
0	C
$a \ : \ a \in \mathbb{R}^*$	$ax + C$
$x^n \ : \ n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \ : \ n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$
$sin(x)$	$-cos(x) + C$
$cos(x)$	$sin(x) + C$

Lêgerîna li fonkisyonên resen

Rêgeza (1):

Heger F fonkisyona resen ji fonkisyona f re di navbera $I \subseteq \mathbb{R}$ de be û heger G fonkisyona resen ji fonkisyona g re di navbera $I \subseteq \mathbb{R}$ de be, wê demê $F + G$ fonkisyona resen ji fonkisyona $f + g$ re ye.

Rêgeza (2):

Heger F fonkisyona resen ji fonkisyona f re di navbera $I \subseteq \mathbb{R}$ de be û heger k hejmareke rast û neguhêr be, wê demê fonkisyona $k.F$ fonkisyona resen ji fonkisyona $k.f$ re di navbera I de ye.

Mînak 1: **Em fonkisyona resen F ji $f(x) = 6x^2 + 4x$ di navbera $I \subseteq \mathbb{R}$ de bibînin:**

Em dibînin ku fonkisyona resen ji f re:

$$F(x) = \frac{6x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + C$$

$$\Longrightarrow F(x) = 2x^3 + 2x^2 + C$$

Mînak 2: **Em fonkisyona resen F ji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ di navbera $I =]0, +\infty[$ de bibînin:**

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$$

Fonkisyona resen: $F(x) = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$

$$F(x) = \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$

Dîtina fonkisyoneke resen

Mînak: **Em fonkisyona resen F_1 ji $f(x) = 3x^2 - 3$ di navbera $I = \mathbb{R}$ de û ya ku xêzika wê ya girafîkî di xala $(-2, 0)$ de diçe, bibînin:**

Em dibînin ku fonkisyona resen:

$$F(x) = \frac{3x^3}{3} - 3x + C$$

$$\Longrightarrow F(x) = x^3 - 3x + C$$

Lê tişta hatî xwestin fonkisyona resen F_1 ya ku xêzika wê girafîkî di xala $(-2, 0)$ re diçe.

Ango: Divê $F_1(-2) = 0$ pêk were.

$$\Longrightarrow (-2)^3 - 3(-2) + C = 0$$

$$-8 + 6 + C = 0$$

$$C = 2$$

Em dibînin ku fonkisyona resen a hatî xwestin ev e:

$$F_1(x) = x^3 - 3x + 2$$

Fonkisyona resen ji daraştiya fonkisyona lêkhatî

Heger H fonkisyoneke daraştî di navbera $I \subseteq \mathbb{R}$ de be û heger H' fonkisyona wê ya daraştî be di I de û heger f fonkisyoneke bi vî awayî be:

$$f(x) = H'(x).H^r(x) : \; r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$$

Wê demê fonkisyona resen F di navbera $I_1 \subseteq I$ de ev e:

$$F(x) = \frac{H^{r+1}(x)}{r+1} + C$$

Mînak: Em komika fonkisyonên resen ji fonkisyona bi awayê $f(x) = sin^3(x).cos(x)$ di navbera $I = \mathbb{R}$ de bibînin:

Heger $H(x) = sin(x)$ be, wê demê $H'(x) = cos(x)$

$$\Longrightarrow f(x) = H^3(x).H'(x)$$

Fonkisyona resen ji f re di navbera $I = \mathbb{R}$ de bi vî awayî ye:

$$F(x) = \frac{sin^4(x)}{4} + C$$

Întegrala nesînorkirî

Komika fonkisyonên resen F ji fonkisyona f re û bi navê întegrala nesînorkirî ji vê fonkisyonê re tê naskirin û bi sembola $\int f(x).dx$ tê nîşankirin.

Bi awayê întegrala fonkisyonê ji nenasa x re li gorî x tê xwendin.

Pênase

Heger $F'(x) = f(x)$ be, wê demê:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ : \ C \in \mathbb{R}$$

Mînak 1: Em encama $\int 3x^2.dx$ bibînin:

$$\int 3x^2.dx = x^3 + C$$

Mînak 2: Em encama $\int 14x^6.dx$ bibînin:

$$\int 14x^6.dx = 2x^7 + C$$

Rêgezên întegralê

1. $\int x^n.dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad : \quad C \in \mathbb{R}\ ,\ n \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$

Mînak: $\int x^5.dx = \frac{1}{6}x^6 + C$

2. $\int a\,.\,f(x).dx = a\int f(x).dx \quad : \quad a \in \mathbb{R}$

Mînak: $\int 3x^4.dx = 3\int x^4.dx = \frac{3x^5}{5} + C$

Rewşeke taybet: $\int a\,.\,dx = ax + C$

Mînak: $\int 5\,.\,dx = 5x + C$

3. $\int [f(x) \pm g(x)].dx = \int f(x).dx \pm \int g(x).dx$

Mînak: $\int (4x + 3x^2)dx = \int 4x\,.\,dx + \int 3x^2\,.\,dx$

$$= 2x^2 + x^3 + C$$

4. $\int (ax+b)^n\,.\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \ : \ n \neq -1$

Mînak: $\int (3x-2)^5\,.\,dx = \frac{(3x-2)^6}{18} + C$

HÎNDARÎ

1. Em komika fonkisyonên resen ji her fonkisyoneke ji fonkisyonên li jêr re bibînin:

- $f(x) = x^3 + 6x - 14$ **di navbera** $I = \mathbb{R}$ **de**
- $f(x) = x(x^2 + 1)^4$ **di navbera** $I = \mathbb{R}$ **de**
- $f(x) = 3\sqrt{x} + 4$ **di navbera** $I = [0\ , +\infty[$ **de**
- $f(x) = 2\sqrt[3]{x} + 6$ **di navbera** $I = \mathbb{R}$ **de**
- $f(x) = \frac{-2}{(2x+1)^2}$ **di navbera** $I = \left]-\frac{1}{2}\ , +\infty\right[$ **de**
- $f(x) = \frac{sin\,(x)}{cos^2(x)}$ **di navbera** $I = \left]0\ , \frac{\pi}{2}\right[$ **de**
- $f(x) = sin^4(x)$ **di navbera** $I = \mathbb{R}$ **de**

2. Em encamên îtegralên li jêr bibînin:

- $\int x^7\ .dx$
- $\int \left(7x^6 + \frac{4}{x^3}\right) dx$
- $\int x^{-4}\ .dx$
- $\int x\ .\sqrt{1 + x^2}\ .dx$
- $\int (2x - 7)^{-3}\ .dx$
- $\int \left(\frac{7}{\sqrt{3x-4}}\right).dx$

BEŞA PÊNCEM: HESABÊ SÊGOŞEYAN

1. RÊGEZA (sin) DI SÊGOŞEYÊ DE
2. RÊGEZA (cos) DI SÊGOŞEYÊ DE

WANEYA YEKEM: RÊGEZA (sin) DI SÊGOŞEYÊ DE

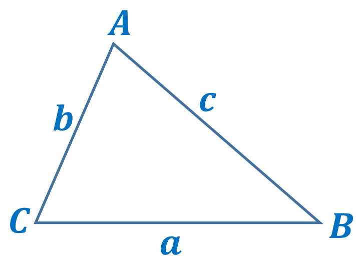
Di vê waneyê de, em ê rêgeza (sin) di sêgoşeyê de nas bikin.

Ev rêgez dê alîkariya me di hesabê dirêjahiyên kenarên sêgoşeyê û pîvanên goşeyên wê de bike.

Rêgeza sin di sêgoşeyê de

Heger ABC sêgoşeyeke be û dirêjahiyên kenarên wê a, b, c bin li gorî ku:

$$\begin{cases} a \ dir\hat{e}jahiya \ kenar\hat{e} \ beramber\hat{\imath} \ go\c{s}eya \ A \ be \\ b \ dir\hat{e}jahiya \ kenar\hat{e} \ beramber\hat{\imath} \ go\c{s}eya \ B \ be \\ c \ dir\hat{e}jahiya \ kenar\hat{e} \ beramber\hat{\imath} \ go\c{s}eya \ C \ be \end{cases}$$



Em dizanin ku rûbera rûyê sêgoşeyê yeksanî nîvê encama hevdana dirêjahiyên her du kenaran hevdanî sin a goşeya di navbera wan de ye.

$$S = \frac{1}{2} AB \, . \, AC \, . \, sinA$$

$$= \frac{1}{2} c \, . \, b \ sinA$$

Wê demê formên rûberan yeksan in:

$$\frac{1}{2} c \, . \, b \ sinA = \frac{1}{2} a \, . \, b \ sinC = \frac{1}{2} a \, . \, c \ sinB$$

Em hevdanî hejmara (2) bikin:

$$c\,.\,b\ sinA = a\,.\,b\ sinC = a\,.\,c\ sinB$$

Em li $a\,.\,b\,.\,c$ parve bikin:

$$\frac{sinA}{a} = \frac{sinC}{c} = \frac{sinB}{b}$$

Li gorî taybetiyên rêjedariyê:

$$\frac{a}{sinA} = \frac{c}{sinC} = \frac{b}{sinB}$$

Bi navê rêgeza sin tê naskirin.

Mînak: ABC sêgoşeyeke du hemkenar e ku tê de:

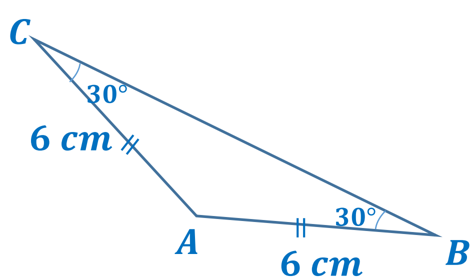
$$AB = AC = 6\ cm \quad , \quad \widehat{B} = \widehat{C} = 30°$$

Em dirêjahiya kenarê BC bibînin:

$$\widehat{A} = 180° - (30° + 30°) = 120°$$

$$\frac{BC}{sinA} = \frac{AB}{sinC} \Rightarrow \frac{BC}{\sin(120°)} = \frac{6}{\sin(30°)} \Rightarrow$$

$$\frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\frac{1}{2}} \Rightarrow BC = 6\sqrt{3}\ cm$$

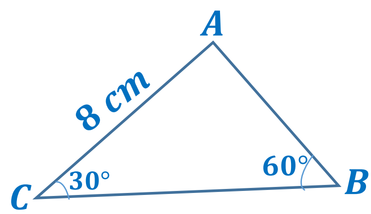


Çareya sêgoşeyê bi alîkariya rêgeza sin

Çareya sêgoşeyê tê wateya dîtina pîvanên endamên nenas bi alîkariya pîvanên hatin dayîn bi mercê ku herî kêm dirêjahiya kenarekî sêgoşeyê di navbera wan de hebe.

Mînak: **Em sêgoşeya ABC çare bikin heger em bizanin ku:**

$$\widehat{B} = 60^\circ \ , \widehat{C} = 30^\circ \ , AC = 8\ cm$$



Em dibînin ku: $\widehat{A} = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$

$$\frac{AC}{sinB} = \frac{AB}{sin30} \Longrightarrow \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AB}{\frac{1}{2}}$$

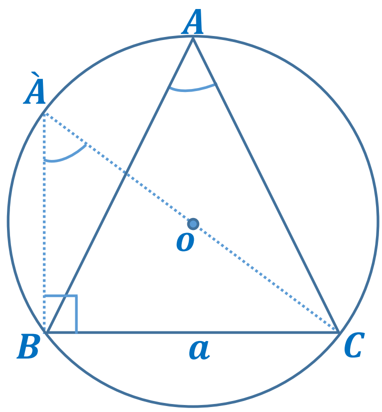
$$\Longrightarrow AB = \frac{8 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\ cm$$

$$\frac{AC}{sinB} = \frac{BC}{sinA} \Longrightarrow \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{BC}{1} \Longrightarrow BC = \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{16 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}\ cm$$

Pêkanînên sêgoşeyî ji rêgeza sin re

Heger $C(O\ ,r)$ bazinekî ku di sergoşeyên sêgoşeya ABC re biçe, em dibînin ku sêgoşeya $A'BC$ di B de tîk e, ji ber ku derdorî ye û beramberî kevana nîvbazinî ye.

$\widehat{A} = \widehat{\grave{A}}$ ji ber ku derdorî ne û bi heman kevana BC hevbeş e.



$$\Longrightarrow sinA = sin\grave{A} = \frac{BC}{\grave{A}C} = \frac{a}{2r} \Longrightarrow \frac{a}{sinA} = 2r$$

Bi heman rêbazê em dibînin ku:

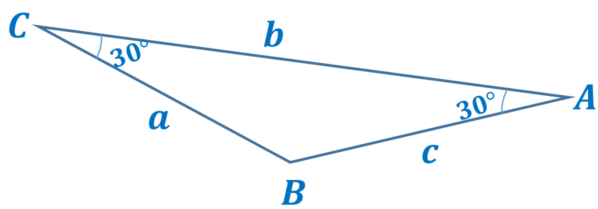
$$sinB = \frac{b}{2r} \Longrightarrow \frac{b}{sinB} = 2r$$

$$sinC = \frac{c}{2r} \Longrightarrow \frac{c}{sinC} = 2r$$

Ango: $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2r$

Her wiha: $a = 2r.sinA$, $b = 2r.sinB$, $c = 2r.sinC$

Mînak: Heger ABC sêgoşeyeke ku tê de: $\widehat{A} = \widehat{C} = 30°$ û $b = 6\ cm$ be, em $\widehat{B}$, r , a , c bibînin û piştre rûbera sêgoşeya ABC bibînin:



Em dibînin ku: $\widehat{B} = 180° - (30° + 30°) = 120°$

$$\frac{b}{sinB} = 2r \Rightarrow r = \frac{b}{2sinB} = \frac{6}{2\sin(120)} = \frac{6}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow r = \frac{6 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\ cm$$

Ji ber ku $\widehat{A} = \widehat{C} \Rightarrow a = c \Rightarrow$

$$a = c = 2r\,.\,sinA = 2 \times 2\sqrt{3} \times \sin(30) = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2}$$

$$= 2\sqrt{3}\ cm$$

Rûbera sêgoşeyê:

$$S = \frac{1}{2}\ c\,.\,b\,.\,sinA \Rightarrow S = \frac{1}{2}\ 2\sqrt{3} \times 6 \times \frac{1}{2} = 3\sqrt{3}\ cm^2$$

HÎNDARÎ

1. ABC sêgoşeyeke ku tê de $\widehat{B} = 45°$, $\widehat{C} = 60°$, $AC = 8\ cm$ be, em dirêjahiya kenarê AB bibînin.

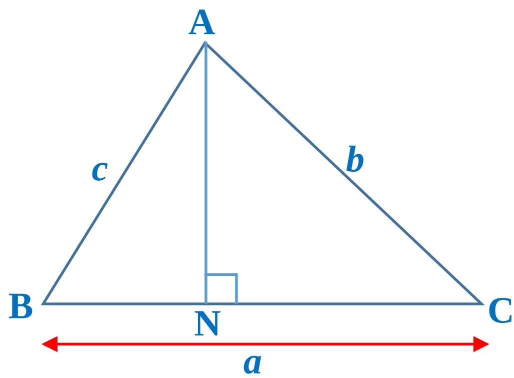
2. ABC sêgoşeyeke ku tê de $\widehat{B} = \widehat{C} = 45°$, $AB = 4\ cm$ be, em sêgoşeyê çare bikin.

