BÎRKARÎ

AMADEYÎ 3

2019/2020

AMADEKAR

Ev pirtûk ji aliyê Komîteya Bîrkariyê ve hatiye amadekirin.

LÊVEGER

- Komîteya Şopandinê

- Komîteya Fotoşopê

- Komîteya Redekteyê

Ev pirtûk ji aliyê Saziya Minhacan ve, wek pirtûka wanedayînê, ji bo dibistanan hatiye pejirandin.

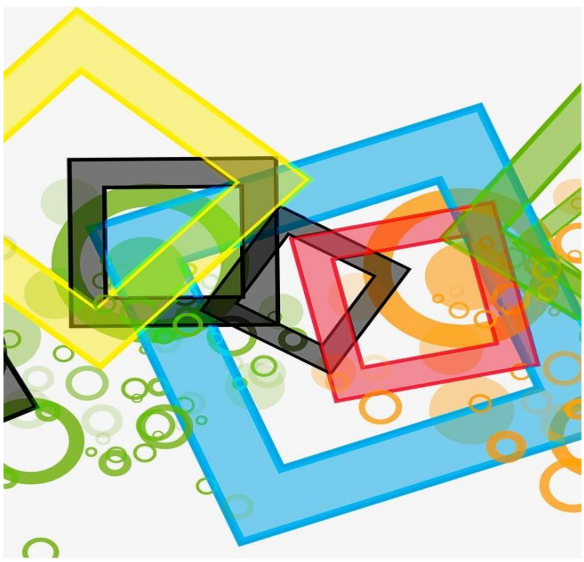
NAVEROK

BEŞA YEKEM: DARAŞTIN

1. DAWÎ Û DOMDARÎ

2. DARAŞTIN Û PÊKANÎNÊN WAN

3. FONKISYONA RESEN Û ÎNTEGRAL



WANEYA YEKEM: DAWÎ Û DOMDARÎ

1- Têgîna dawiyan

Têgîna dawiyan di analîza bîrkariyê de ji têgînên bingehîn e, bi lêkolîna guhartinên fonkisyonekê ve girêdayî ye dema ku guhêr nêzî hejmarekê yan jî bêdawiyê bibe.

1. Dawiya fonkisyoneke hejmarî li cem hejmareke rast (a):

Ji bo dîtina dawiya fonkisyoneke hejmarî $f(x)$ dema ku $x \longrightarrow a$ em $x = a$ di fonkisyona $f(x)$ de bi cih dikin.

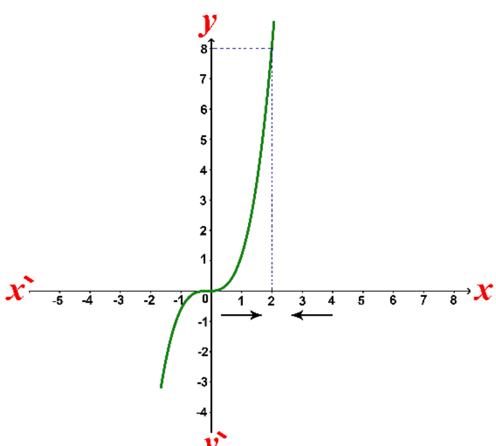
Mînak: **Heger $f(x) = x^3$ be, em dawiya vê fonkisyonê li cem $x \longrightarrow 2$ bibînin:**

Tabloya li jêr nirxên (x) dema ku em nêzî hejmara (2) dibin, diyar dike ji aliyê rast an jî çepê ve.

x	…	1.8	1.9	2	2.1	2.2	…
$f(x)$	…	5.83	6.85	8	9.26	10.64	…

Em dikarin wiha binivîsin:

$$\lim_{x \longrightarrow 2} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} (x)^3 = (2)^3 = 8$$

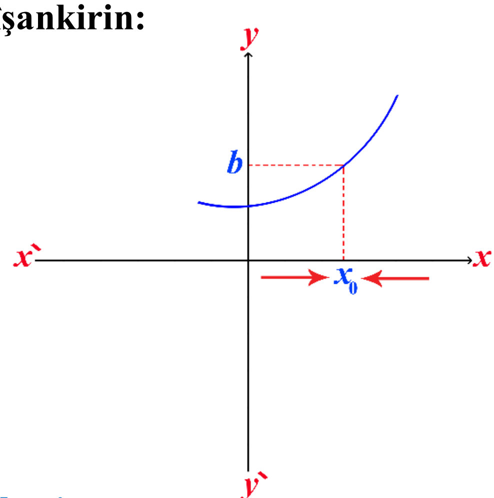


- **Encam**

Em dibêjin ku hejmara (b) dawiya fonkisyona $f(x)$ ye dema ku (x) nêzî (x_0) dibe, heger derxistin di navbera $f(x)$ û (b) de nêzî sifirê be yan jî yeksanî wê be.

Bi vê sembolê tê nîşankirin:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$



- **Taybetiyên dawiyan**

Heger $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$ **be, wê demê:**

- $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = a + b$
- $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = a - b$
- $\lim_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x).\lim_{x \to x_0} g(x) = a.b$
- $\lim_{x \to x_0} [k.g(x)] = k.\lim_{x \to x_0} g(x) = k.b$
- $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{1}{b}$ $\quad (g(x) \neq 0 \, , b \neq 0)$
- $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{a}{b}$ $\quad (g(x) \neq 0 \, , b \neq 0)$

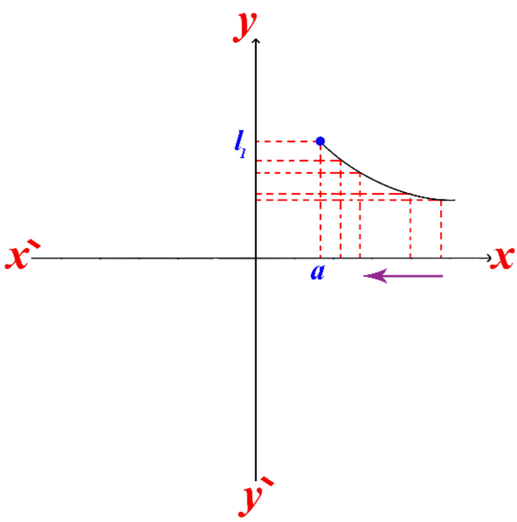
- $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to x_0} f(x)]^n = a^n \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$

- $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)} = \sqrt{a} \quad (a \geq 0 \, , f(x) \geq 0 \,)$

Dawî ji aliyê rast û çepê ve

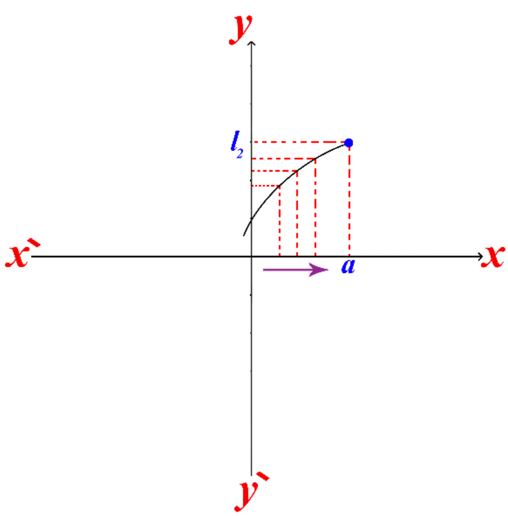
- Dema ku (x) ji aliyê rastê ve (bi nirxine mezintir) nêzî (a) dibe û dawî ℓ_1 be, em dawiyê bi vî awayî dinivîsin:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = \ell_1$$



- Dema ku (x) ji aliyê çepê ve (bi nirxine biçûktir) nêzî (a) dibe û dawî ℓ_2 be, em dawiyê bi vî awayî dinivîsin:

$$\lim_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = \ell_2$$



- **Têbînî**

Heger $\ell_1 \neq \ell_2$ be, wê demê dawî ji fonkisyonê re li cem (a) tune ye.

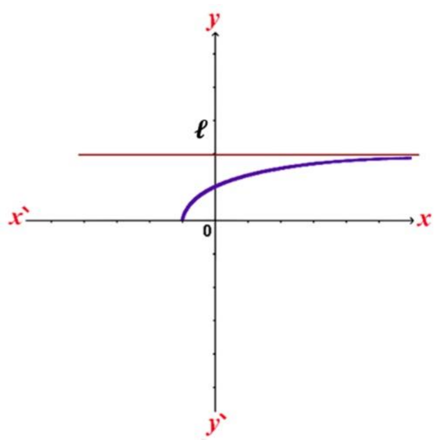
- **Encam**

Heger $\lim\limits_{\substack{> \\ x \longrightarrow a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x \longrightarrow a}} f(x) = \ell$ be, wê demê ℓ dawiya fonkisyona $f(x)$ li cem (a) ye.