3. ABC sêgoşeyeke ku tê de $\widehat{A} = 45°$, $\widehat{B} = 60°$, $a = 4\ cm$ be, em r , $\widehat{C}$, b , c bibînin.

4. ABC sêgoşeyeke ku tê de $\widehat{A} = 45°$, $b = 8\ cm$, $c = 6\ cm$ be, em rûbera wê bibînin.

WANEYA DUYEM: RÊGEZA (cos) DI SÊGOŞEYÊ DE

ABC sêgoşeyeke ji sêgoşeya di N de tîk ANC ye.



Li gorî Pythagoras:

$$(AC)^2 = (AN)^2 + (NC)^2$$

$$(b)^2 = (c\,.\,sinB)^2 + (a - c\,.\,cosB)^2$$

$$= c^2 sin^2 B + a^2 + c^2\,.\,cos^2 B - 2\,a\,.\,c\,.\,cosB$$

$$= c^2(sin^2 B + \ cos^2 B) + a^2 - 2\,a\,.\,c\,.\,cosB$$

$$= c^2 + a^2 - 2\,a\,.\,c\,.\,cosB$$

Bi heman rêbazê:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,.\,c\,.\,cosA$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,.\,b\,.\,cosC$$

Her wiha:

$$cosB = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2\,.\,a\,.\,c}$$

Bi navê rêgeza cos tê naskirin.

Bi heman rêbazê em dibînin ku:

$$\boldsymbol{cosA = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2 \,.\, c \,.\, b}}$$

$$\boldsymbol{cosC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \,.\, a \,.\, b}}$$

Mînak: **Heger ABC sêgoşeyeke ku tê de $\hat{A} = 60°$, $c = 2\ cm$ $b = 1 + \sqrt{3}\ cm$ be, em a bibînin:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \,.\, b \,.\, c \,.\, cosA$$

$$= \left(1 + \sqrt{3}\right)^2 + 4 - 2(1 + \sqrt{3}) \times 2 \times \frac{1}{2} = \sqrt{6}\ cm$$

- **Çareya sêgoşeyê heger dirêjahiyên her sê kenarên wê bên zanîn**

Mînak: **Em sêgoşeya ABC çare bikin heger bê zanîn ku:**

$$a = 2 \quad , \quad b = \sqrt{2} \quad , \quad c = 1 + \sqrt{3}$$

$$cosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \,.\, b \,.\, c} = \frac{2 + 1 + 3 + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ango: $\hat{A} = 45°$

$$cosB = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \,.\, a \,.\, c} = \frac{4 + 1 + 3 + 2\sqrt{3} - 2}{2 \times 2\left(1 + \sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{2(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ango: $\hat{B} = 30°$

$$\Longrightarrow \hat{C} = 180 - (45 + 30) = 105°$$

HÎNDARÎ

1. Em dirêjahiya a di sêgoşeya ABC de bibînin heger $\widehat{A} = 30°$, $b = \sqrt{2}\ cm$, $c = 2\sqrt{2}\ cm$ be.

2. Em sêgoşeya ABC çare bikin heger bê zanîn ku:

$$a = 2\sqrt{2} \quad , \quad b = 2 \quad , \quad \widehat{C} = 45°$$

3. Heger dirêjahiyên kenarên sêgoşeya ABC ev bin:

$$a = 2\sqrt{3} \quad , \quad b = \sqrt{6} + \sqrt{2} \quad , \quad c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

- Em pîvanên goşeyên wê bibînin.

- Em nîveşkêla R bazinê ku di sergoşeyên wê re diçe bibînin.

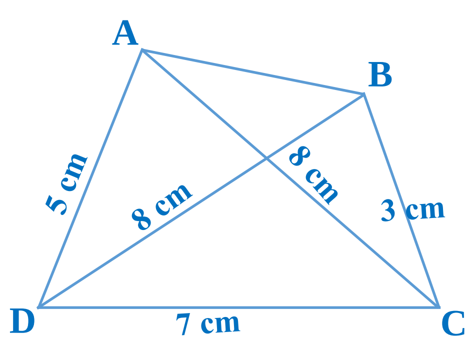
- Em rûbera vê sêgoşeyê bibînin.

4. ABCD çargoşeyeke ku dirêjahiyên kenarên wê ev bin:

$$DC = 7\ cm \quad , \quad BD = 8\ cm \quad , \quad BC = 3\ cm$$

$$AD = 5\ cm \quad , \quad AC = 8\ cm$$

Em tekez bikin ku teşeya ABCD çargoşeya bazinî ye.



BEŞA ŞEŞEM: PYHATÎ

1. PEYHATIYA HEJMARÎ
2. PEYHATIYA GEOMETRIYÎ

WANEYA YEKEM: PEYHATIYA HEJMARÎ

Pêşgotin

Peyhatina bîrkarî, peyhatina hejmaran an jî sembolan e li gorî rêgezeke destnîşankirî.

Em nimûneya li jêr heta pêkhateya heftan bişopînin:

$$2\ ,\qquad 4\ ,\qquad 6\ ,\qquad 8\ ,\qquad \dots\ ,\qquad \dots\ ,\qquad \dots$$

Di heman demê de, em pêşketina tiştekî bişopînin.

Dema ku tiştek dakeve sûkê bi buhaya u_0 di destpêka daketina wê de li sûkê û buhaya wê piştî mehekê dibe u_1 û piştî du mehan dibe u_2 û piştî n mehan dibe u_n

Em peyhatina $u_0\ , u_1\ , u_2\ , \dots,\ \ u_n\ , \dots$ bi dest dixin.

1. Peyhatî:

Di lêkolîna me de ji fonkisyonên hejmarî re, me fonkisyona hejmarî pênase kiriye û gotiye ku fonkisyona hejmarî, têkiliyeke ku komika wê ya pênaseyê komika hejmarên rast $\mathbb{R}$ ye yan jî beşek jê ye û komika wê ya nirxan $\mathbb{R}$ ye yan jî beşek jê ye bi mercê ku her endamek ji komika pênaseyê bi endamekî tenê ji komika nirxan ve bê girêdan.

Em fonkisyonê bi sembolên f, g, h nîşan dikin û bi vî awayî tê nivîsîn: $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \longrightarrow f(x)$

Fonkisyon bi vî awayî tê xwendin:

Fonkisyona f ya di D de pênasekirî û nirxên xwe ji $\mathbb{R}$ dibe.

Pênaseya peyhatiyê

Fonkisyoneke hejmarî ye komika wê ya pênaseyê komika hejmarên xwezayî ye $\mathbb{N}$ û komika wê ya nirxan $\mathbb{R}$ ye yan jî beşeke jê û bi vî awayî tê nivîsîn:

$$\boldsymbol{u}: \boldsymbol{D} \subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}: \boldsymbol{n} \longrightarrow \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}$$

Peyhatî bi sembola $(u_n)_{n\geq 0}$ tê nîşankirin.

Têbînî:

1. Em ji (n) re dibêjin guhêra peyhatiyê $n \in \mathbb{N}$

2. Em ji (u_n) re dibêjin pêkhateya giştî ji peyhatiyê re.

3. Lê u_1 , u_2 , …, u_n pêkhateyên peyhatiyê ne.

4. Em ji (u_{n-1}) re dibêjin pêkhateya berî u_n

5. Em ji (u_{n+1}) re dibêjin pêkhateya piştî u_n

Mînak 1: Heger 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , … peyhatiyek be, em dibînin ku pêkhateyên wê komika hejmarên xwezayî yên cot in.

$u_1 = 2 = 2 \times 1$ **Pêkhateya yekem**

$u_2 = 4 = 2 \times 2$ **Pêkhateya duyem**

$u_3 = 6 = 2 \times 3$ **Pêkhateya sêyem**

$\vdots$

$u_n = 2 \times n = 2n$ **Pêkhateya n pêpilk (Pêkhateya giştî)**

Mînak 2: **Heger 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , … peyhatiyek be, em dibînin ku pêkhateyên wê komika hejmarên xwezayî yên cot in.**

$u_1 = 1 = 2 \times 1 - 1$ **Pêkhateya yekem**

$u_2 = 3 = 2 \times 2 - 1$ **Pêkhateya duyem**

$u_3 = 5 = 2 \times 3 - 1$ **Pêkhateya sêyem**

$\vdots$

$u_n = 2 \times n - 1 = 2n - 1$ **Pêkhateya n pêpilk e (Pêkhateya giştî ye)**

Rêbazên destnîşankirina peyhatiyê

1. Naskirina pêkhateya giştî ya ji pêpilka n

Mînak: **Heger $(u_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyek be û pêkhateya wê ya giştî $u_n = 2n + 3$ be, em her pênc pêkhateyên destpêkê bibînin:**

$u_0 = 2(0) + 3 = 3$

$u_1 = 2(1) + 3 = 5$

$u_2 = 2(2) + 3 = 7$

$u_3 = 2(3) + 3 = 9$

$u_4 = 2(4) + 3 = 11$

Peyhatî: $(3 , 5 , 7 , 9 , 11)$

2. Têkiliyeke berebereyî

Pêkhateya destpêkê u_0 an jî u_1 tê dayîn û piştre têkiliyeke berebereyî di navbera pêkhateya u_n û pêkhateya berî yan jî piştî wê de.

Mînak: Heger peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ bi vî awayî pênasekirî be:

$$u_0 = 5$$

$$u_{n+1} = 3u_n - 2$$

Em her çar pêkhateyên destpêkê bibînin:

$$u_0 = 5$$

$$u_1 = 3u_0 - 2 = 3(5) - 2 = 13$$

$$u_2 = 3u_1 - 2 = 3(13) - 2 = 37$$

$$u_3 = 3u_2 - 2 = 3(37) - 2 = 109$$

Têbînî:

1. Ne girîng e ku hemû pêkhateyên peyhatiyê cuda bin.

Mînak: Peyhatiya $(2\ ,2\ ,2\ ,\dots)$ li gorî ku $u_n = 2$ be, hemû pêkhateyên wê yeksan in û yeksanî hejmareke neguhêr e (2) û bi navê peyhatiya neguhêr tê naskirin.

2. Em ji peyhatiya u_n re dibêjin bi dawî ye, heger hejmara endamên wê bi dawî be, ango tên hejmartin.

3. Em ji peyhatiya u_n re dibêjin bê dawî ye, heger hejmara endamên wê bê dawî be, ango nayên hejmartin.

Mînak 1: **Heger peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ bi vî awayî pênasekirî be:**

$$u_n = 4n - 1$$

Em her pênc pêkhateyên wê yên destpêkê bibînin:

$$u_1 = 4(1) - 1 = 3$$

$$u_2 = 4(2) - 1 = 7$$

$$u_3 = 4(3) - 1 = 11$$

$$u_4 = 4(4) - 1 = 15$$

$$u_5 = 4(5) - 1 = 19$$

Peyhatî: $(3\ ,7\ ,11\ ,15\ ,19)$ **pêhatiyeke bidawî ye.**

Mînak 2: **Heger peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ bi vî awayî pênasekirî be:**

$$u_n = n^2$$

Em hejmareke bêdawî ji pêkhateyan binivîsin dest bi pêkhateya yekem.

$$u_1 = (1)^2 = 1$$

$$u_2 = (2)^2 = 4$$

$$u_3 = (3)^2 = 9$$

$$u_4 = (4)^2 = 16$$

$$\vdots$$

Peyhatî: $(1\ ,4\ ,9\ ,16\ ,\ldots\ldots\ldots)$

Zencîr û sembola komkirinê

Zencîr: Bikaranîna komkirina pêkhateyên peyhatiyê ye.

Mînak: Heger $(2\,,5\,,8\,,11\,,\ldots\ldots)$ peyhatiyek be, zencîra bi peyhatiya çûyî ve girêdayî $2+\ 5+\ 8+\ 11+\ \ldots.$ ye.

Sembola sîgma (Σ) ji bo nîşankirina komkirinê û nivîsîna zencîran bi awayekî sade bi kar tê.

Mînak: Em encama komkirinê bibînin:

$$\sum_{r=1}^{r=4} r^2 = (1)^2+(2)^2+(3)^2+(4)^2 = 1+4+9+16$$

$$\sum_{r=1}^{r=4} r^2 = 30$$

Baldarî:

Nirxê r ê duyem

Sembola komkirinê $\longrightarrow \displaystyle\sum_{r=1}^{r=4} r^2 \longleftarrow$ Rêgeza girêdanê

Nirxê r ê yekem

Mînak: Em encama komkirinê bibînin:

$$\sum_{r=3}^{r=5}(2r-1) = [2(3)-1]+[2(4)-1]+[2(5)-1]$$

$$\sum_{r=3}^{r=5}(2r-1) = 5+7+9\ \ = 21$$

3. Guhartina peyhatiyê (Peyhatiyên zêdeker û kêmker)

Heger u_n peyhatiyeke hejmarî be, wê demê:

1. Em ji peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ re dibêjin zêdeker e, heger mercê $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pêk were.

2. Em ji peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ re dibêjin tam zêdeker e, heger mercê $u_{n+1} - u_n > 0$ pêk were.

3. Em ji peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ re dibêjin kêmker e, heger mercê $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pêk were.

4. Em ji peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ re dibêjin tam kêmker e, heger mercê $u_{n+1} - u_n < 0$ pêk were.

Têbînî: Em dikarin rêbazên li jêr ji bo lêkolîna guhartina peyhatiyê bi kar bînin:

1. Lêkolîna hêmaya $u_{n+1} - u_n$

2. Hevrûkirina rêjeya $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bi hejmara (1) re dema ku pêkhateyên peyhatiyê pozîtîv bin.

Mînak 1: Em guhartina peyhatiya $u_n = 2n - 1$ lêkolîn bikin:

Em u_{n+1} bibînin: $u_{n+1} = 2(n+1) - 1$

$= 2n + 2 - 1$

$= 2n + 1$

Em $u_{n+1} - u_n$ bibînin: $u_{n+1} - u_n = 2n + 1 - 2n + 1$

$= +2 > 0$

Ango: Peyhatî tam zêdeker e.

Mînak 2: **Em guhartina peyhatiya $u_n = \frac{n}{2^n}$ lêkolîn bikin:**

Em $u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$ bibînin:

Em derxistinê bibînin:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n}$$

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{2n}{2^{n+1}} = \frac{n+1-2n}{2^{n+1}} = \frac{1-n}{2^{n+1}} \leq 0$$

Ango: **Peyhatî kêmker e, ji ber ku paran 2^{n+1} tam pozîtîv e.**

Lê $n \geq 1 \Longrightarrow 1 - n \leq 0$ nîgetîv e.

Mînak 3: **Em guhartina peyhatiya $u_n = \frac{2^n}{3^n}$ lêkolîn bikin:**

Em dibînin ku pêkhateyên peyhatiyê pozîtîv in, ji ber vê yekê em rêjeya $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bibînin:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{2^n}{3^n}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2^n}$$

$$= \frac{2}{3} < 1$$

Ango: **Peyhatî tam kêmker e.**

Peyhatiya hejmarî

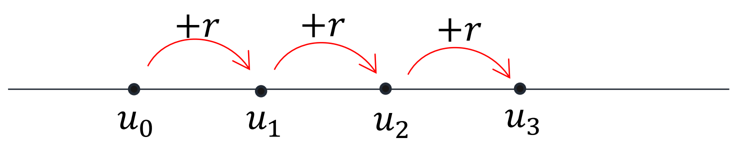
Pênase: Heger r hejmareke rast ji bilî sifirî be, em dibêjin peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyeke hejmarî ye, heger her pêkhateyek jê encama pêkhateya berî wê be piştî zêdekirina hejmara (r) li gorî ku r bingeha peyhatiyê ye.

Ango: Peyhatî vê mercê pêk tîne:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Yan jî:

$$u_{n+1} - u_n = r$$



Mînak:

1. Peyhatiya hejmarên xwezayî $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ peyhatiyeke hejmarî ye, pêkhateya wê ya yekem (0) e û bingeha wê (1) e.

2. Peyhatiya hejmarên cot $0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ peyhatiyeke hejmarî ye, pêkhateya wê ya yekem (0) e û bingeha wê (2) *ye*.

3. Peyhatiya hejmarên kit $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ peyhatiyeke hejmarî ye, pêkhateya wê ya yekem (1) e û bingeha wê (2) ye.

Rêgeza pêkhateya giştî ji peyhatiya hejmarî re

Pêkhateya yekem: u_1

Pêkhateya duyem: $u_2 = u_1 + r = u_1 + (2-1)r$

Pêkhateya sêyem: $u_3 = u_2 + r = u_1 + 2r = u_1 + (3-1)r$

Pêkhateya çarem: $u_4 = u_3 + r = u_1 + 3r = u_1 + (4-1)r$

Hwd …

Pêkhateya ji pêpilka n: $u_n = u_1 + (n-1)r$

Encam1

Peyhatiya hejmarî bi naskirina pêkhateya wê ya yekem u_1 û bingeha wê (r) destnîşan dibe.

Mînak: **Heger u_n peyhatiyeke hejmarî be, pêkhateya wê ya yekem $u_1 = 5$ û bingeha wê 3 be, em pêkhateya dehem jê bibînin:**

$$u_n = u_1 + (n-1)r \Rightarrow u_{10} = 5 + (10-1) \times 3 = 32$$

Encam2

Têkiliya di navbera du pêkhateyan ji peyhatiyeke hejmarî ev e:

$u_n = u_m + (n-m)r \quad : \; n, m$ **du hejmarên xwezayî ne.**

Mînak: **Heger u_n peyhatiyeke hejmarî be û $u_{10} = 5$, $u_{20} = 35$ be, em u_{40} bibînin:**

Em bingehê (r) bibînin:

$$u_n = u_m + (n-m)r$$

$$u_{20} = u_{10} + (20-10)r$$

$$35 = 5 + 10 \,.\, r$$

$$r = \frac{30}{10} = 3$$

Em pêkhateya yekem u_1 bibînin:

$$u_{10} = u_1 + (10-1) \times r$$

$$5 = u_1 + 27$$

$$u_1 = -22$$

Em pêkhateya u_{40} bibînin:

$$u_{40} = u_1 + (40 - 1) \times 3 = -22 + 117 \quad = 95$$

Têbînî

Ji bo em tekez bikin ku peyhatiya u_n hejmarî ye, bes e em tekez bikin ku:

$$u_{n+1} - u_n = r \quad : r \in \mathbb{R}^*$$

Mînak 1: Peyhatiya $(7, 10, 13, 16, 19)$ hejmarî ye yan na? çima?

$$u_2 - u_1 = 10 - 7 = 3$$

$$u_3 - u_2 = 13 - 10 = 3$$

$$u_4 - u_3 = 16 - 13 = 3$$

$$u_5 - u_4 = 19 - 16 = 3$$

Ango: $u_{n+1} - u_n = 3 \quad \Longrightarrow \quad$ Peyhatî hejmarî ye.

Mînak 2: Em tekez bikin ku peyhatiya $u_n = 2n + 3$ hejmarî ye.

Em dibînin ku $u_0 = 3$

$$u_{n+1} - u_n = 2(n + 1) + 3 - 2n - 3$$

$$u_{n+1} - u_n = 2n + 2 + 3 - 2n - 3 = 2$$

Em dibînin ku cudahî neguhêr e $\Longrightarrow$ Peyhatî hejmarî ye, pêkhateya wê ya yekem (3) ye û bingeha wê (2) ye.

Navînî

Di peyhatiya hejmarî de, her pêkhateyek navîniya her du pêkhateyên cîranên wê ne ji bilî pêkhateya yekem û dawî.

Heger $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ sê peyhateyên li pey hev ji peyhateyeke hejmarî be, wê demê $\boldsymbol{b}$ navîniya her du hejmarên $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}$ ye.

$$\Rightarrow \boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}}{\mathbf{2}}$$

Komkirina $\boldsymbol{n}$ pêkhate

1. Komkirina $\boldsymbol{n}$ pêkhate bi naskirina pêkhateya yekem û ya dawî:

Heger pêkhateya yekem bi sembola $\boldsymbol{a}$, bingeh bi $\boldsymbol{r}$, pêkhateya dawî bi $\boldsymbol{\ell}$ û komkirin bi $\boldsymbol{S_n}$ bê nîşankirin.

$$\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2} + \boldsymbol{u_3} + \cdots + \boldsymbol{u_n}$$

$$= \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{a} + \mathbf{2}\boldsymbol{r}) + \cdots + (\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\ell} \qquad (\mathbf{1})$$

Em dikarin vê komkirinê bi rêbazeke din binivîsin:

$$\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{\ell} + (\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{\ell} - \mathbf{2}\boldsymbol{r}) + \cdots + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{a} \qquad (\mathbf{2})$$

Bi komkirina (1) û (2) em dibînin ku:

$$\mathbf{2}\boldsymbol{S_n} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\ell}) + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\ell}) + \cdots + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\ell})$$

$$\mathbf{2}\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\ell})$$

$$\boldsymbol{S_n} = \frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\ell})$$

Mînak 1: **Em encama komkirina li jêr bibînin:**

$$\sum_{r=5}^{r=24}(4r-3)$$

Em dibînin ku bikaranîna komkirinê demeke direj dibe, ji ber vê yekê em ê rêgeza komkirinê ji peyhatiya hejmarî bi kar bînin, ji ber ku qaseya di hundirê sembola komkirinê de ji pileya yekem e, her wiha peyhatî hejmarî ye.

Hejmara pêkhateyan: $n = 24 - 5 + 1 = 20$

Pêkhateya giştî: $u_n = 4n - 3$

Em pêkhateya yekem ji komkirinê bibînin:

$$u_5 = 4(5) - 3 = 17$$

Em pêkhateya dawî ji komkirinê bibînin:

$$u_{24} = 4(24) - 3 = 93$$

Li gorî rêgeza komkirinê:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(17 + 93) = 1100$$

Mînak 2: **Em komkirina her bîst pêkhateyên yekem ji peyahatiyeke hejmarî ku pêkhateya wê ya yekem (3) be û ya dawî 10 be, bibînin:**

$$S_{20} = \frac{20}{2}(3 + 10) = 10 \times 13 = 130$$

2. Komkirina $\boldsymbol{n}$ pêkhateya ji peyhatiyeke hejmarî heger pêkhateya wê ya yekem û bingeha wê bên naskirin:

Me rêgeza $\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}(a + \ell)}$ dît û em diznin ku rêgeza pêkhateya giştî: $\boldsymbol{u_n = a + (n-1)r}$

Lê $\boldsymbol{u_n = \ell}$ $\quad \Rightarrow \boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)r]}$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)r]}$$

Mînak: Em encama komkirina 10 pêkhateyên destpêkê ji peyhatiyeke din ku pêkhateya wê ya yekem (5) be û bingeha wê (3) be.

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)r]}$$

$$\boldsymbol{S_{10} = \frac{10}{2}[2 \times 5 + (10-1) \times 3]}$$

$$\boldsymbol{= 5(10 + 27)}$$

$$\boldsymbol{= 5 \times 37 = 185}$$

HÎNDARÎ

1. Em her pênc pêkhateyên yekem ên peyhatiya $u_n = 1 - 3n$ bibînin.

2. Heger $(u_n)_{n\geq 0}$ bi awayê li jêr destnîşankirî be, em her pênc pêkhateyên dsetpêkê bibînin:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3(u_{n-1} + 2) \end{cases}$$

3. Em encama komkirinên li jêr bibînin:

a) $\sum_{r=1}^{r=5} (3r - 2)$ b) $\sum_{r=1}^{r=20} (6r + 5)$

4. Em guhartina peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ di her du rewşên li jêr de bibînin:

a) $u_n = \dfrac{3n - 1}{n + 2}$ b) $u_n = \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$

5. Em tekez bikin ku peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ ya bi têkiliya $u_n = 3n + 1$ destnîşankirî, hejmarî ye.

6. Gelo peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ ya bi têkiliya $u_n = n^2 + 1$ destnîşankirî, hejmarî ye yan na?

7. Em komkirina bîst û yek pêkhate ji peyhatiyeke hejmarî ku pêkhateya wê ya yekem (2) be û ya dawî (62) be, bibînin.

8. Em komkirina heşt pêkhateyên ji peyhatiyeke hejmarî ku pêkhateya wê ya yekem (2) be û ya dawî (5) be, bibînin.

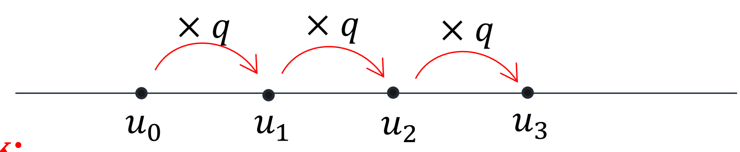
WANEYA DUYEM: PEYHATIYA GEOMETRIYÎ

Pênase

Em ji peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ re dibêjin peyhatiyeke geometriyî ye, heger hejmareke rast q têkiliya $u_{n+1} = q \times u_n \Longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ pêk bîne çi qasî hejmara xwezayî n be.

q bi navê bingeha peyhatiya geometriyî tê naskirin.

Ango: **Di peyhatiya geometriyî de, her pêkhateyek ji pêkhateya berî wê çêdibe bi hevdana wê bi hejmara rast q re**



Mînak:

1. Peyhatiya encamên hejmara bihêz (2), peyhatiyeke geometriyî ye, pêkhateya wê ya yekem (1) e û bingeha wê (2) ye.

2. Peyhatiya ku pêkhateya wê ya giştî $u_n = (-1)^n$ be, peyhatiyeke geometriyî ye, pêkhateya wê ya yekem (1) e û bingeha wê (-1) e.

Lê pêkhateyên wê ev in: $1\ ,-1\ ,\ 1\ ,-1\ ,\ 1\ ,-1 \ldots$

3. Peyhateya ku pêkhateya wê ya giştî $u_n = 2 \times 3^n$ be, peyhatiyeke geometriyî ye, pêkhateya wê ya yekem (2) ye û bingeha wê (3) ye.