2. Dawiya fonkisyoneke hejmarî li cem bêdawiyê

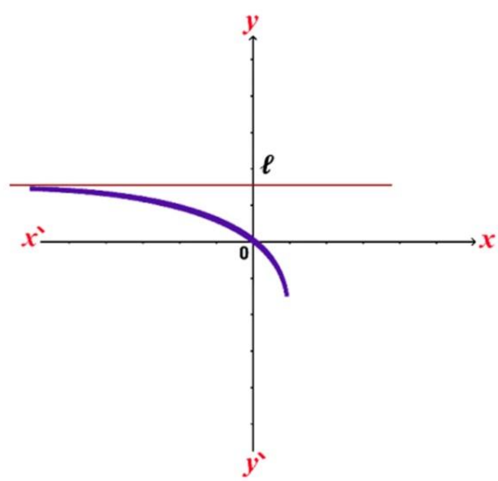
- Heger $f(x)$ fonkisyonek be û dawiya wê hejmareke rast (ℓ) be, dema ku $x \longrightarrow +\infty$ em dawiyê bi vî awayî dinivîsin:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) =$$

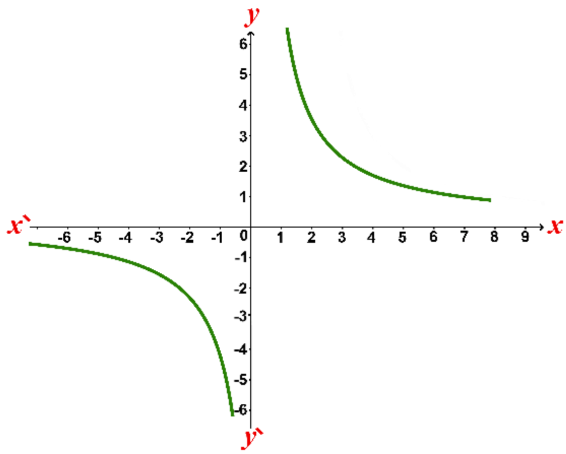


- Heger $f(x)$ fonkisyonek be û dawiya wê hejmareke rast (ℓ) be, dema ku $x \longrightarrow -\infty$ em dawiyê bi vî awayî dinivîsin:

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) =$$



- Heger $k \neq 0$ be û (n) hejmareke tam û tam pozîtîv be, wê demê: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{k}{x^n} = 0$



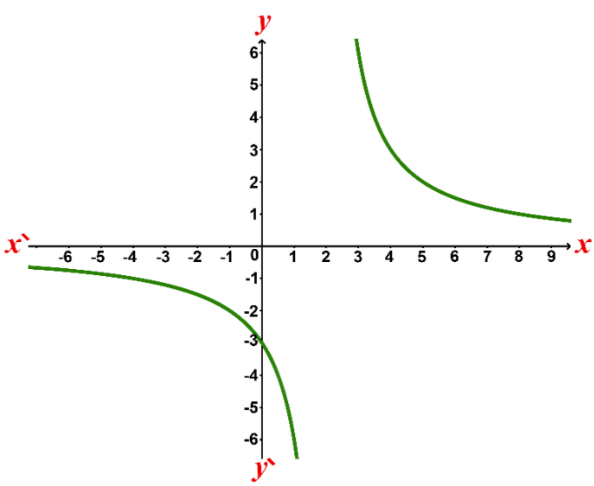
Mînak 1: Heger fonkisyona (f) di $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ de pênasekirî be li gorî:

$$f(x) = \frac{6}{x-2}$$

- Em dawiya $f(x)$ li cem $x = 3$ ji aliyê rastê ve bibînin.

- Em dawiya $f(x)$ li cem $x = 3$ ji aliyê çepê ve bibînin. Em çi encamê digirin?

- Em dawiya $f(x)$ li cem $+\infty$ û $-\infty$ bibînin.



$$\lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 3}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 3}} \left(\frac{6}{x-2}\right) = \frac{6}{3-2} = \frac{6}{1} = 6$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 3}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 3}} \left(\frac{6}{x-2}\right) = \frac{6}{3-2} = \frac{6}{1} = 6$$

Em dibînin ku:

$$\lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 3}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 3}} f(x) = 6 \Longrightarrow \lim_{x \longrightarrow 3} f(x) = 6$$

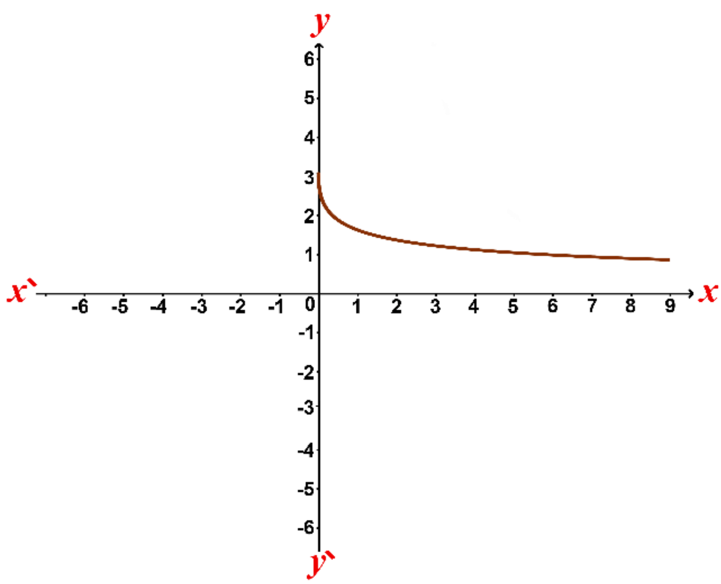
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{6}{x-2}\right) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \left(\frac{6}{x-2}\right) = 0$$

Mînak 2: Heger fonkisyona $f(x)$ di $]0, +\infty[$ de pênasekirî be li gorî: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}+1}$

Em dawiya (f) li cem $+\infty$ bibînin:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{x}+1}\right) = 0$$



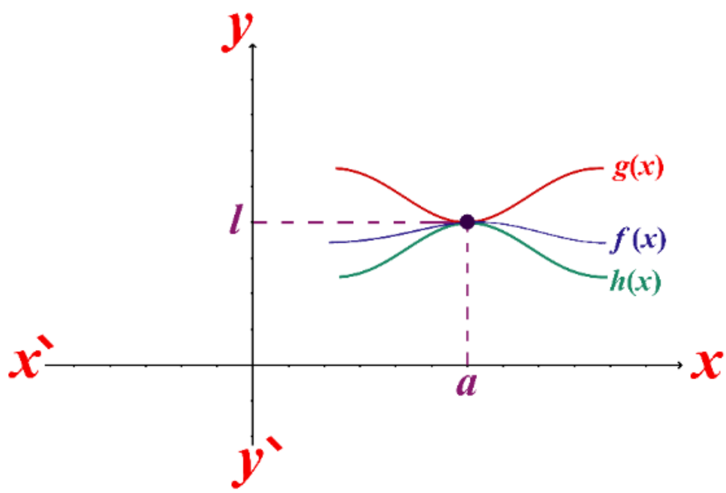
Teoriya dorpêçkirinê

1. Heger f, g, h sê fonksiyon bin û di $D\backslash\{a\}$ de pênasekirî bin û vê mercê pêk bînin:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \quad : \quad x \in D\backslash\{a\}$$

Heger her du dawiyên li jêr hebin û yeksan bin û nirxê wan ê hevbeş ℓ be: $\lim_{x \to a} g(x)$, $\lim_{x \to a} h(x)$

Wê demê: $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$



Heger sê fonkisyon ber bi pêş ve rêzkirî bin û mezintirîn û biçûktirîn dawiyên wan yeksan bin, wê demê dawiya fonkisyona navîn yeksanî dawiya her du fonkisyonan e.

2. Heger f, g du fonksiyon bin û di $D\backslash\{a\}$ de pênasekirî bin û vê mercê pêk bînin:

$$f(x) \leq g(x) \quad : \quad x \in D\backslash\{a\}$$

Heger her du dawiyên li jêr hebin:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad , \quad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

Wê demê: $\ell \leq M$

3. Heger f, g du fonksiyon bin û di $D\backslash\{a\}$ de pênasekirî bin:

- Heger $g(x) \leq f(x)$ û $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ be, wê demê:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

- Heger $g(x) \geq f(x)$ û $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ be, wê demê:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

> **Ev teorî dimîne rast dema ku $a = -\infty$ yan jî $a = +\infty$**

Mînak 1: **Em $\lim_{x\to 0}(x^2 . \cos\frac{1}{x})$ bibînin:**

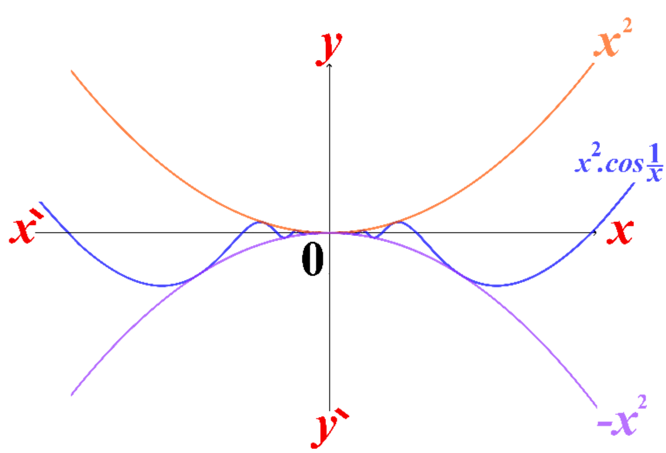
Em dizanin ku $\forall$ (çi qasî) $x \in \mathbb{R}^*$:

$$-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq +1$$

$$-x^2 \leq x^2 . \cos\frac{1}{x} \leq x^2$$

Ji ber ku $\lim_{x\to 0}(x^2) = 0$ û $\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$

Li gorî teoriya dorpêçkirinê: $\lim_{x\to 0}(x^2 . \cos\frac{1}{x}) = 0$

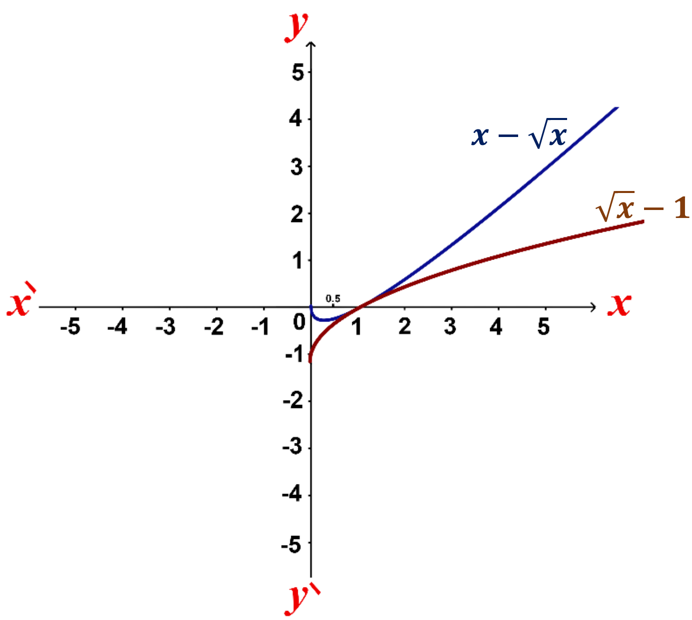


Mînak 2: Em dawiya $f(x) = x - \sqrt{x}$ di $[0, +\infty[$ de li rex $+\infty$ bibînin:

Em dibînin ku: $f(x) \geq \sqrt{x} - 1$

Û ji ber ku: $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - 1) = +\infty$

Wê demê: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Rahênan:

1. Em dawiya fonkisyona li jêr li cem $1, -1, 0, -\infty$ bibînin:

$$f(x) = \frac{3x + 4}{x - 1}$$

2. Em dawiya fonkisyona li jêr dema ku $x \to 0$ bibînin:

$$f(x) = 4 - x^2 . sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Rewşên nediyar

Heger f, g du fonkisyon bin, em li dawiyên wan di tabloya li jêr de dema ku $x \longrightarrow a$ bigerin:

<table>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a} f(x)$</td><td>$\ell \in \mathbb{R}$</td><td colspan="2">$\ell \in \mathbb{R}$</td><td colspan="2">$\ell \in \mathbb{R}$</td><td>$+\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$0$</td><td>$0$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a} g(x)$</td><td>$M \in \mathbb{R}$</td><td colspan="2">$+\infty$</td><td colspan="2">$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$</td><td>$\ell + M$</td><td colspan="2">$+\infty$</td><td colspan="2">$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\,.\,g(x))$</td><td rowspan="2">$\ell . M$</td><td>$\ell > 0$</td><td>$\ell < 0$</td><td>$\ell > 0$</td><td>$\ell < 0$</td><td rowspan="2">$+\infty$</td><td rowspan="2">$-\infty$</td><td rowspan="2">$+\infty$</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
</table>

Em di vê tabloyê de dibînin ku hinek rewşên nediyar hene, ew jî ev in:

$$+\infty - \infty \quad , \quad 0\,.\,\infty$$

- Em tabloya li jêr bibînin:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$M \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$M > 0$	$M < 0$	$M > 0$	$M < 0$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{M}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$			

Em di vê tabloyê de jî dibînin ku rewşine nediyar bi van awayan hene:

$$\frac{\infty}{\infty} \quad , \quad \frac{0}{0}$$

Rêbazên rakirina rewşên nediyar

Bi du awayan çêdibe:

a) **Bi derxistina faktorên hevbeş.**
b) **Heger kokdam hebe, em hevdan û parvekirina bi hevjimarê re pêk bînin.**

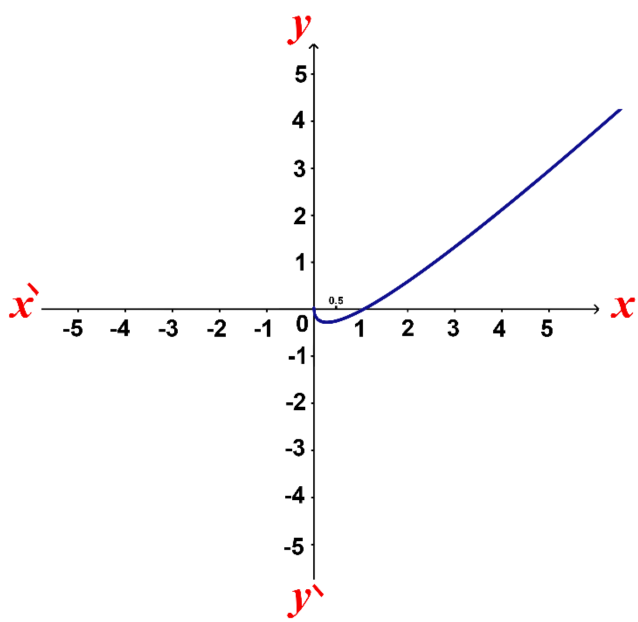
1. Rakirina rewşa nediyar a bi awayê $+\infty - \infty$:

Mînak 1: **Em dawiya $f(x) = x - \sqrt{x}$ di $[0, +\infty[$ de, li cem $+\infty$ bibînin:**

Em dizanin ku: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ **û** $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

Ev rewşeke nediyar e û bi awayê $+\infty - \infty$ ye, ji bo rakirina vê rewşa nediyar:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(1-0) = +\infty$$



Mînak 2: Em dawiya $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ li cem $+\infty$ bibînin:

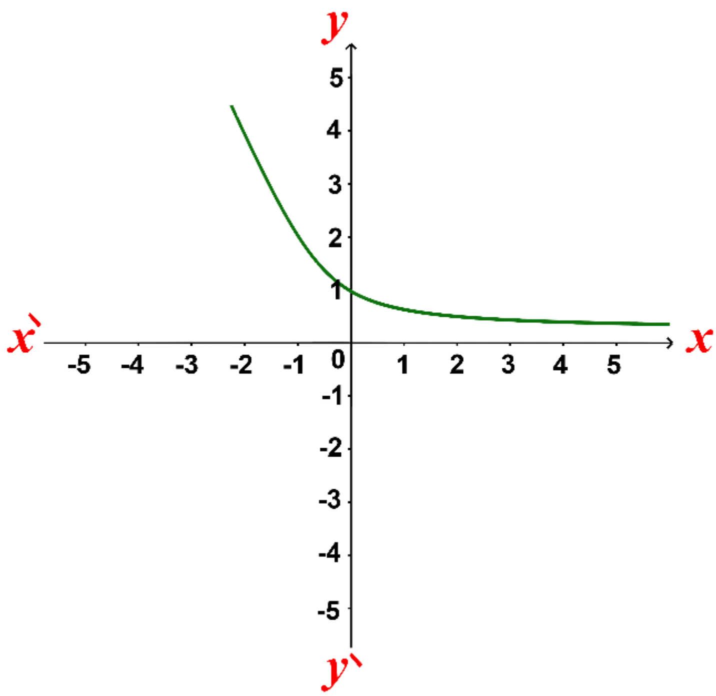
Em dizanin ku: $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ **û** $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

Ev rewşeke nediyar e û bi awayê $+\infty - \infty$ ye, ji bo rakirina vê rewşa nediyar:

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

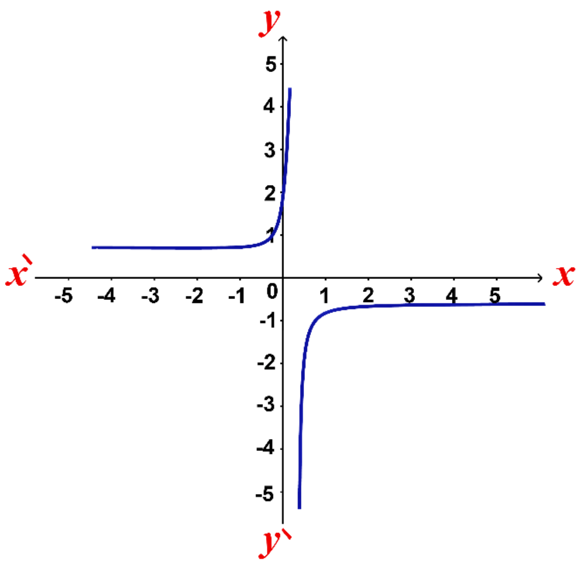
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$