Lê pêkhateyên wê 2, 6, 18, 54, …

Pêkhateya giştî ji peyhatiyeke geometriyî re

Heger $(u_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyeke geometriyî be ku bingeha wê $q \neq 0$ be û pêkhateya wê ya yekem $u_1 = u_0$ be, wê demê pêkhateya wê ya duyem:

$$u_2 = u_1 . q = u_0 . q = u_0 . q^{2-1}$$

pêkhateya wê ya sêyem:

$$u_3 = u_2 . q = u_0 . q^2 = u_0 . q^{3-1}$$

Pêkhateya wê ya çarem:

$$u_4 = u_3 . q = u_0 . q^3 = u_0 . q^{4-1} \qquad \dots \qquad u_n = u_0 q^{n-1}$$

Mînak: **Heger $(2, 4, 8, \dots)$ peyhatiyeke geometriyî be, em pêkhateya wê ya pêncem bibînin:**

$$u_0 = 2 \ , \ \ q = \frac{4}{2} = 2 \ \Rightarrow u_5 = u_0 q^{n-1} = 2 \times (2)^{5-1}$$

$$\Rightarrow \ u_5 = 2 \times (2)^4 = 2 \times 16 = 32$$

Têkiliya di navbera du pêkhateyên ji heman peyhatiya gometrî

Heger $(u_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyeke geometriyî be ku bingeha wê (2) be û n , m du hejmarên xwezayî bin, wê demê:

$$u_n = u_m . q^{n-m} \ \Rightarrow \ \frac{u_n}{u_m} = q^{n-m}$$

Mînak: **Di peyhatiyeke geometriyî de $u_2 = 8$, $u_6 = 128$**

Em u_8 bibînin:

$$u_6 = u_2 . q^{6-2} \ \Rightarrow 128 = 4 . q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{128}{4} = 16 \Rightarrow q = 2$$

$$u_8 = u_6 . q^{8-6} = 128 \times (2)^2 = 128 \times 4 = 512$$

- **Heta em tekez bikin ku peyhatî geometriyî ye, bes e em tekez bikin ku $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$**

Mînak: Em tekez bikin ku peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ ya bi têkiliya $u_n = \frac{2}{3^n}$ pênasekirî, geometriyî ye.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{2} = \frac{3^n}{3^n \times 3} = \frac{1}{3}$$

Ango: Peyhatî geometriyî ye û bingeha wê $\frac{1}{3}$ ye.

- **Komkirina n pêkhateyên destpêkê ji peyhatiyeke geometriyî re**

Heger u_n peyhatiyeke geometriyî be ku pêkhateya wê ya yekem u_0 be û bingeha wê q be, wê demê:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

$$= u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \cdots + u_0 q^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Em her du aliyan hevdanî $q \neq 0$ bikin:

$$q.S_n = u_0 q + u_0 q^2 + u_0 q^3 + \cdots + u_0 q^n \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Em hevkêşeya (2) ji hevkêşeya (1) derxin:

$$S_n - q.S_n = u_0 - u_0 . q^n \implies S_n(1-q) = u_0(1-q^n)$$

Em her du aliyan belavî $1-q$ bikin:

$$S_n = \frac{u_0(1-q^n)}{1-q} \quad : \quad 1-q \neq 0$$

Mînak: Em komkirina her deh pêkhateyên destpêkê ji peyhatiyeke geometriyî re bibînin, heger bingeha wê $q = 2$ be û pêkhateya wê ya yekem $u_0 = 5$ be.

$$S_n = \frac{u_0(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = \frac{5(1-2^{10})}{1-2} = \frac{5(1-1\,024)}{-1}$$

$$= \frac{-5\,115}{-1} = 5\,115$$

Lêkolîna li ser guhartina peyhatiya geometriyî

Heger $(u_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyeke geometriyî be, wê demê pêkhateya wê ya giştî $u_n = u_0 q^{n-1}$ ye.

Em sê rewşan dibînin:

1. Heger $1 > |q| > 0$ be, wê demê peyhatî tam kêmker e.

2. Heger $q = 1$ be, wê demê peyhatî neguhêr e.

3. Heger $q > 1$ be, wê demê peyhatî tam zêdeker e.

Mînak: Pêkhateya yekem a peyhatiyeke geometriyî $u_0 = 32$ û bingeha wê $q = \frac{1}{2}$

Em S_6 bibînin û piştre tekez bikin ku tam kêmker e.

$$S_n = \frac{u_0(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_6 = \frac{32\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{2}} = \frac{32(1-\frac{1}{64})}{\frac{1}{2}}$$

$$= 64\left(\frac{63}{64}\right) = 63$$

Lê $q = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 > |q| > 0$

Her wiha peyhatî tam kêmker e.

Peyhatiya Fîbonatşî

Peyhatiya ku sê pêkhateyên li pey hev rasterast bi hev ve girê dide û ew peyhatiyeke pilepilekirî ye ji ber ku belkî pêkhateyên bidawî di vê peyhatiyê de bên destnîşankirin li gorî têkiliya ku van pêkhateyan girê dide.

Ev têkilî bi navê têkiliya Fîbonatşî tê naskirin.

Mînak: **Heger $(u_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyek be li gorî têkiliya li jêr:**

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \\ u_1 = u_2 = 1 \end{cases}$$

Em her heft pêkhateyên destpêkê jê bibînin:

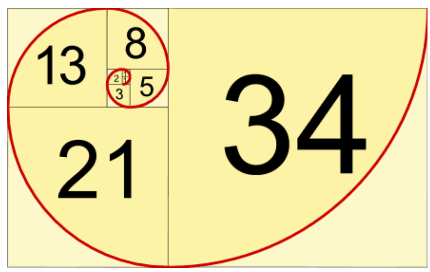
$u_1 = u_2 = 1$

$u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2$

$u_5 = u_4 + u_3 = 3 + 2 = 5$

$u_6 = u_5 + u_4 = 5 + 3 = 8$

$u_7 = u_6 + u_5 = 8 + 5 = 13$



Ango: Peyhatî ev e: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

Dawiya peyhatiyê

Heger ℓ hejmareke rast be, peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ li hejmara ℓ bi dawî dibe, dema ku n li ∞ bi dawî dibe.

Em dawiya peyhatiyê bi awayê $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = \ell$ dinivîsin.

Di vê rewşê de peyhatî nêzî ℓ dibe.

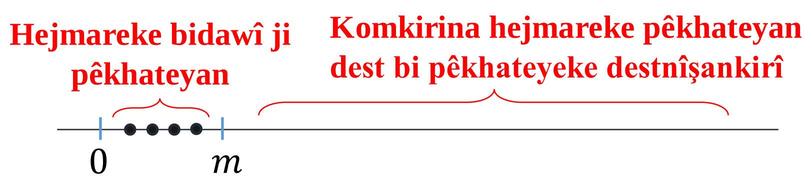
Têbînî

1. Heger peyhatî bi dawî be, pêwîstî bikaranîna dawiyan tune ye.

2. Heger peyhatî bê dawî be, wê demê em ê li dawiya $(u_n)_{n\geq 0}$ bigerin.

Di peyhatiyên hejmarî de

1. Em dibêjin ku peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ li $+\infty$ bi dawî dibe, heger her navbereke bi awayê $]m\,,+\infty[\ :\ m$ hejmareke pozîtîv e, hemû pêkhateyên peyhatiyê bigire, dest bi pêkhateyeke destnîşankirî ji bilî hejmareke destnîşankirî ji wan û bi awayê $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(u_n)=+\infty$ tê nivîsîn.



2. Em dibêjin ku peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ li $-\infty$ bi dawî dibe, heger her navbereke bi awayê $]-\infty\,,m[$ hemû pêkhateyên peyhatiyê bigire, dest bi pêkhateyeke destnîşankirî ji bilî hejmareke destnîşankirî ji wan û bi awayê $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(u_n)=-\infty$ tê nivîsîn.

Mînak: **Em dawiya peyhatiya $(u_n)_{n\geq 0}$ ya bi pêkhateya giştî destnîşankirî li cem $n\longrightarrow+\infty$ di rewşên li jêr de bibînin:**

1. $u_n=\frac{n}{n+1}$

$$u_n=\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\ \Longrightarrow\ \lim_{n\longrightarrow+\infty}(u_n)=\frac{1}{1+0}=1$$

2. $u_n = \frac{n^2+6n}{4n-3}$

$$u_n = \frac{\frac{n^2}{n} + \frac{6n}{n}}{\frac{4n}{n} - \frac{3}{n}} = \frac{n+6}{4 - \frac{3}{n}} \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty}(u_n) = \frac{+\infty + 6}{4 - 0} = +\infty$$

Têbînî

Heger $u_n \geq 0$ be û $\lim_{x \to +\infty}(u_n) = k$ be li gorî ku k hejmareke rast be, wê demê:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{\lim_{n \to +\infty}(u_n)} = \sqrt{k}$$

Mînak: **Heger $(u_n)_{n \geq 0}$ peyhatiyek be ku pêkhateya wê ya giştî $u_n = \sqrt{n^2 - 6}$ be, em $\lim_{n \to +\infty}(u_n)$ bibînin:**

$$\lim_{n \to +\infty}(u_n) = \lim_{n \to +\infty}(\sqrt{n^2 - 6}) = \sqrt{\lim_{n \to +\infty}(n^2 - 6)} = +\infty$$

Di peyhatiyên geometriyî de

Teorî: **Heger $(u_n)_{n \geq 0}$ peyhatiyeke geometriyî be ku pêkhateya wê ya giştî $u_n = u_0 \cdot q^{n-1}$ be, wê demê:**

1. Di rewşa $1 > q > -1$ de: $\lim_{n \to +\infty}(u_n) = 0$

2. Di rewşa $q = 1$ de: $\lim_{n \to +\infty}(u_n) = 1$

3. Di rewşa $q > 1$ de: $\lim_{n \to +\infty}(u_n) = +\infty$

Mînak: **Em dawiya peyhatiya $(u_n)_{n \geq 0}$ destnîşankirî bi awayê $u_n = 3 \times (\frac{1}{2})^n$ dema ku $n \to +\infty$ bibînin:**

Em dibînin ku peyhatî geometriyî ye û $q = \frac{1}{2}$: $1 > \frac{1}{2} > -1$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty}(u_n) = 0$$

HÎNDARÎ

1. Em her pênc pêkhateyên destpêkê ji peyhatiyeke geometriyî binivîsin, heger $u_0 = 5$, $q = -3$

2. Em bibînin kîjan peyhatiyên li jêr $(u_n)_{n\geq 0}$ geometriyî ye.

- $u_n = 3^n + 3n$
- $u_n = 5^{n+3}$
- $u_n = \frac{2}{5^{n+1}}$
- $u_n = 2^n$

3. Heger $(u_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyeke geometriyî bi awayê li jêr be, em pêkhateya heftan jê bibînin:

$$(1, 2, 4, 8, \dots)$$

4. Em komkirina her heşt pêkhateyên destpêkê ji peyhatiyeke geometriyî re bibînin, heger pêkhateya wê ya yekem $u_0 = 3$ be û bingeha wê $q = 3$ be.

5. Heger $(u_n)_{n\geq 0}$ peyhatiyeke geometriyî be û heger $u_0 = 486$ û $q = 3$ be, em u_0 bibînin û piştre her heft pêkhateyên destpêkê bibînin.

6. Em dawiyên peyhatiyên $(u_n)_{n\geq 0}$ ên bi awayên li jêr destnîşankirî dema ku $n \longrightarrow +\infty$ bibînin.

- $u_n = \frac{n^2-4n+5}{-7n^2+n+1}$
- $u_n = (\frac{1}{3})^n$

BEŞA HEFTEM: DIBETÎ

1. TEKEZKIRINA GAVBIGAV
2. DIBETÎ

WANEYA YEKEM: TEKEZKIRINA GAVBIGAV

Pêşgotin

Vedîtin û tekezkirin di bîrkariyê de di heman girîngiyê de ne.

Divê em tiştekê vebînin berî ku rastiya wê tekez bikin û dibe rastiyek dema ku tekez dibe.

Hizira zanistî du rêbazan di tekezkirinê de bi kar tîne, encamgirtin û tekezkirina gavbigav.

* **Encamgirtin:** **veguhestina giştî li taybet.**
* **Tekezkirina gavbigav:** **Veguhestina taybet li giştî.**

Dibe ku tekezkirina gavbigav ji bo hinek rewşan rast be û ji bo hineke din jî ne rast be

Tekezkirina bi riya tekezkirina gavbigav

Heger p dosyayeke girêdayî nenaseke xwezayî n be, ji bo tekezkirina rastiya wê bi rêya tekezkirina gavbigav, dive:

1. Em rastiya dosyayê ji bo n yeksanî biçûktirîn nirxê dosyayê be, tekez bikin.

2. Em bibêjin ku dosya ji bo n rast e û rastiya wê ji bo $n+1$ tekez bikin.

Mînak: Em vê dosyayê tekez bikin: Çi qasî $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ be:

$$\sum_{r=1}^{r=n}(2r-1)=n^2$$

1. Em rastiya dosyayê dema ku $\boldsymbol{n}=1$ be, tekez bikin:

$$\ell_1=\sum_{r=1}^{r=1}(2r-1)=2(1)-1=1$$

$$\ell_2=n^2=(1)^2=1$$

$\Longrightarrow\ \ell_1=\ell_2\ \Longrightarrow$ Ji bo $\boldsymbol{n}=1$ dosya rast e.

2. Em tekez bikin ku ji bo $\boldsymbol{n}$ dosya rast e:

$$\sum_{r=1}^{r=n}(2r-1)=n^2$$

Komkirina $\boldsymbol{n}$ hejmareke kit yeksanî $\boldsymbol{n}^2$ ye.

3. Em ji bo $\boldsymbol{n}+1$ rastiya dosyayê tekez bikin:

$$\sum_{r=1}^{r=n+1}(2r-1)=(n+1)^2$$

$$\ell_1=\sum_{r=1}^{r=n+1}(2r-1)=\sum_{r=1}^{r=n+1}(2r-1)+(2n+1)$$

$$=n^2+2n+1$$

$$=(n+1)^2=\ell_2$$

Ango: Ji bo $\boldsymbol{n}+1$ dosya rast e.

Em dibînin ku ji bo $\forall\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$ dosya rast e.

Rêbazên hejmartinê

Di bîrkariyê de, hejmartin ji jêhatiyên bingehîn in.

Em dizanin çawa endamên komikekê bi rêbaza rasterast bihejmêrin, lê rêbazine din jî ji rêbazên hejmartinê hene, bi rêya wê em hejmara endamên komikekê yan jî hejmara encamên serboriyeke destnîşankirî nîşan dikin mîna: rêbaza bingehîn di hejmartinê de, rêzkirin û levkirin.

Rêbaza bingehîn di hejmartinê de

Em bihizrin: Heger ji kesekî hat xwestin ku qemîsekî ji 3 qemîsan û bentelonekî ji 5 bentelonan li xwe bike, çend rêbazên hilbijartinê hene?

Hejmara rêbazên hilbijartina qemîsekî = 3

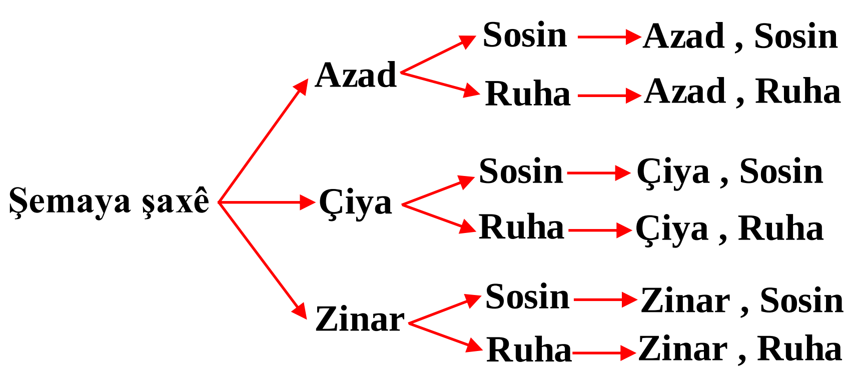
Hejmara rêbazên hilbijartina bentelonekî = 5

Mînak: Hejmara rêbazên hilbijartina xwendekarekî ji 3 xwendekaran (Azad, Çiya û Zinar) û xwendekarekê ji 2 xwendekaran (Sosin û Ruha) çend e?

Hejmara rêbazên hilbijartina xwendekarekî = 3 rêbaz in

Hejmara rêbazên hilbijartina xwendekarekê = 2 rêbaz in

Hejmara rêbazên hilbijartinê = $3 \times 2 = 6$ rêbaz



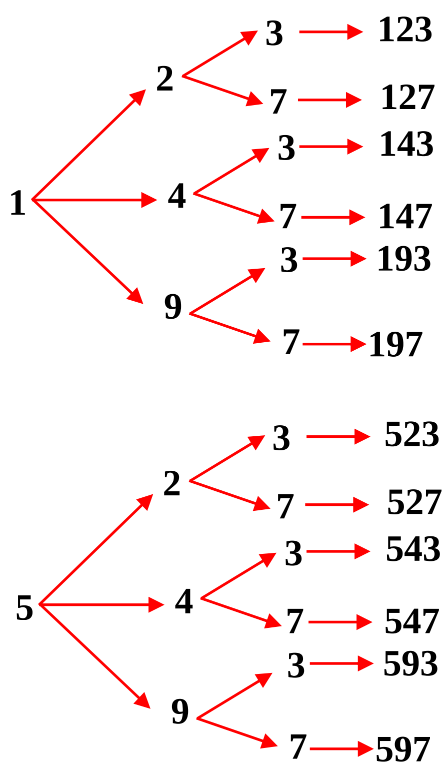
Mînak: **Çend hejmarên ku ji sê jimaran pêk tên li gorî ku jimara yekanî ji endamên $\{3, 7\}$ e, jimara dehanî jî ji endamên $\{2, 4, 9\}$ e û jimara sedanî ji endamên $\{1, 5\}$ e:**

Hejmara rêbazên hilbijartina sedanî = 2 rêbaz in

Hejmara rêbazên hilbijartina dehanî = 3 rêbaz in

Hejmara rêbazên hilbijartina yekanî = 2 rêbaz in

Hejmara hemû rêbazan = $2 \times 3 \times 2 = 12$ rêbaz in



Pênaseya rêbaza bingehîn di hejmartinê de

Heger hejmara rêbazên çêkirina karekî yeksanî n_1 rêbaz be, hejmara rêbazên çêkirina karekî duyem yeksanî n_2 rêbaz be, hejmara rêbazên çêkirina karekî sêyem yeksanî n_3 rêbaz be û hwd.

Wê demê hejmara hemû rêbazan = $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_m$

Têbînî | **Dibe ku rêbaza bingehîn di hejmartinê de merckirî be.**

Mînak: **Bi çend rêbazan hejmareke ji 3 jimarên cuda $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ pêk hatî tên çêkirin:**

Hejmara rêbazên hilbijartina sedanî = 4 rêbaz li gorî ku em nikarin (0) ji aliyê çepê yê hejmarê ve bi kar bînin.

Hejmara rêbazên hilbijartina dehanî = 4 in

Hejmara rêbazên hilbijartina yekanî = 3 ne

Hejmara hemû rêbazan = $4 \times 4 \times 3 = 48$ rêbaz in

Faktorî

Faktorî bi awayê $n!$ Tê nivîsîn û yeksanî encama hevdana hemû hejmarên tam ên pozîtîv ên ku yeksanî n ne yan jî jê biçûktir in.

Ango: $n! = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

Mînak: **Em encamên $3!$, $5!$, $1!$ bibînin:**

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$1! = 1$

Encam

1. Em dipejirînin ku $0! = 1$

2. Em dibînin ku $n! = n(n-1)!$

Mînak:

1. Em encama $\frac{8!}{3! \times 7!}$ bibînin:

$$\frac{8!}{3! \times 7!} = \frac{8 \times 7!}{3! \times 7!} = \frac{8}{3!} = \frac{8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

2. Em hevkêşeya $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$ çare bikin:

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 30$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 30$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 30 = 0$$

$$\Rightarrow (n-6)(n+5) = 0$$

Yan: $n = 6$ pejirandî ye.

Yan jî: $n = -5$ ne pejirandî ye ji ber ku divê n pozîtîv be.

Guhertin (Rêzkirin)

1. Heger $\{2, 3, 5\}$ komikeke hejmaran be, çend hejmarên ku ji sê jimarên cuda pêkhatî, çêdibin:

Em dibînin ku hejmar ev in:

235, 325, 253, 523, 352, 532

Her hejmarek ji van hejmaran bi navê guhartina jimaran tê naskirin.

Hejmara wan = $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ e

2. Heger $\{8,6,7\}$ komikeke hejmaran be û em bixwazin hejmarên ji du jimarên cuda pêkhatî ji van jimaran çêkin:

Em dibînin ku hejmar ji du jimarên cuda pêk tê, ev tê wateya ku rêzkirin di çêkirina hejmarê de girîng e.

Em dikarin hejmaran bi vî awayî binivîsin:

86, 87, 67, 68, 78, 76

Hejmara wan = 6 hejmar in

Em ji her hejmareke ji hejmarên li jor re dibêjin guhartinek (rêzkirinek) komikê ye, ji ber vê yekê guhartina hejmareke tiştan, tê wateya nivîsîna wan di rêzkirineke destnîşankirî de.

- **Pênase:**

Heger D komikeke ne vala be û n endam be, her binkomikeke rêzkirî ji wan r endam, bi navê guhartinek ji bo n endam ku di her carekê de r biribe tê naskirin.

Guhartin bi sembola $p(n,r)$: $n \geq r$ tê nîşankirin.

- **Rêgeza guhartinê:**

$$p(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

- **Rewşên taybet:**

1. Dema ku $n = r$ be:

$$p(n,n) = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

Ango: $p(n,n) = n!$

2. $p(n,0) = 1$

Mînak:

1. Em encamên $p(8,2)$, $p(5,5)$ bibînin:

$p(8,2) = 8 \times 7 = 56$

$p(5,5) = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

2. Em hejmara rêbazên cuda ji bo rûniştina 5 xwendekaran li ser 7 maseyan di polekê de bibînin:

$p(7,5) = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2\,520$

Levkirin (Coincidence)

Heger $X = \{A, B, C, D\}$ komikeke tîpan be, em dikarin çend binkomikên ku ji du tîpên X pêkhatî bin, çêkin:

Me dît ku 12 guhartin tên nivîsîn:

$\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$, $\{C, D\}$, $\{B, A\}$, $\{C, A\}$, $\{D, A\}$, $\{C, B\}$, $\{D, B\}$, $\{D, C\}$

Ji ber ku rêzkirin negirîng e, em 6 komikan tenê dibînin:

$$\{A, B\} , \{A, C\} , \{A, D\} , \{B, C\} , \{B, D\} , \{C, D\}$$

Em ji komikekê re dibêjin levkirinek (Rêzkirin negirîng) e.

Em dibêjin ku hejmara levkirinên 4 endaman ku di her carekê de 2 biribin yeksanî 6 e.

- **Pênase:**

Heger D komikeke ne vala be û n endam be, her binkomikeke r endam, bi navê levkirinek ji bo n endam ku di her careké de r biribe tê naskirin.

Levkirin bi sembola li jêr tê nîşankirin:

$$C(n,r) \ \ yan\ C_r^n \ \ yan\ j\hat{\imath} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} : \quad n \geq r$$

- **Rêgeza levkirinê:**

$$C(n,r) = \frac{p(n,r)}{r!}$$

- **Rewşên taybet:**

1. $C(n\ ,n) = 1$

2. $C(n\ ,1) = n$

3. $C(n\ ,0) = 1$

Encam

$$C(n\ ,r_1) = C(n\ ,r_2) \Longrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \quad Yan \\ r_1 + r_2 = n \end{cases}$$

Mînak:

1. Em encamên levkirinên li jêr bibînin:

- $C(5\ ,3)$

$$C(5\ ,3) = \frac{p(5\ ,3)}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

- $C(10\ ,10) = 1$
- $C(8\ ,1) = 8$
- $C(6\ ,0) = 1$

2. Bi çend rêbazan 3 gogan bi hev re ji sindeqeke bi 9 gogên heman, bibînin:

$$\boldsymbol{C(9\,,3) = \frac{p(9\,,3)}{3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84}$$

3. Di polekê de 10 xwendekarên xort û 8 xwendekarên keç hene.

Bi çend rêbazan em dikarin qomîteyeke pêncek a çalakiyê ya ku ji 3 xort û 2 keçan ji vê polê pêk tê, çêkin.

Rêbazên hilbijartina xortan:

$$\boldsymbol{C(10\,,3) = \frac{p(9\,,3)}{3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120}$$

Rêbazên hilbijartina keçan:

$$\boldsymbol{C(8\,,2) = \frac{p(8\,,2)}{2!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28}$$

Hejmara rêbazên çêkirina qomîteyê: Li gorî rêbaza bingehîn di hejmartinê de.

$$\boldsymbol{C(10\,,3) \times C(8\,,2) = 120 \times 28 = 3360}$$

4. Em hevkêşeya li jêr çare bikin:

$$\boldsymbol{C(8\,,7) = C(8\,,r+2)}$$

Yan:

$$\boldsymbol{7 = r + 2 \Rightarrow r = 5 \quad pejirand\text{î}\ ye}$$

Yan jî:

$$\boldsymbol{7 + r + 2 = 8 \Rightarrow r = -1 \ \ ne\ pejirand\text{î}\ ye}$$

HÎNDARÎ

1. Em bi riya tekezkirina gavbigav tekez bikin ku:

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{r(r+1)} = \frac{n}{n+1} \qquad : \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

2. Hejmara rêbazên ku Çîçekê parekê ji 3 paran bixwe (kezeb, mirîşk, masî) û şerbetekê ji 3 şerbetan vexwe (pirteqal, lîmon, kola), çend e.

3. Bi çend rêbazan em dikarin hejmareke ji jimarên cuda (2, 3, 4, 7) pêkhatî li gorî ku jimara dehanî cot be, bibînin.

4. Em encamên bikaranînên li jêr bibînin.

$$\frac{7!}{5!} + \frac{9!}{7!} \quad , \quad \frac{5!}{12!} \quad , \quad C(5\,,0) \quad , \quad C(6\,,6) \quad , \quad C(7\,,3)$$

5. Sozdar DVD ku 5 stranan di nva xwe de digire kirî, bi çend rêbazan em dikarin ketober 4 strana jê hilbijêrin.

6. Di polekê de 20 xwendekar hene, bi çend rêbazan em dikarin 2 yan ji wan ji bo beşdariya kongra jîngeh û paqijiyê bibin, hilbijêrin.

7. Em hevkêşeyên li jêr çare bikin:

- $3p(n,1) = p(n,2)$
- $\frac{1}{n!} + \frac{2}{(n+1)!} = \frac{5!}{(n+2)!}$
- $C(10\,,2r+5) = C(10\,,r+2)$

8. Di zembîlekê de 8 gulên sor, 10 gulên spî û 5 gulên zer hene.

Em dixwazin gurzeke ku 6 gulên sor, 7 gulên spî û 4 gulên zer pêk were, çêkin.

Bi çend rêbazan em dikarin vê gurzê çêkin.

WANEYA DUYEM: DIBETÎ

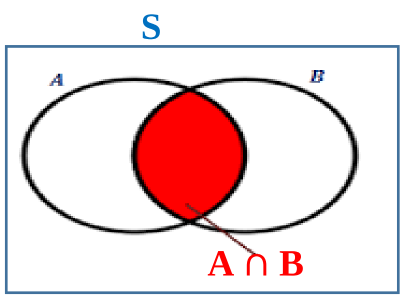
Em di salên borî de fêrî wateya tecrûbeya ketober û encamên tecrûbeyê bûbûn û me gotibû ku encamên tecrûbeyê dibe ku komikeke bidawî yan jî bêdawî be, lê em ê encamên tecrûbeyê ên bidawî lêkolîn bikin.