2. Rakirina rewşa nediyar a bi awayê $\frac{\infty}{\infty}$:

Mînak: Em dawiya $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+5}}{1-3x}$ di $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{3}\right\}$ de, li cem $-\infty$ bibînin:



Em dibînin ku:

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{4x^2+5} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (1-3x) = +\infty$$

Rewşeke nediyar bi awayê $\frac{\infty}{\infty}$ heye, ji bo rakirina wê:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}.\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}}{1-3x} = \frac{-x}{1-3x}.\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}$$

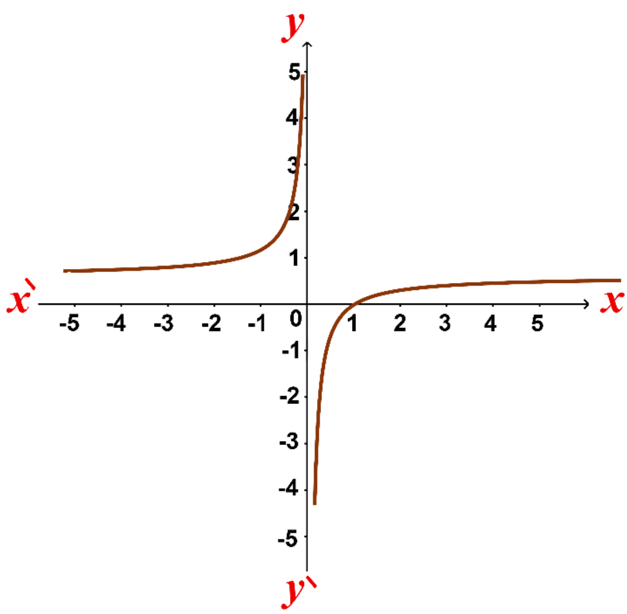
$$f(x) = \frac{1}{3-\frac{1}{x}}\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$$

3. Rakirina rewşa nediyar a bi awayê $\frac{0}{0}$:

Ji bo rakirina vê rewşê, em dikarin par û paranê bi awayê hevdana faktoran binivîsînin û faktorên hevbeş sade bikin.

Mînak: **Em dawiya** $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}$ **di** $\mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$ **de, dema ku** $x \longrightarrow 2$ **bibînin:**



$$\lim_{x\to+2}(x^2 - 3x + 2\ ) = 0$$

$$\lim_{x\to+2}(x^2 - 2x) = 0$$

Rewşeke nediyar bi awayê $\frac{0}{0}$ **heye, ji bo rakirina wê:**

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{(x-1)}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+2} f(x) = \frac{1}{2}$$

4. Rakirina rewşa nediyar a bi awayê $0 \,.\, \infty$:

Mînak: Em dawiya $f(x) = \frac{1}{x} . (\sqrt{x} - 4)$ li cem $+\infty$ bibînin:

Em dibînin ku:

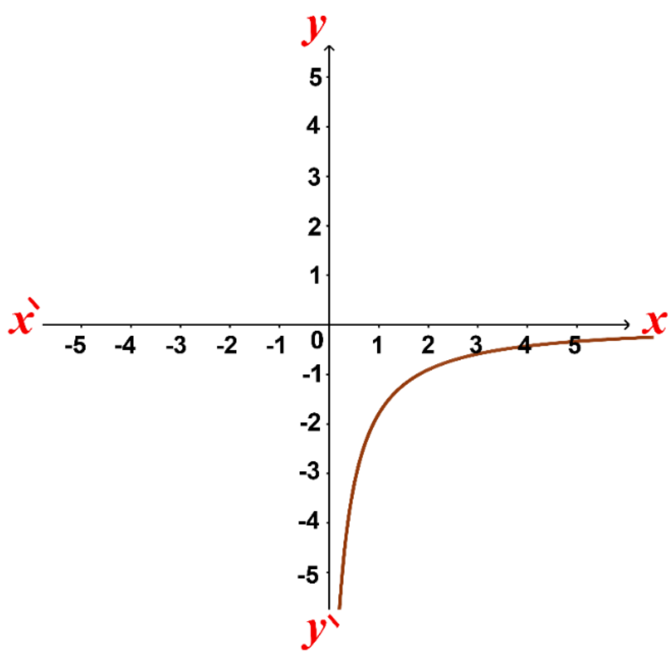
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - 4) = +\infty$$

Rewşeke nediyar bi awayê $0 \,.\, \infty$ heye, ji bo rakirina wê:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 4}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{4}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$



2- Domdarî

Heger $f(x)$ fonkisyoneke di navbereke vekirî I de, pênasekirî be û heger $a \in I$ be, em ji $f(x)$ re dibêjin li cem a fonkisyoneke domdar e heger ev merc pêk hat:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Mînak: Em domdariya fonkisyona f dema ku $x = 0$, $x = 1$ be lêkolîn bikin:

$$f(x) = \begin{cases} x & : \; x \leq 1 \\ x + 1 & : \; x > 1 \end{cases}$$

Fonkisyona di $D = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ pênasekirî ye.

Em dibînin ku: $0 \in D$ ye.

$$\left.\begin{matrix} f(0) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

Ango: $f(x)$ li cem $x = 0$ fonkisyoneke domdar e.

Di heman demê de, em dibînin ku $1 \in D$ û $f(1) = 1$

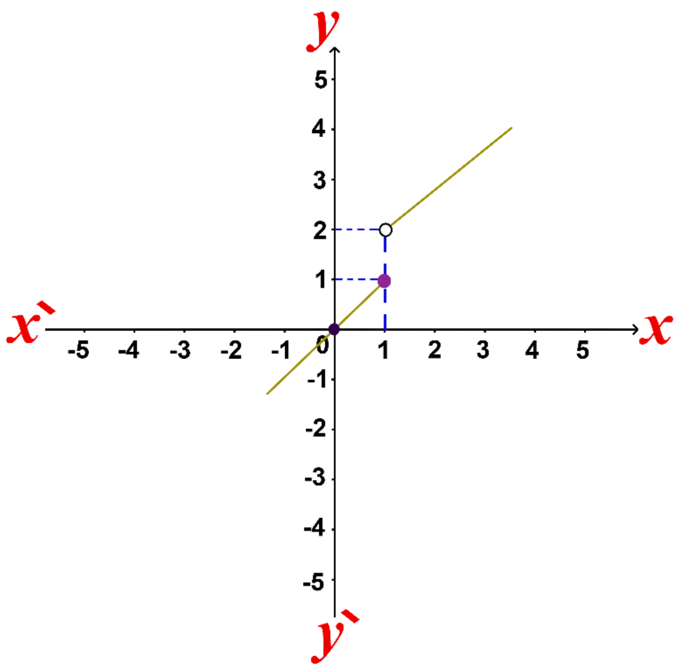
Rêgeza girêdanê ji fonkisyonê re li cem xala $x = 1$ ji aliyê rastê ve ne weke rêgeza girêdanê ya wê xalê ji aliyê çepê ve ye, ji ber vê yekê em ji fonkisyonê re li cem xala $x = 1$ li dawiyeke aliyê rastê û yeke aliyê çepê bigerin:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} (x) = 1$$

Em dibînin ku: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$

Ev tê wateya ku fonkisyona $f(x)$ li cem xala $x = 1$ ne domdar e.



Mînak: Em nirxê k bibînin ji bo ku fonkisyona f dema ku $x = 4$ be, domdar be:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & : x \neq 4 \\ k & : \quad x = 4 \end{cases}$$

Em dibînin ku: $\lim_{x \to 4} f(x) = 6$

Heta ku fonkisyon dema ku $x = 4$ be domdar be, divê:

$$f(4) = 6 \implies k = 6$$

HÎNDARÎ

1. Em dawiyên fonkisyonên li jêr bibînin:

$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}$ **li cem** $+\infty$

$f(x) = \sqrt{x^2 + 5} - x^2$ **li cem** $+\infty$

$f(x) = \frac{\sqrt{7x+1}-6}{x^2-25}$ **li cem 5**

$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+3x+2}$ **li cem** -2

$f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ **li cem 1**

$f(x) = \frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}$ **li cem 4**

$f(x) = \frac{1}{x} + 3$ **li cem** $+\infty$

$f(x) = \frac{2x-3}{3x^2+1}$ **li cem** $+\infty$

2. Em dawiya fonkisyona li jêr dema ku $a = 0$ be bi alîkariya teoriya dorpêçkirinê bibînin:

$$f(x) = 8 + \sqrt{x}\,.sin\,(\frac{1}{\sqrt{x}})$$

3. Em domdariya fonkisyonê li cem $x = 1$ lêkolîn bikin:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & : \quad x \leq 1 \\ x^2 + 2 & : \quad x > 1 \end{cases}$$

4. Em domdariya fonkisyonên li jêr li cem xalên li pêşiya wan diyarkirî lêkolîn bikin:

$f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ **li cem 2 , 3**

$f(x) = 5 - |x - 3|$ **li cem 3**

WANEYA DUYEM: DARAŞTIN Û PÊKANÎNÊN WÊ

Berê me fonkisyona bi nenasekî ya bi awayê $y = f(x)$ nas kiriye û me bikaranînên li ser wê dîtine, me pêkanîna daraştinê ji fonkisyonên di navberekê de, domdar nas kiriye û daraştiya yekem ji van fonkisyonan re û hinek fonkisyonên sêgoşeyî re dîtiye. Niha jî em ê berdewam bikin û daraştina fonkisyonine din ku nenasên wan jev qut nebin nas bikin li gorî ku nenas bi têkiliyeke navxweyî bi hev ve tên girêdan, ji ber vê yekê em ê daraştina navxweyî jî lêkolîn bikin û fêrî daraştiya duyem ji hinek fonkisyonan re bibin di hundirê lêkolîna daraştiyên jorîn ji fonkisyonan re û ya ku dê derfetê bide lêkolîna pêkanînên jiyanî yên cur bi cur.