Me buyer jî nas kiribû û gotibû ku 3 cureyên wê hene: buyera pêkan, buyera tekez (S) û buyera nepêkan ($\emptyset$)

Bikaranînên li ser buyeran

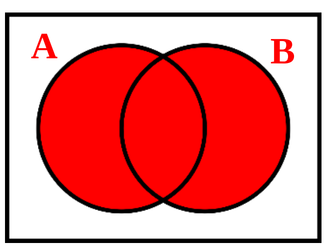
1. Qetandin: Qetandina buyerên A û B dibe $A \cap B$ ya ku endamên hevbeş tenê di navbera A û B de digire.

$\Longrightarrow$ $A \cap B$ tê wateya ku A û B bi hev re ne.



2. Yekgirtin: Qetandina buyerên A û B dibe $A \cup B$ ya ku endamên hevbeş û ne hevbeş di navbera A û B de digire.

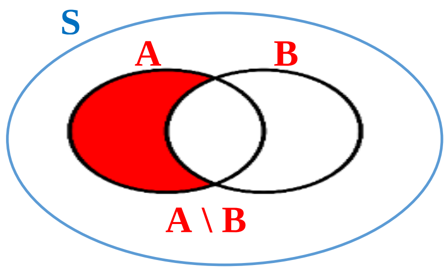
$\Longrightarrow$ A û B tê wateya ku A yan jî B



A ∪ B

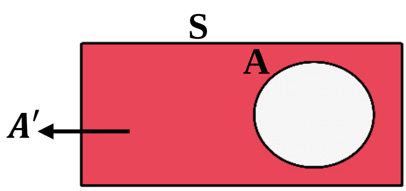
3. Cudahî: Cudahiya buyerên A û B dibe $A \setminus B$ ya ku endamên A digire û yên B nagire.

$\Longrightarrow A \setminus B$ tê wateya ku A ji bilî B ye.



4. Hevtemamker: Hevtemamkera buyera A dibe buyera A' ya ku hemû encamên tecrûbeyê digire ji bilî endamên A

$\Longrightarrow A'$ tê wateya ku S ji bilî A ye.



Encam

$$A \cap A' = \emptyset \qquad , \qquad A \cup A' = S$$

5. Rêgezên Du morgan: Heger A û B du buyerên ji S bin:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \qquad ، \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

Buyerên hevtunekirinê

Pênase: Em ji her du buyerên A û B re dibêjin hevtunekirî ne, heger $A \cap B = \emptyset$ be.

Em ji gelek buyeran re dibêjin hevtunekirî ne, heger her du buyer hevtunekirî bin.

Encam

Her buyerek A û hevtemamkera wê A' buyerên hevtunekirî ne.

Buyerên hêsan di her tecrûbeyekê de, buyerên hevtunekirî ne.

Hesabê dibetiyê

Em berê fêrî rêbaza hesabê dibetiyê bûbûn:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{Hejmara\ endamên\ A}{Hejmara\ endamên\ S}$$

Mînak: Gogek ji sindoqeke ku tê de 10 gogên heman hene, ji wan 5 spî, du sor û yên din jî kesk in, hat kişandin.

Em dibetiya buyerên li jêr bibînin:

1. Buyera ku goga kişandî sor be.

2. Buyera ku goga kişandî sor an jî kesk be.

3. Buyera ku goga kişandî ne kesk be.

Çare:

$$S = \{sp, sp, sp, sp, sp, sp, so, so, k, k, k,\}$$

Heger A dibetiya ku goga kişandî sor be:

$$A = \{so, so\} \Longrightarrow n(A) = 2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Heger B buyera ku goga kişandî sor an jî kesk be:

$$B = \{so, so, k, k, k\} \Longrightarrow n(B) = 2 + 3 = 5$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Heger C buyera ku goga kişandî ne kesk be:

$$C = \{sp, sp, sp, sp, sp, so, so\} \Longrightarrow n(C) = 5 + 2 = 7$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{7}{10}$$

Encam:

1. Ji herbuyerekê $A \subseteq S$ re, hejmareke rast heye bi navê dibetiya buyera A tê naskirin û $1 \geq P(A) \geq 0$

2. $P(\emptyset) = 0$, $P(S) = 1$

3. Heger A, B du buyerên hevtunkirî bin:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

4. $P(A') = 1 - P(A)$

5. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Mînak: **Di sindoqekê de, 3 gogên spî, 4 gogên sor û 5 gogên zer hene, me ketober du gog kişand.**

Heger:

$\boldsymbol{A}$ **buyera bidestxistina du gogên sor be.**

B buyera bidestxistina du gogên heman reng be.

C buyera bidestxistina herî kêm gogeke sor be.

Tiştên tên xwestin:

1. Em dibetiya buyerên $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ di rewşa kişandina bi hev re bibînin.

2. Em dibetiya buyerên $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ di rewşa kişandina bi hev re bi vegerandin bibînin.

Çare:

1. Di rewşa kişandina bi hev re:

Em dibînin ku: $\boldsymbol{n(s) = C(12\,,2) = 66}$

$$\boldsymbol{A = \{(sor, sor)\} \Longrightarrow n(A) = C(4\,,2) = 6}$$

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{C(4\,,2)}{C(12\,,2)} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}}$$

$$\boldsymbol{B = \{(sor, sor)\,, (sp\hat{\imath}, sp\hat{\imath})\,, (zer, zer)\}}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow n(B) = C(4\,,2) + C(3\,,2) + C(5\,,2)}$$

$$\boldsymbol{= 3 + 6 + 10 = 19}$$

$$\boldsymbol{P(B) = \frac{C(4\,,2) + C(3\,,2) + C(5\,,2)}{C(12\,,2)} = \frac{19}{66}}$$

$$C = \{(sor, ne\ sor), (sor, sor)\}$$

$$\Rightarrow n(C) = C(4,1).C(8,1) + C(4,2) = 38$$

$$P(C) = \frac{C(4,1).C(8,1) + C(4,2)}{C(12,2)} = \frac{38}{66} = \frac{19}{33}$$

2. Di rewşa kişandina bi vegerandin, ango gog piştî her kişandinekê li sindoqê vedigere.

$$A = \{(sor, sor)\}$$

$$P(A) = \frac{4}{12} \times \frac{4}{12} = \frac{16}{144} = \frac{1}{9}$$

$$B = \{(sor, sor), (sp\hat{\imath}, sp\hat{\imath}), (zer, zer)\}$$

$$P(B) = \left(\frac{3}{12} \times \frac{3}{12}\right) + \left(\frac{4}{12} \times \frac{4}{12}\right) + \left(\frac{5}{12} \times \frac{5}{12}\right)$$

$$= \frac{9}{144} + \frac{16}{144} + \frac{25}{144} = \frac{50}{144} = \frac{25}{72}$$

$$C = \{(sor, ne\ sor), (sor, sor)\}$$

$$P(C) = 2\left(\frac{4}{12} \times \frac{8}{12}\right) + \left(\frac{4}{12} \times \frac{4}{12}\right)$$

$$= \frac{64}{144} + \frac{16}{144} = \frac{80}{144} = \frac{5}{9}$$

Dibetiya mercî

Mînak ji bo guftogoyê: Di tecrûbeya zivirandina tekareya şensê ya ji (0) heta (9) jimarkirî, encamên **tecrûbeyê ev in**:

$$S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \Rightarrow n(S) = 10$$

Heger A û B du buyer bin:

$$A = \{2,4,5,6,9\} \Rightarrow n(A) = 5$$

$$B = \{1,3,4,5,6,7,8\} \Rightarrow n(B) = 7$$

Tiştên tên xwestin:

1. Em dibetiya çêbûna buyerên A û B bibînin.

2. Em dibetiya çêbûna buyera A bibînin, heger em bizanin ku B çêbûye.

3. Em dibetiya çêbûna buyera B bibînin, heger em bizanin ku A çêbûye.

Çare:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{10}$$

Em dibetiya buyera A heger bizanin ku B çêbûye bi sembola $P_B(A)$ nîşan bikin:

$$P_B(A) = \frac{n(A)\ \text{piştî çêbûna}\ B}{n(B)} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow P_B(A) = \frac{3}{7} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \Rightarrow P_B(A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}$$

$$\Rightarrow P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Têbînî: Di vê rewşê de, encamên tecrûbeyê B ye.

Em dibetiya buyera B heger bizanin ku A çêbûye bi sembola $P_A(B)$ nîşan bikin:

$$P_A(B) = \frac{n(B) \ \text{piştî çêbûna} \ A}{n(A)} = \frac{3}{5}$$

$$P_A(B) = \frac{3}{5} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \Rightarrow P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Têbînî: Di vê rewşê de, encamên tecrûbeyê A ye.

Bi giştî:

1. Dibetiya $P_B(A)$ bi awayê dibetiya A heger bizanin ku B çêbûye tê xwendin.

Bi navê dibetiya mercî ji çêbûna buyera A li gorî buyera B tê naskirin:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

2. Dibetiya $P_A(B)$ bi awayê dibetiya B heger bizanin ku A çêbûye tê xwendin.

Bi navê dibetiya mercî ji çêbûna buyera B li gorî buyera A tê naskirin:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

3. Bi giştî: $P_B(A) \neq P_A(B)$

Lê heger $P(A) = P(B)$ yan $n(A) = n(B)$ be, wê demê:

$$P_B(A) = P_A(B)$$

4. Heger $B \subseteq A$ be, wê demê: $P_B(A) = 1$

Em di vê rewşê de dibêjin ku A nêzî tekez e.

Buyera nêzî tekez: Buyera netekez e, lê dibetiya wê yeksanî (1) ye.

5. Heger $A \cap B = \emptyset$ be, wê demê: $P_B(A) = 0$, $P_A(B) = 0$

Em di vê rewşê de dibêjin ku A , B nêzî ne pêkan in.

Buyera nêzî nepêkan: Buyera ku nabe buyera nepêkan, lê dibetiya wê yeksanî (0) ye.

6. Heger buyerên A , A' di komika B de hevtemamker bin:

$$P_B(A) + P_B(A') = 1 \Leftrightarrow P_B(A') = 1 - P_B(A)$$

$$\Leftrightarrow P_B(A) = 1 - P_B(A')$$

Mînak: Di sindoqekê de 5 gogên sor bi jimarên 1, 1, 1, 1, 2

Jimarkirî û 3 gogên şîn bi jimarên 1, 1, 2 jimarkirî hene.

Em ji sindoqê ketober du gogan li pey hev bê vegerandin bikşînin.

1. Em dibetiya bidestxistina du gogên ku komkirina jimarên wan yeksanî (2) be, bibînin.

2. Em dibetiya bidestxistina du gogên sor ku komkirina jimarên wan yeksanî (2) be, bibînin.

3. Heger em bizanin ku her du gogên kişandî sor bin, em dibetiya ku komkirina jimarên wan yeksanî (2) be, bibînin.

Çare:

1. Heger A buyera bidestxistina du gogên sor ku komkirina jimarên wan yeksanî (2) be:

$$P(A) = \frac{C(6,2)}{C(8,2)} = \frac{15}{28}$$

2. Heger B buyera bidestxistina du gogên sor ku komkirina jimarên wan yeksanî (2) be:

$$P(B) = \frac{C(4,2)}{C(8,2)} = \frac{3}{14}$$

3. Heger C buyera bidsetxistina du gogên sor be û buyera hatî xwestin A ye:

$$P_C(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(C)} = \frac{C(4,2)}{C(5,2)} = \frac{3}{5}$$

Serbixweyiya dibetiyî

Pênase: Heger A , B du buyer bin, em ji buyerên A û B re dibêjin dibetiyî serbixwe ye, heger çêbûna buyerekê ji wan bi çêbûna ya din bandor nebe.

Ango: $P_B(A) = P(A)$, $P(B) = P_A(B)$

Mînak:

1. Di tecrûbeya kişandina bivegerandin de, buyer dibetiyî serbixwe ne.

2. Di tecrûbeya avêtina diraveke hesinî de, buyer dibetiyî serbixwe ne.

3. Di tecrûbeya avêtina berika nerdê de, buyer dibetiyî serbixwe ne.

4. Di tecrûbeyên nîşankirina armancekê de, buyer dibetiyî serbixwe ne.

Teorî: **Heger A , B du buyer bin li gorî ku $P(A) \neq 0$ û $P(B) \neq 0$ wê demê her du buyer dibetiyî serbixwe ne heger ev merc pêk bê:**

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Encam:

1. Heger A û B dibetiyî serbixwe bin, wê demê A û B' dibetiyî serbixwe ne.

2. Heger A' û B dibetiyî serbixwe bin, wê demê A' û B' dibetiyî serbixwe ne.

Mînak: **Heger $P(A) = \frac{5}{10}$, $P(B) = \frac{4}{10}$, $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$ be, em tekez bikin ku her du buyerên A û B dibetiyî serbixwe ne.**

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{7}{10} = \frac{2}{10}$$

$$P(A).P(B) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{10}$$

$$= \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$$

Ango: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Her wiha: A **û** B **dibetiyî serbixwe ne.**

HÎNDARÎ

1. Dema avêtina diraveke hesinî gelek caran, tecrûbe dema derketina du wêne yan jî du nivîsîn disekine.

- Em encamên tecrûbeyê binivîsin.

- Em buyerên li jêr destnîşan bikin:

$\boldsymbol{A}$ **buyera derketina herî kêm wêneyek.**

$\boldsymbol{B}$ **buyera derketina herî zêde du nivîsîn.**

$\boldsymbol{C}$ **buyera derketina herî zêde nivîsînek.**

2. Dema avêtina berika nerdê careke tenê:

- Em encamên tecrûbeyê binivîsin.

- Em buyerên li jêr destnîşan bikin:

$\boldsymbol{A}$ **buyera derketina hejmareke cot e.**

$\boldsymbol{B}$ **buyera derketina hejmareke kit e.**

- Buyerên $\boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{B}$ hevtinekirî ne ya na?