Têgîna fonkisyona daraştî

▪ Pênase 1

Heger $f : D \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow f(x)$ fonkisyoneke di D de, pênasekirî be û di rewşa x_0 ji D be, em di $D\backslash\{x_0\}$ fonkisyoneke din g pênase bikin û bi sembola $g(x)$ nîşan bikin li gorî vê têkiliyê:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Heger ji vê fonkisyonê re di D de, dema ku x biçe x_0 dawiyeke rast hebe, em vê dawiyê bi sembola $f'(x)$ nîşan bikin û navê wê bikin hejmara daraştî ji fonkisyona $f(x)$ re li cem x_0

Wê demê em dibêjin fonkisyona $f(x)$ li cem x_0 daraştî ye.

- **Pênase 2**

Heger $f : D \longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow f(x)$ fonkisyoneke di D de, pênasekirî be, em dibêjin fonkisyona $f(x)$ di navbereke beşî I de ya binkomika D daraştî ye, heger li cem her x ekê ji I daraştî be.

Wê demê em fonkisyona daraştî f' di I de, bi vî awayî pênase dikin: Ew fonkisyona ku li cem her x ekê ji I bi nirxekî hejmara daraştî $f'(x)$ ve tê girêdan.

Ango: $x \longrightarrow f'(x)$

Taybetî

1) Heger fonkisyona f di I de, daraştî be, ew di heman navberê de domdar e.

2) Heger fonkisyona f di I de, ne domdar be, ew di heman navberê de, nayê daraştin.

3) Heger fonkisyona $f(x)$ li cem x_0 domdar be, ne merc e ku li cem x_0 bê daraştin.

Bi kurtasî:

Ji bo lêkolîna pêkanîna daraştina fonkisyonekê f li cem x_0 em encama vê dawiyê bibînin:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Heger dawî hejmareke rast be, wê demê fonkisyona f li cem x_0 tê daraştin, lê heger dawî $\pm\infty$ be, fonkisyona f li cem x_0 nayê daraştin.

Mînak: Em pêkanîna daraştinê ji fonkisyona li jêr re li cem 0 bibînin: $f(x) = 2x + 5$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x + 5 - 5}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} = 2$$

Ji ber ku dawî hejmareke rast e, wê demê fonkisyona f li cem 0 tê daraştin.

Rêgezên daraştinê

Fonkisyon	Daraştin	Navber
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in [0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$x \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$x \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$x \in [0, +\infty[$

Mînak: Em daraştiyên fonkisyonên li jêr bibînin:

$$f(x) = 2x + 5 \implies f'(x) = 2$$

$$f(x) = 3x^6 \implies f'(x) = 3.(6)x^{6-1} = 18x^5$$

$$f(x) = x^{\frac{5}{2}} \implies f'(x) = \frac{5}{2}.x^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}.x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$$

$$f(x) = 5\sqrt[3]{x} = 5.x^{\frac{1}{3}} \implies f'(x) = \frac{1}{3} \times 5.x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{5}{3}.x^{\frac{-2}{3}} = \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Di daraştinê de teorî

Fonkisyon	Rêgeza daraştinê
$f(x) = u + v$	$f'(x) = u' + v'$
$f(x) = u.v$	$f'(x) = u'v + v'u$
$f(x) = au$	$f'(x) = au'$
$f(x) = \frac{1}{u}$	$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$
$f(x) = \frac{u}{v}$	$f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Taybetî

1. Fonkisyonên pirpêkhate di $\mathbb{R}$ de, tên daraştin.

2. Fonkisyonên kertî di navbereke vekirî de, ku binkomika komika pênaseya wê be, tên daraştin.

Mînak: Em fonkisyonên daraştî ji fonkisyonên li jêr re bibînin:

$$f(x) = 3x^2 - 3x - 1 \Longrightarrow f'(x) = 2(3)x - 3 = 6x - 3$$

$$f(x) = x\,.\left(\sqrt{x^7}\right) \Longrightarrow f'(x) = 1\left(\sqrt{x^7}\right) + \frac{7}{2}\,.\,x^{\frac{7}{2}-1}\,.\,x$$

$$= x^{\frac{7}{2}} + \frac{7}{2}\,x^{\frac{5}{2}+1} = x^{\frac{7}{2}} + \frac{7}{2}\,x^{\frac{7}{2}}$$

$$= \left(1 + \frac{7}{2}\right)x^{\frac{7}{2}} = \frac{9}{2}\,x^{\frac{7}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{x^7}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^5} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x\,.\,x^5 - 5x^6}{(x^5)^2} = \frac{-3x^6}{x^{10}} = \frac{-3}{x^4}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$= \frac{-x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$$

Rahênan: Em daraştiyên fonkisyonên li jêr bibînin:

$$f(x) = x^{-4} - 2x^3 + \sqrt[5]{x^4}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-3}$$

$$f(x) = x\,.(x^2 - 3)$$

$$f(x) = x\ln x - x$$

$$f(x) = (3x - 4).\,e^x$$

Daraştina du fonkisyonên lêkhatî

Rêgez

Heger g di navbera I de, fonksiyoneke daraştî be û h di her navbereke binkomika $g(I)$ de, , fonksiyoneke daraştî be, wê demê:

Fonksiyona $h \circ g$ li gorî ku $(h \circ g)(x) = h\big(g(x)\big)$ di navbera I de , daraştî ye û rêgeza daraştina wê ev e:

$$(h \circ g)'(x) = h'[g(x)]\ g'(x)$$

Mînak: **Heger $f(x) = (5x^2 - x)^7$ fonkisyoneke di $\mathbb{R}$ de, pênasekirî be, em fonkisyona daraştî $f'(x)$ bibînin:**

$$f'(x) = 7.(5x^2 - x)^6.(10x - 1)$$

Rêgezên daraştina fonkisyonine destnîşankirî

1. Daraştiya hêza fonkisyonekê:

Heger g di navbera vekirî $I \subseteq \mathbb{R}$ de , fonksiyoneke daraştî be,
û fonksiyona $f(x) = \big(g(x)\big)^r \quad : r \in \mathbb{Q}$ di $I_1 \subseteq I$ de, daraştî be, wê demê:

$$f'(x) = r\big(g(x)\big)^{r-1}.g'(x)$$

Mînak: **Em daraştiya fonkisyona li jêr bibînin:**

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

Rêbaza yekem:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \Longrightarrow f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

Rêbaza duyem:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} = (x^2 - 4)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4)^{\frac{1}{2}-1}(2x)$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 - 4)^{\frac{-1}{2}}(2x)$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

2. Daraştiya fonkisyonên sêgoşeyî yên bingehîn ji fonkisyonekê re:

Fonkisyon	Daraştin
$f(x) = \sin[g(x)]$	$f'(x) = g'(x).\cos[g(x)]$
$f(x) = \cos[g(x)]$	$f'(x) = -g'(x).\sin[g(x)]$
$f(x) = \tan[g(x)]$	$f'(x) = g'(x).(1 + \tan^2[g(x)]) = \frac{g'(x)}{\cos^2[g(x)]}$
$f(x) = \cot[g(x)]$	$f'(x) = -g'(x).(1 + \cot^2[g(x)]) = \frac{-g'(x)}{\sin^2[g(x)]}$

Mînak: **Em daraştiyên fonkisyonên li jêr bibînin:**

$$f(x) = \sin(x^2 + 3x) \Rightarrow f'(x) = (2x + 3).\cos(x^2 + 3x)$$

$$f(x) = \cos(x^3 - 1) \Rightarrow f'(x) = -(3x^2).\sin(x^3 - 1)$$

$$f(x) = \tan(2x - 7) \Rightarrow f'(x) = 2.[1 + \tan^2(2x - 7)]$$
$$= \frac{2}{cos^2(2x - 7)}$$

$$f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

3. Daraştiya fonkisyona bi awayê $f(x) = e^{g(x)}$

Heger $g(x)$ di navbera vekirî $I \subseteq \mathbb{R}$ de, fonkisyoneke daraştî be û fonkisyona f bi vî awayî be: $f(x) = e^{g(x)}$