3. Heger $\boldsymbol{A}$ û $\boldsymbol{B}$ du buyerên ji encama tecrûbeya ketober bin û $\boldsymbol{P(A) = \frac{5}{8}}$, $\boldsymbol{P(B) = \frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{P(A \backslash B) = \frac{3}{8}}$ be, em ên li jêr bibînin:

- $\boldsymbol{P(A \cap B)}$
- $\boldsymbol{P(A \cup B)}$
- $\boldsymbol{P(A' \cap B')}$
- $\boldsymbol{P(A' \cup B)}$

4. Heger A û B du buyer bin û $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{27}{35}$ û $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ be:

Em $P_A(B)$, $P_B(A)$, $P(A \cup B)$ bibînin.

5. Heger $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{5}{7}$, $P(A \cup B) = \frac{8}{10}$ be, em tekez bikin ku A û B dibetiyî serbixwe ne.

BEŞA HEŞTEM: MATRÊKS

MATRÊKS

WANE: MATRÊKS

Matrêks ji têgînên bîrkariyê ye, ku bikaranîna wê di dema nû de belav bûye, gelek beşên zanistî di nava xwe de digire.

Em bikaranîna wê di zanistên amar, aborî û civaknasiyê de dibînin, ji ber ku daneyan pêşkêş dike û di tabloyan de rêxistin dike û bi vî awayî bi hêsanî bi bîr tê û bikaranîn li ser wê çêdibe.

Matrêks di beşa cebirê de bi awayekî fireh hatiye bikaranîn û kesê yekemîn ku bi kar anî zanyarê birêtanyayî Kîlî bû (1821 – 1895)

Pênaseya matrêksê

Têgîneke bîrkariyê ye, ji m rêz û n stûn di hundirê tabloyeke rêzkirî de pêk tê.

Matrêks bi sembola mîna $A_{m\times n}$ tê nîşankirin.

Em ji $(m \times n)$ re dibêjin pêpilka matrêksê.

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Têbînî

Heger hejmara rêzan yeksanî hejmara stûnan be, wê demê matrêks bi navê matrêksa dam ji pêpilka n tê naskirin.

Kurtî bi awayê A_n tê nivîsîn.

Mînak 1:

Matrêksa $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ **ji pêpilka** (3×2) **ye.**

Matrêksa $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **ji pêpilka** (3) **ye.**

Endama (5) **di rêza yekem û stûna yekem de ye û bi sembola** a_{11} **tê nîşankirin.**

Endama (2) **di rêza duyem û stûna sêyem de ye û bi sembola** a_{23} **tê nîşankirin.**

Mînak 2: **Tabloya li jêr buhayên sê cureyên sandwîçan bi sê qebareyên cuda di xwaringehekê de dide xuyakirin.**

	Biçûk	navîn	mezin
Sînga ferûcê	400	500	600
Masiyên qelandî	300	400	500
Şawirma	200	300	400

1. Em van daneyan di matrêksekê de rêxistin bikin ku buhayên wan di berbipêş rêzkirî bin.

2. Pêpilka vê matrêksê çi qas e?

3. Nirxê endama a_{32} **bibînin.**

Çare:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc}\text{biçûk} & \text{Navîn} & \text{mezin}\end{array} & \\ \begin{pmatrix}200 & 300 & 400\\ 300 & 400 & 500\\ 400 & 500 & 600\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\text{Şawirma}\\ \text{Masiyên qelandî}\\ \text{Sînga ferûcê}\end{array}\end{array}$$

Em dibînin ku (3) rêz û (3) stûn hene, ango matrêks dam e û ji pêpilka (3) ye, lê nirxê endama $a_{32} = 500$

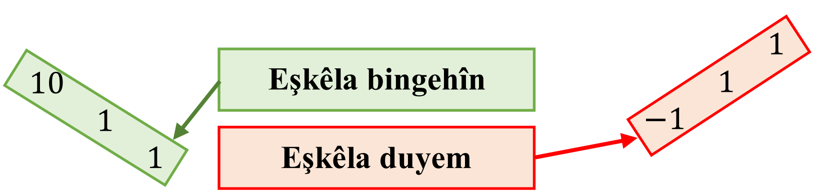
Cureyên matrêksan

1. Matrêksa dam: Matrêkseke ku tê de hejmara rêzan yeksanî hejmara stûnan e.

Mînak 1: $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ **matrêkseke dam ji pêpilka (2) ye.**

Mînak 2: $A = \begin{pmatrix}10 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **matrêkseke dam ji pêpilka (3) ye.**

Têbînî: Ji matrêksê re du eşkêl hene, bingehîn û duyem



2. Matrêksa eşkêlî: Matrêkseke dam e, hemû endamên wê yên derveyî eşkêla bingehîn, sifir in.

Mînak: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ matrêkseke eşkêlî ji pêpilka (3) ye.

3. Matrêksa stûnî: Matrêkseke ku stûneke tenê di nava xwe de digire.

Mînak: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ matrêksa stûnî ji pêpilka $(3, 1)$ ye.

4. Matrêksa rêzî: Matrêkseke ku rêzeke tenê di nava xwe de digire.

Mînak: $\boldsymbol{B} = (1 \quad 3 \quad 5)$ matrêkseke rêzî ji pêpilka $(1, 3)$ ye.

5. Matrêksa yekendam: Matrêkseke ku ji endamekî tenê pêk tê.

Mînak: $\boldsymbol{C} = (5)$ matrêkseke yekendam e ji pêpilka (1×1) ye.

6. Matrêksa yekane: Matrêkseke eşkêlî ye, hemû endamên eşkêla bingehîn hejmara (1) ne û bi sembola $\boldsymbol{I_n}$ tê nîşankirin.

Mînak: $\boldsymbol{I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrêkseke yekane ye, ji pêpilka (3) ye.

7. Matrêksa sifirî: Matrêkseke ku hemû endamên wê sifir in û bi sembola $\boldsymbol{O}$ tê nîşankirin.

Mînak: $\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrêkseke sifirî ji pêpilka (2) ye.

* Em ji du matrêksan re dibêjin hember in, heger heman pêpilk bin.
* Em ji du matrêksan re dibêjin yeksan in, heger heman pêpilk û endamên beramber bin.

Mînak: Her du matrêksên $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ yeksan in, ji ber ku heman pêpilk in û endamên wan ên beramber yeksan in.

Têbînî Em dikarin sûdê ji taybetiya yeksaniya du matrêksan di çarekirina hevkêşeyan de bigirin.

Mînak: Heger $\begin{pmatrix} 25 & 4 \\ 3 & y+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-5 & 4 \\ 3 & 3y+12 \end{pmatrix}$ be, em nirxên x , y bibînin:

Ji ber ku her du matrêks yeksan in:

$$2x - 5 = 25 \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15$$

$$y + 18 = 3y + 12 \Rightarrow y - 3y = 12 - 18 \Rightarrow -2y = -6$$

$$\Rightarrow y = 3$$

Bikaranînên li ser matrêksan

1. Hevdana hejmareke rast bi matrêksê re: Tê wateya hevdana her endamekî ji endamên matrêksê bi wê hejmara rast λ yan jî k re.

Ango: $\lambda \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \\ \lambda g & \lambda h & \lambda l \end{pmatrix}$

Mînak: Em encamê bibînin:

$$-2 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 4 & -2 \times 1 \\ -2 \times -1 & -2 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}$$

Encam:

1. $\lambda . O = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda . O = O$ **li gorî ku** O **matrêksa sifirî ye.**

2. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

3. $(\lambda + k)A = \lambda . A + k . A$

4. $\lambda(k . B) = k(\lambda . B) = (\lambda . k)B$

5. $-1 . A = -A$ **:** $-A$ **vajiya matrêksa** A **li gorî komkirinê ye.**

6. $1 . A = A$

2. Komkirina du matrêksên A , B ji heman pêpilkê: **Matrêkseke heman pêpilkê û endamên wê encamên komkirina endamên beramber, di her du matrêksan de û bi sembola $A + B$ tê nîşankirin.**

Mînak: Heger $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **du matrêks bin, em** $A + B$ **bibînin:**

$$A+B=\begin{pmatrix}2&0&4\\5&1&4\\0&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&2&1\\2&0&4\\5&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&2&5\\7&1&8\\5&4&1\end{pmatrix}$$

Encam:

1. Komkirina matrêksan bikaranîneke hevguhêr e:

$$A+B=B+A$$

2. Komkirina matrêksan bikaranîneke yekgirtî ye:

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

3. Matrêksa sifirî li gorî komkirinê endamê bêbandor e, dema ku heman pêpilka A be:

$$O+A=A+O=A$$

4. Ji her matrêksekê A re dij heye – A ji ber ku:

$$A+(-A)=-A+A=O$$

3. Derxistina du matrêksên A , B ji heman pêpilkê: Zêdekirina dijî matrêksa B li matrêksa A ye li gorî komkirinê.

Ango: $A-B=A+(-B)$

Mînak: **Heger** $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&4&5\\7&0&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&-3\\5&0&1\\0&-6&2\end{pmatrix}$
du matrêks bin, em $A-B$ bibînin:

$$A-B=A+(-B)=\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&4&5\\7&0&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-2&3\\-5&0&-1\\0&6&-2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -5 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Encam:

1. Derxistina matrêksên nehevguhêr e.

2. Derxistina matrêksên neyekgirtî ye.

3. Derxistina du matrêksên heman pêpilkê, matrêkseke heman pêpilkê ye.

4. Derxistina matrêksekê ji xwe, matrêksa sifirî ji heman pêpilkê ye.

4. Hevdana du matrêksan: **Heger $A_{n\times r}$, $B_{r\times m}$ du matrêks bin, hevdana matrêksa A bi matrêksa B matrêkseke ku hejmara stûnên di A de yeksanî hejmara rêzên di B de be ye û matrêksa nû ji pêpilka $n \times m$ ye.**

Ango: Heger $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ du matrêks bin, wê demê:

$$A.B = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

Mînak: **Em encamê bibînin:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 0+2\times 1 & 1\times 3+2\times 2 & 1\times 5+2\times 0 \\ 0\times 0+3\times 1 & 0\times 3+3\times 2 & 0\times 5+3\times 0 \\ 4\times 0+1\times 1 & 4\times 3+1\times 2 & 4\times 5+1\times 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & 14 & 20 \end{pmatrix}$$

Rahênan:

1. Heger $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **sê matrêks bin, em matrêksa** $2A - 3B + 4C$ **bibînin:**

2. Heger $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **du matrêks bin, em** $A\,.\,B$ **bibînin:**

Taybetiyên hevdana matrêksan

1. Hevdana matrêksan nehevguhêr e: $AB \neq BA$

2. Hevdana matrêksan yekgirtî ye: $(A.B).C = A.(B.C)$

3. Hevdana matrêksa yekane bi matrêksekê, heman matrêks e: $I\,.\,A = A\,.\,I = A$

Diyarkera matrêkseke dam

Heger $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrêkseke dam ji pêpilka duyem be, em ji hejmara rast $(a.d - b.c) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ re dibêjin diyarkera matrêksa A ye û bi sembola $det\ (A)$ tê nîşankirin.

Ango: $det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c = \Delta_A$

Encama diyarkerê hejmareke rast e.

Belavkirina diyarkera matrêksekê ji pêpilka sêyem

Heger $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ w & h & k \end{pmatrix}$ matrêkseke dam ji pêpilka sêyem be, wê demê:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ w & h & k \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ w & k \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ w & h \end{vmatrix}$$

$$= a(e.k - f.h) - b(d.k - f.w) + c(d.h - e.w)$$

Vajiya matrêksa dam

Heger A , B du matrêksên dam bin, em dibêjin matrêksa A vajiya matrêksa B ye, yan jî matrêksa B vajiya matrêksa A ye heger ev merc pêk bê:

$$A.B = B.A = I$$

Bi sembola $A = B^{-1}$ yan jî $B = A^{-1}$ tê nîşankirin.

Bi awayekî kurt: Heger A^{-1} vajiya matrêksa A be, wê demê: $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

Ango: Ji bo dîtina vajiya matrêkseke dam $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ em diyarkera matrêksê $det(A)$ bibînin:

Heger $det(A) \neq 0$ be, wê demê vajiya wê:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Lê dema ku $det(A) = 0$ be, wê demê ji matrêksê re vajî tune ye û bi navê matrêksa bitenê tê naskirin.

Mînak: Heger $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ matrêksek be, em A^{-1} bibînin:

Em destpêkê diyarkera wê bibînin:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \times (-3) - 3 \times (-2)$$

$$= -3 + 6 = +3 \neq 0$$

Ji vê matrêksê re vajî heye:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

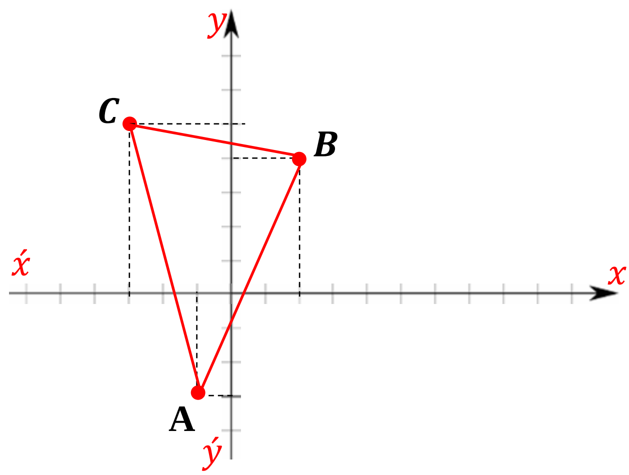
Dîtina rûbera sêgoşeyê bi alîkariya diyarkeran

Em dikarin diyarkeran ji bo dîtina rûbera sêgoşeyekê bi kar bînin, heger cotên rêzkirî yên sergoşeyên wê wiha bin:

Rûbera sêgoşeya ku sergoşeyên wê $A(a,b)$, $B(c,d)$, $C(e,f)$ bin bi vê têkiliyê tê dayîn:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

Mînak: **Em rûbera sêgoşeya ku cotên wê yên rêzkirî yên sergoşeyên wê $A(-1,-3)$, $B(2,4)$, $C(-3,5)$ bin, bibînin:**



$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2}\,[-1(4\times 1 - 5\times 1) + 3(2\times 1 + 3\times 1) + 1(2\times 5 + 3\times 4)]$$

$$= \frac{1}{2}(1 + 15 + 22)$$

$$= \frac{1}{2}(38) = 19 \text{ mena dam}$$

Çareya hevkêşeyên matrêksî

Em dikarin sûdê ji têgîna vajiya matrêksê di çareya hevkêşeyan de bigirin.