Wê demê daraştina wê, bi vî awayî ye:

$$f'(x) = g'(x).e^{g(x)} = g'(x).f(x)$$

Mînak: **Em daraştiyên fonkisyonên li jêr bibînin:**

$$f(x) = e^{(x^6-4x)} \Longrightarrow f'(x) = (6x^5 - 4).e^{(x^6-4x)}$$

$$f(x) = e^{\frac{1-x}{x}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{(-1)x - 1(1-x)}{x^2}.e^{\frac{1-x}{x}}$$

$$= \frac{-1}{x^2}.e^{\frac{1-x}{x}} \quad : \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$f(x) = x^3e^{-2x} \Longrightarrow f'(x) = 3x^2e^{-2x} + (-2e^{-2x}.x^3)$$

$$= 3x^2e^{-2x} - 2x^3e^{-2x}$$

$$f(x) = -5e^{\sin x} \Longrightarrow f'(x) = -5\cos x\, e^{\sin x}$$

4. Daraştiya fonkisyona bi awayê $f(x) = ln[g(x)]$

Heger g di navbera vekirî $I \subseteq \mathbb{R}$ de, fonkisyoneke daraştî be û fonkisyona f bi vî awayî be: $f(x) = ln[g(x)]$

Wê demê f di her navbera binkomika I de, ku $g(x) > 0$ be, daraştî ye, daraştina wê bi vî awayî ye:

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Mînak: Em daraştiya $f(x) = ln(2x - 9)$ bibînin:

$$f'(x) = \frac{2}{2x - 9}$$

Daraştina têkiliya navxweyî

Di gelek hevkêşeyan de, , zehmetî di nîşankirina y de , bi rêya x rasterast heye, ji ber ku nenasa y fonkisyoneke diyar li gorî x nîşan nade, em ji van hevkêşeyan re dibêjin têkiliyên navxweyî.

Ji ber vê yekê dema daraştina têkiliya navxweyî, divê em daraştiya her du aliyan li gorî nenasekê x yan jî y bibînin.

Daraştina navxweyî:

Me berê daraştiya fonkisyona bi awayê $y = f(x)$ dîtiye û ew fonkisyoneke diyar e ji nenasa serbixwe x re, nirxê y tê nîşankirin heger nirxê x bê zanîn.

Mînak: $y = x^2 - 5x + 1$ fonkisyoneke diyar li gorî nenasa serbixwe x nîşan dide.

Lê heger y bi nenasa x ve girêdayî be di hevkêşeyeke ku x û y bi hev re bigire, bi navê têkiliya navxweyî tê nasîn.

Mînak: $x \,.\, y + y - 4 = 0$ têkiliyeke navxweyî nîşan dide.

- **Encam**

Her hevkêşeyek, têkiliyeke navxweyî jê re tê pênasekirin.

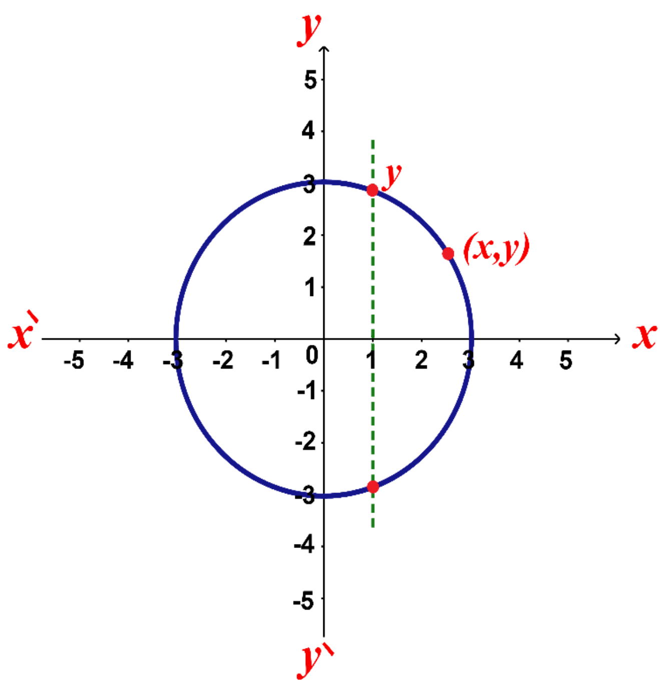
- **Têbînî**

1. Em dikarin hevkêşeya $x\,.\,y + y - 4 = 0$ bi vî awayî binivîsin:

$$y(x+1) = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x+1} \quad : \quad x \neq -1$$

Di vê rewşê de, têkiliya navxweyî tenê fonkisyoneke diyar nîşan dide.

2. Komika xalên (x, y) yên ku hevkêşeya $x^2 + y^2 = 9$ pêk tînin, bazinekî ku navenda wî xala kordînatê (O) ye û dirêjahiya nîveşkêla wî 3 cm ye.



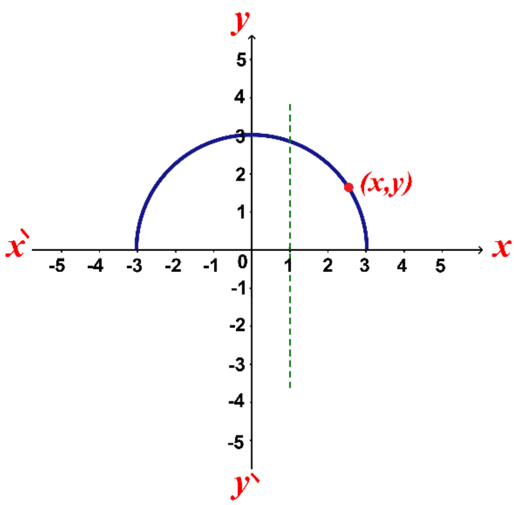
Em dibînin ku $x = 1$ rasteka rastênhevî $y'y$ xêzika pêldayî di du xalan de dibire, ji ber vê yekê têkiliya $x^2 + y^2 = 9$ fonkisyonê nîşan nade, lê heger em hevkêşeyê bi vî awayî binivîsin:

$$y^2 = 9 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

Wê demê têkiliya navxweyî $x^2 + y^2 = 9$ du fonkisyonên diyar pênase dike:

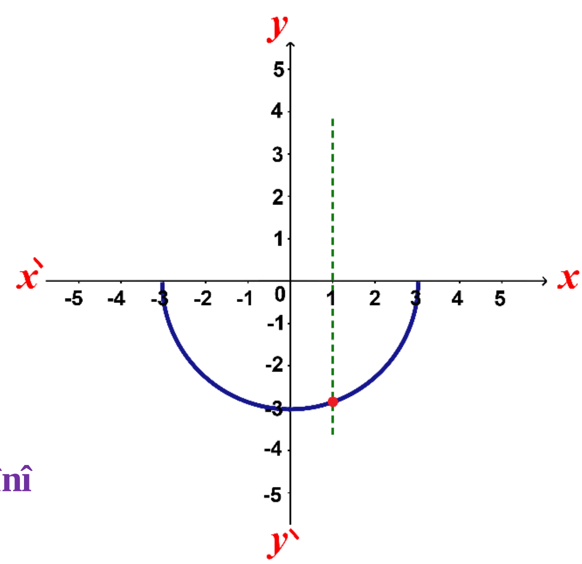
Fonkisyona yekem: $y = +\sqrt{9 - x^2}$

Di navbera $[-3\,,+3]$ de, pênasekirî ye û komika wê ya nirxan a giştî $[0\,,3]$ ye û ji bo her $x \in\,]-3\,,+3[$ tê daraştin.



Fonkisyona duyem: $y = -\sqrt{9 - x^2}$

Di navbera $[-3\,,+3]$ de, pênasekirî ye û komika wê ya nirxan a giştî $[-3\,,0]$ e û ji bo her $x \in\,]-3\,,+3[$ tê daraştin.



- **Têbînî**

Hinek xwendekar di navbera têkiliya navxweyî û fonkisyona navxweyî de şaş dibin, piraniya têkiliyên navxweyî bêtirî fonkisyoneke diyar digire.

Mînak: Em daraştiya têkiliya navxweyî ya li jêr bibînin:

$$x^3 + y^2 - 7x + 5y = 8$$

Em daraştina her du aliyên hevkêşeyê li gorî x çêkin bi derbaskirina berbiçav ku y girêdayî nenasa x ye û tê daraştin.

$$3x^2 + 2yy' - 7 + 5y' = 0 \Longrightarrow 2yy' + 5y' = 7 - 3x^2$$

$$\Longrightarrow (2y + 5)y' = 7 - 3x^2$$

$$\Longrightarrow y' = \frac{7 - 3x^2}{2y + 5} \quad : \quad y \neq \frac{-5}{2}$$

Daraştiyên jorîn ji fonkisyonan re:

Heger fonkisyona $y = f(x)$ li gorî x bê daraştin, wê demê daraştiya wê ya yekem $y' = f'(x)$ ye û ev fonkisyoneke nû nîşan dide.

Heger daraştiya yekem bê daraştin li gorî x wê demê daraştiya wê ya duyem dibe $y'' = f''(x)$

Bi dubarekirina bikaranîna daraştinê em daraştiya sêyem y''' bi dest dixin û hwd.

Ji destpêka daraştiya duyem, daraştiyên fonkisyonê bi navê daraştiyên jorîn tên nasîn.

Mînak: Em her sê daraştiyên destpêkê ji fonkisyona li jêr re bibînin:

$$y = 2x^4 + 3x - 5$$

$$y' = 8x^3 + 3$$

$$y'' = 24x^2$$

$$y''' = 48x$$

Pêkanînên daraştiyê

1- Bikaranîna daraştiyan di lêkolîna guhartinên fonkisyonê de:

Heger fonkisyona f di navberekê de bê daraştin, wê demê:

- **Mercê pêwîst û têr ji bo ku f di navberekê de tam zêdeker be, divê di heman navberê de $f'(x) > 0$ be û di tu navberên binkomikên wê de nebe sifir.**
- **Mercê pêwîst û têr ji bo ku f di navberekê de tam kêmker be, divê di heman navberê de $f'(x) < 0$ be û di tu navberên binkomikên wê de, nebe sifir.**
- **$f'(x) = 0$ wê demê fonkisyon f neguhêr e**

Mînak: **Em guhartina fonkisyona $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ya di $\mathbb{R}$ de, pênasekirî lêkolîn bikin:**

Fonkisyona f di $\mathbb{R}$ de, tê daraştin:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow 3(x + 1)(x - 1) = 0$$

Yan: $x = 1$ yan jî: $x = -1$

$$f(1) = 0 \quad , \quad f(-1) = 4$$

Em hêmaya $f'(x)$ li cem van xalan bibînin:

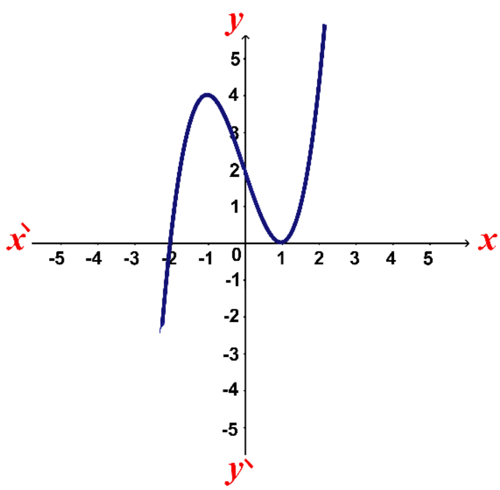
x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Em dibînin:

f di $]-\infty,-1[$ de, tam zêdeker e.

f di $]-1,+1[$ de, tam kêmker e.

f di $]+1,+\infty[$ de, tam zêdeker e.



2- Tekezkirina newekheviyan:

Ji bo tekezkirina rastiya newekheviyeke hatî dayîn, em hemû pêkhateyên wê bibin aliyekî tenê, wê demê newekhevî van teşeyan dide:

$$f(x) < 0 \quad , \quad f(x) \leq 0 \quad , \quad f(x) > 0 \quad , \quad f(x) \geq 0$$

Piştre em ê guhartina fonkisyona ji vê newekheviyê çêbûyî, lêkolîn bikin.

Mînak: Em tekez bikin ku $\forall\ x \in]0, +\infty[$ wê demê: $\ln x < x$
piştre $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$ encamê bigirin:

Newekhevî vî awayêli jêr dibe:

$$x - \ln x > 0$$

Em guhartina fonkisyona li jêr lêkolîn bikin:

$$f(x) = x - \ln x$$

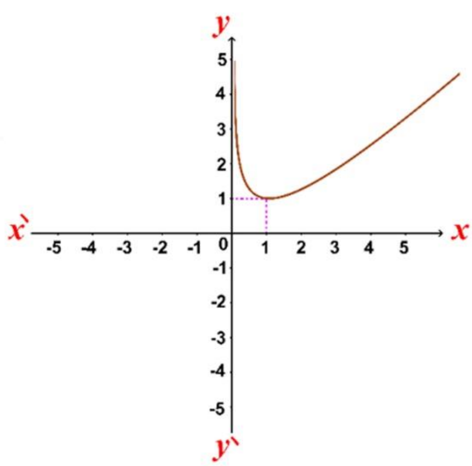
Fonkisyon di $]0\ , +\infty[$ de pênasekirî, domdar û tê daraştin.

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \ \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 1 - ln(1) = 1 - 0 = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	



Em ji tabloyê dibînin ku $\forall\ x \in]0, +\infty[$ wê demê: $f(x) \geq 1$

Ango $f(x) > 0 \Rightarrow x - ln(x) > 0 \Rightarrow ln(x) < x$

Em dizanin ku dema ku $x > 1$ be, wê demê $ln(x) > 0$ û ji newekheviya çûyî em dibînin ku:

$$ln(x) < x \Rightarrow 0 < ln(x) < x$$

Em dizanin ku dema ku $x < 1$ be, wê demê:

$$\sqrt{x} > 1 \Rightarrow 0 < ln(\sqrt{x}) < \sqrt{x} \Rightarrow 0 < ln\,(x)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2} ln\,(x) < \sqrt{x}$$

Bi hevdana her du aliyan bi hejmara (2):

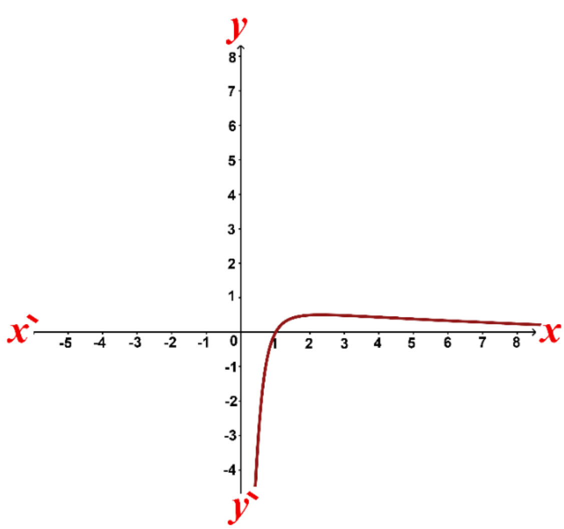
$$\Rightarrow 0 < ln\,(x) < 2\sqrt{x}$$

Bi parvekirina her du aliyan li x li gorî ku $x > 0$ be:

$$\Rightarrow 0 < \frac{ln\,(x)}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{ln\,(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Ji ber ku $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{2}{\sqrt{x}}) = 0$ wê demê: $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{ln\,(x)}{x}) = 0$



Lêkolîna guhartinên fonkisyoneke hejmarî

1. Em komika pênaseyê bi awayê navberan binivîsînin.

2. Em li cem aliyên navberên vekirî, li dawiyan bigerin û li cem navberên girtî, li nirxan bigerin.

3. Em rastekên nêzîker ên rastênhevî tewareyan bibînin, heger hebin.

4. Em daraştina fonkisyonê çêkin û tabloyekê ji lêkolîna guhartinên wê çêkin.

Mînak: **Heger C xêzika girafîkî ji fonkisyona f re be ya di $\mathbb{R}$ de, pênasekirî li gorî: $f(x) = x^2 - 4x$**

Em guhartinên fonkisyona f lêkolîn bikin:

Fonkisyona f di navbera $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ de pênasekirî, domdar û tê daraştin.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (-\infty)^2 = +\infty$$

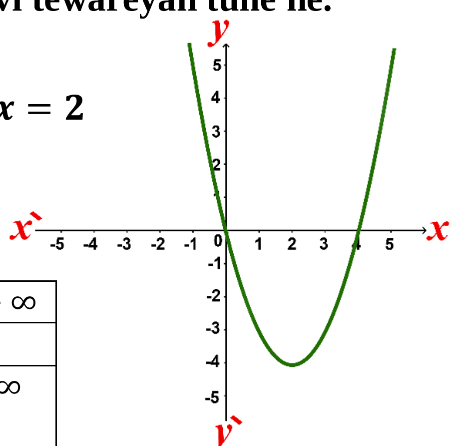
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty)^2 = +\infty$$

Rastekên nêzîker ên rastênhevî tewareyan tune ne.