Heger ji matrêksa $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ re vajî hebe, wê demê em dikarin $A.X = B$ binivîsin, her wiha $X = A^{-1}.B$

Mînak: **Em hevkêşeya matrêksî ya li jêr çare bikin:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Em $det(A)$ bibînin:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times 3 = 5 \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

HÎNDARÎ

1. Livbazê tîma goga zembîlê di dibistanekê de, çûnseriya sê lêstikvanan di pêşbaziya dibistanan de weke li jêr dît:

Can: 10 pêşbazî lîst, 20 nîşankirin, 5 gol

Zinar: 16 pêşbazî lîst, 35 nîşankirin, 8 gol

Dilo: 18 pêşbazî list, 41 nîşankirin, 10 gol

- Em daneyan di matrêksekê de rêxistin bikin ku navên lêstikvanan berbipêş rêz bikin. li gorî hejmara golan.

- Em pêpilka matrêksê bibînin û piştre nirxê endama a_{23} bibînin.

2. Em cureya her matrêksekê û pêpilka wê bibînin:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. Heger $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ du matrêks bin, em $\frac{1}{3}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ bibînin.

4. Heger $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ matrêksek be, em $\boldsymbol{A}^{-1}$ bibînin.

5. Em rûbera sêgoşeya $\boldsymbol{ABC}$ bibînin, heger em bizanin ku:

$$\boldsymbol{A}(-2,-2) \quad , \quad \boldsymbol{B}(3,1) \quad , \quad \boldsymbol{C}(-4,3)$$

6. Em hevkêşeya matrêksî ya li jêr çare bikin:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} . \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

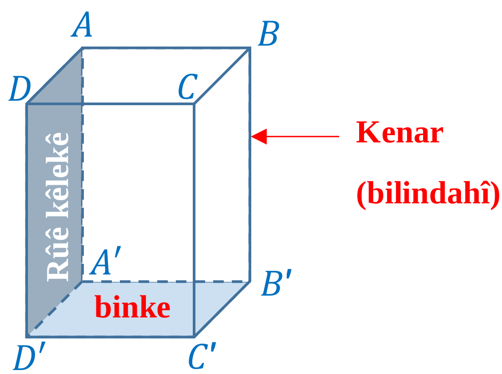
BEŞA NEHEM: GEWDEYÊN GEOMETRIYÎ

GEWDEYÊN GEOMETRIYÎ

WANE: GEWDEYÊN GEOMETRIYÎ

1. Pirîzmaya tîk: Gewdeya ku ji du binkeyên rstênhev û yeksaneyî pêk tê, kenarên wê yên kêlekê di dirêjahiyê de yeksan in û her yek ji wan bi navê bilindahiya pirîzmayê tê naskirin û li ser kenarên her du binkeyan tîk in.

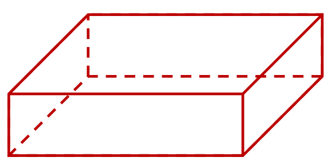
Rûyên wê yên kêlekê milkêş an jî dam in.



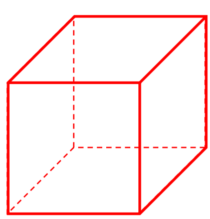
Têgîn

1. Hejmara rûyên kêlekê yeksanî hejmara kenarên binkeyê ye.

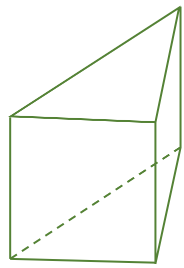
2. Heger her du binkeyên pirîzmaya tîk milkêş bin, wê demê ev pirîzma bi navê pirîzmaya milkêşê tê naskirin.



3. Heger her du binkeyên pirîzmaya tîk dam bin û bilindahî yeksanî dirêjahiya kenara damê be, wê demê ev pirîzma bi navê kabê tê naskirin.



4. Heger binkeya pirîzmayê sêgoşeya tîk be, wê demê bi navê pirîzmaya sêyanî ya tîk tê naskirin.



5. Pirîzma li gorî hejmara kenarên binkeya wê tê naskirin.

Rûbera kêlekê û ya tevahiyê ya pirîzmaya tîk

1. Rûbera kêlekê ya pirîzmaya tîk = derdora binkeyê × bilindahiyê:

$$\boldsymbol{S_L = P_b \times h}$$

2. Rûbera tevahiyê ya pirîzmaya tîk= rûbera kêlekê + du qatên rûbera binkeyê:

$$\boldsymbol{S_T = S_L + 2S_b}$$

Qebareya pirîmaya tîk

Qebareya pirîzmaya tîk = rûbera binkeyê × bilindahiyê:

$$\boldsymbol{V = S_b \times h}$$

Mînak 1: **Kesekî xwest dîwarê odeya xwe ji hundir ve bi sîramîkên rengkirî kaşî bike, heger bilindahiya odeyê 3 m be û binkeya wê milkêşa ku durahiyên wê $8m$, $6\ m$ bin, çend metre sîramîk ji bo dîwarên odeyê pêwîst in?**

Çare:

Em dibînin ku rûbera sîramîka pêwîst, rûbera kêlekê ya pirîzmaya tîk a ku durahiyên wê durahiyên odeyê ne.

Em derdora binkeyê bibînin: $P_b = 2(6+8) = 28\ m$

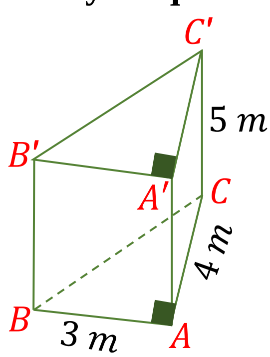
Rûbera kêlekê ya pirîzmayê:

$S_L = P_b \times h$

$= 28 \times 3 = 84\ m^2$ **rûbera sîramîka pêwîst e.**

Mînak 2: **Binkeya pirîzmaya sêyanî ya tîk, sêgoşeya tîk e ku dirêjahiyên her du kenarên wê yên tîk $4m$, $3m$ ye û bilindahiya pirîzmayayê 5 m ye.**

Em rûbera kêlekê û ya tevahiyê û qebareya wê bibînin.



Em dirêjahiya jenê di sêgoşeya ABC tîk de bibînin:

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = 9 + 16 = 25$

$\Longrightarrow BC = 5m$

Em derdora binkeyê bibînin:

$$P_b = 3 + 4 + 5 = 12\ m$$

Em rûbera kêlekê bibînin:

$$S_L = P_b \times h = 12 \times 5 = 60\ m^2$$

Em rûbera tevahiyê bibînin:

$$S_T = S_L + 2S_b = 60 + 2 \times (\frac{1}{2} \times 3 \times 4) = 60 + 12 = 72\ m^2$$

Em qebareyê bibînin:

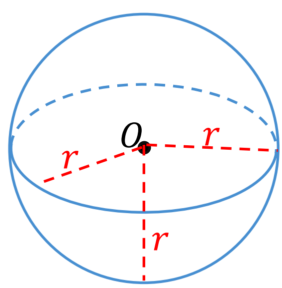
$$V = S_b \times h = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times 5 = 30\ m^3$$

2. Gog

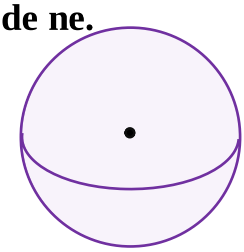
Pênaseya rûyê gogî: Gewdeya ku ji xalên valahiyê pêk tê ya ku durahiyên wê ji xaleke xwecih (O) durahiyeke xwecih (r) e.

Em ji (O) re dibêjin navenda rûyê gogê û ji (r) re dibêjin nîveşkêl.

Rûyê gogî bi sembola $\mathcal{w}$ tê nîşankirin.

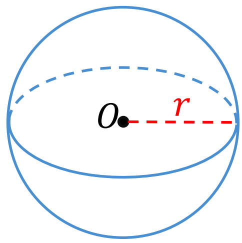


Gewdeya gogî: **Komika xalên valahiyê yên ku li ser rûyê gogê û di hundirê wê de ne.**

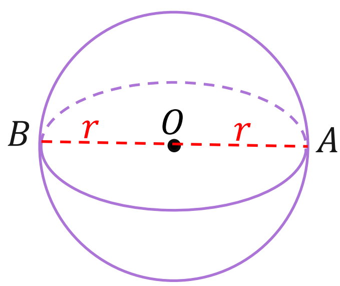


Têgînên di gewdeya gogî de

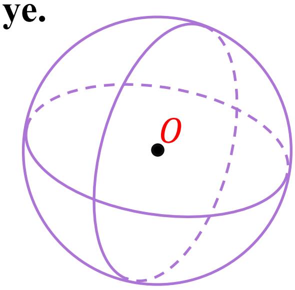
1. Nîveşkêla gogê: **Dirêjahiya di navbera gog û rûyê wê de ye û bi sembola (r) tê nîşankirin.**



2. Eşkêla gogê: **Parçerasteka ku navenda wê navenda gogê (O) be û her du aliyên wê du xal ji gogê bin û dirêjahiya eşkêla wê $(2r)$ be.**



3. Bazinê mezintirîn: **Bazinê ku li ser gogê ye û eşkêla wê yeksanî eşkêla gogê ye.**



Rêgezên girêdayî gogê

1. Hesabê rûbera rûyê gogê:

$$S = 4\pi r^2$$

2. Hesabê qebareya gogê:

$$V = \frac{4}{3}\pi\, r^3$$

Mînak 1: **Em rûbera goga ku eşkêla wê $50\ cm$ e, bi alîkariya π bibînin:**

Em nîveşkêşla gogê bibînin:

$$r = \frac{50}{2} = 25\ cm$$

Em rûbera rûyê wê bibînin:

$$S = 4\pi r^2 = 4\ \pi\ (25)^2 = 2500\ \pi\ cm^2$$

Mînak 2: **Em qebareya goga ku nîveşkêla wê $2m$ be bibînin:**

$$V = \frac{4}{3}\pi\, r^3 = \frac{4}{3}\pi\ (2)^3 = \frac{32}{3}\pi\ m^3$$

HÎNDARÎ

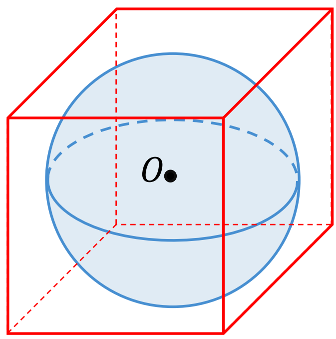
1. Binkeya pirîzmaya sêyanî ya tîk, sêgoşeya tîk e ku dirêjahiyên her du kenarên wê yên tîk $8\ cm$, $6\ cm$ ye û bilindahiya pirîzmaya $7\ cm$ yse.

Em rûbera kêlekê û ya tevahiyê û qebareya wê bibînin.

2. Em rûbera rûyê goga ku nîveşkêla wê $3m$ bibînin û piştre qebareya wê bibînin.

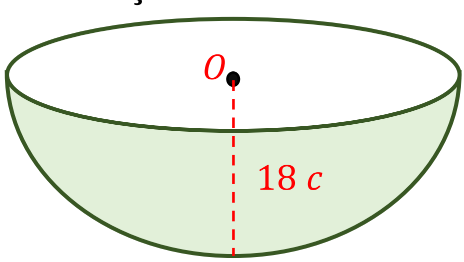
3. Binkeya pirîzmaya tîk dema ku dirêjahiya kenara wê $20\ cm$ ye û bilindahiya pirîzmayê $20\ cm$ ye, gogek di hundirê wê de ye ku bi rûyên wê ji hundir ve ye.

Em qebareya parçeya di navbera pirîzmayê û gogê de bibînin.



4. Sêniyek bi teşeya nîvgogê ye ku dirêjahiya eşkêla wê ya hundirîn $36\ cm$ ye.

Heger me xwest sêniyê bi 10 litre av dagirin, dê ev 10 lître sêniyê dagire yan na û çima?



BELAVKIRINA WANEYAN LI SER SALA XWENDINÊ

Heftî / Meh	Heftiya Yekem	Heftiya Duyem	Heftiya Sêyem	Heftiya Çarem
Rezber			**Fonkisyonên hejmarî**	**Fonkisyonên hejmarî**
Cotmeh	**Taybetiyên fonkisyonê**	**Guhertina fonkisyonê**	**Guhertina fonkisyonê**	**Fonkisyona bi hêza kertî**
Mijdar	**Fonkisyona vajî**	**Fonkisyona logarîtmayê**	**Dawiya fonkisyonê**	**Dawiya fonkisyonê**
Berfanbar	**Domdariya fonkisyonê**	**Hejmara daraştî**	**Pêkanînên daraştinê**	**Pêkanînên daraştinê**
Rêbendan	Lêveger	Nirxandin	Bêhinvedan	Bêhinvedan
Reşemeh	**Fonkisyona resen**	**Rêgeza *sin* di sêgoşeyê de**	**Rêgeza *cos* di sêgoşeyê de**	**Peyhatiya hejmarî**
Avdar	**Peyhatiya hejmarî**	**Peyhatiya geometriyî**	**Tekezirina gavbigav**	**Dibetî**
Cotan	**Matrêks**	**Matrêks**	**Gewdeyên geometriyî**	**Gewdeyên geometriyî**
Gulan	Lêveger	Nirxandin		