$f'(x) = 2x - 4$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$

$f(2) = (2)^2 - 4(2) = -4$



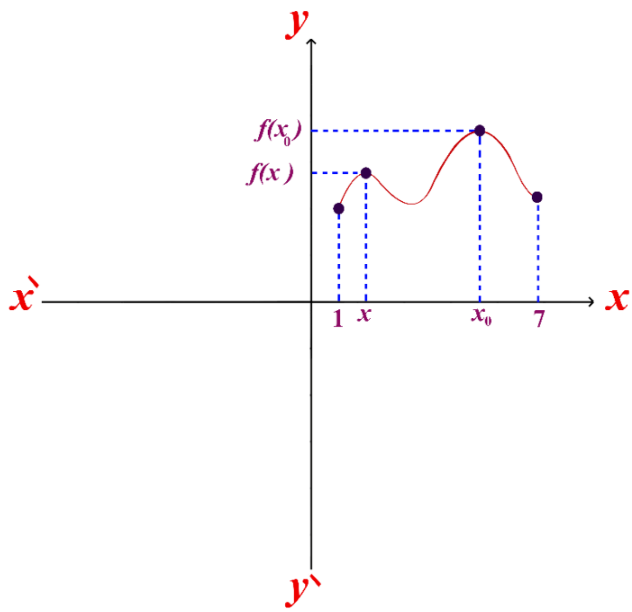
x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

3- Mezintirîn nirx – biçûktirîn nirxên giştî ji fonkisyonê re:

Heger f fonkisyoneke di $\mathbb{R}$ de pênasekirî be:

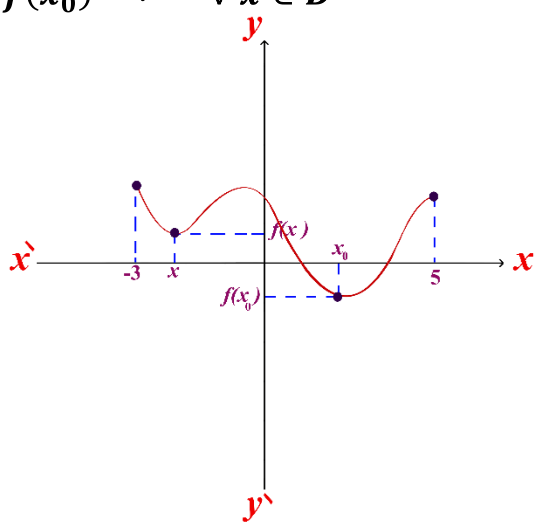
- **Em ji $f(x_0)$ re dibêjin mezintirîn nirxê giştî ji fonkisyonê re, heger tenê:**

$$f(x) \leq f(x_0) \quad : \quad \forall\, x \in D$$



- **Em ji $f(x_0)$ re dibêjin biçûktirîn nirxê giştî ji fonkisyonê re, heger tenê:**

$$f(x) \geq f(x_0) \quad : \quad \forall\, x \in D$$



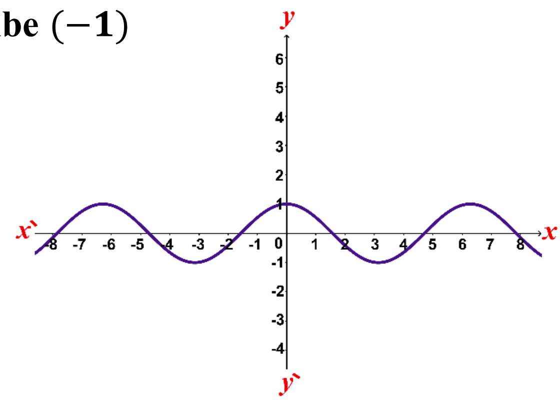
Mînak 1: Heger fonkisyona f di $\mathbb{R}$ de pênasekirî be li gorî:

$$f(x) = \cos(x)$$

Em mezintirîn û biçûktirîn nirxê giştî ji fonkisyonê re bibînin: Em dizanin ku:

$$-1 \leq \cos(x) \leq +1 \Rightarrow \cos(\pi) \leq \cos(x) \leq \cos(0)$$

Ji ber vê yekê mezintirîn nirxê giştî ji fonkisyonê dibe (1) û biçûktirîn nirxê giştî dibe (-1)



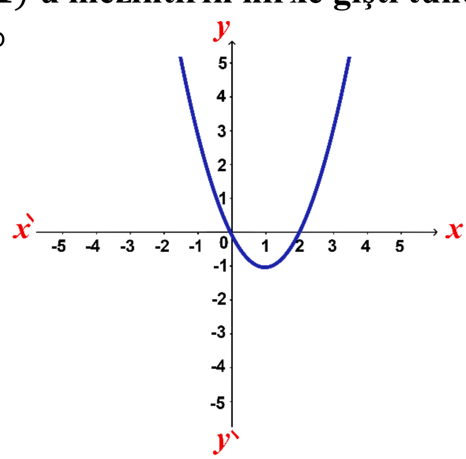
Mînak 2: Heger fonkisyona f di $\mathbb{R}$ de, pênasekirî be li gorî:

$$f(x) = x^2 + 2x$$

Em mezintirîn û biçûktirîn nirxê giştî ji fonkisyonê re bibînin, heger hebin:

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1) - 1 = (x+1)^2 - 1 \geq -1 = f(-1)$$

Biçûktirîn nirxê giştî dibe (-1) û mezintirîn nirxê giştî tune ye ji ber ku: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Mînak 3: Heger fonkisyona f di $[-2, +2]$ de, pênasekirî be li gorî: $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Em mezintirîn û biçûktirîn nirxê giştî ji fonkisyonê re bibînin, heger hebin:

Em guhartinên fonkisyonê lêkolîn bikin:

$$f(-2) = 0 \qquad , \qquad f(2) = 0$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Paran pozîtîv e, ji ber vê yekê hêmaya f' heman hêmaya parê ye:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \sqrt{4 - 0} = 2$$

Fonkisyon di $]-2\,, +2[$ de, tê daraştin.

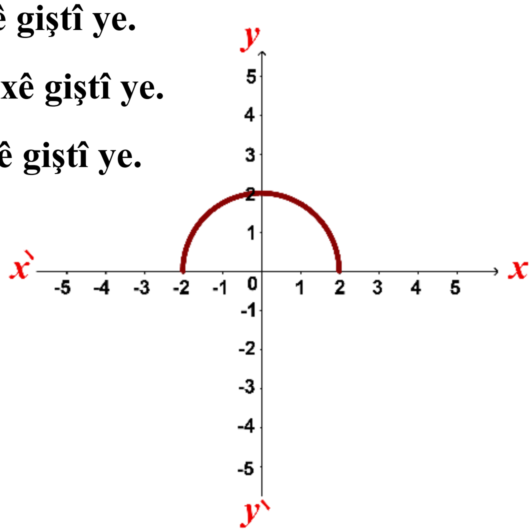
x	-2		0		$+2$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Em dibînin ku:

$f(2) = 0$ biçûktirîn nirxê giştî ye.

$f(-2) = 0$ biçûktirîn nirxê giştî ye.

$f(0) = 2$ mezintirîn nirxê giştî ye.



- **Têbînî**

Heger $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ be, wê demê ji fonkisyonê re mezintirîn nirxê giştî tune ye.

Di heman demê de, heger $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ be, wê demê ji fonkisyonê re biçûktirîn nirxê giştî tune ye.

Mînak 4: **Heger fonkisyona f di $\mathbb{R}$ de, pênasekirî be li gorî:**

$$f(x) = x + 2\, sin(x)$$

Em mezintirîn û biçûktirîn nirxê giştî ji fonkisyonê re bibînin, heger hebin:

Çare:

Em dibînin ku çiqasî $x \in \mathbb{R}$ be, wê demê: $f(x) \geq x - 2$

Ango: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ Ji ber ku: $\lim_{x \to +\infty} (x - 2) = +\infty$

Ji fonkisyona f re mezintirîn nirxê giştî tune ye.

Ji aliyekî din ve çiqasî $x \in \mathbb{R}$ be, wê demê: $f(x) \leq x + 2$

Ango: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ji ber ku: $\lim_{x \to -\infty} (x + 2) = -\infty$

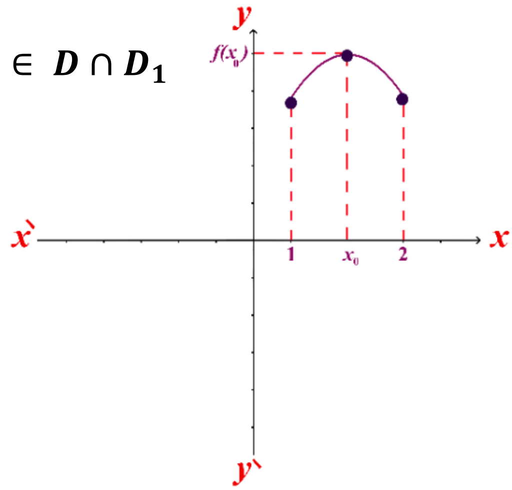
Ji fonkisyona f re biçûktirîn nirxê giştî tune ye.

4- Mezintirîn nirx û biçûktirîn nirxên herêmî ji fonkisyonê re:

Heger f fonkisyoneke di D de, pênasekirî be û $x_0 \in D$ be:

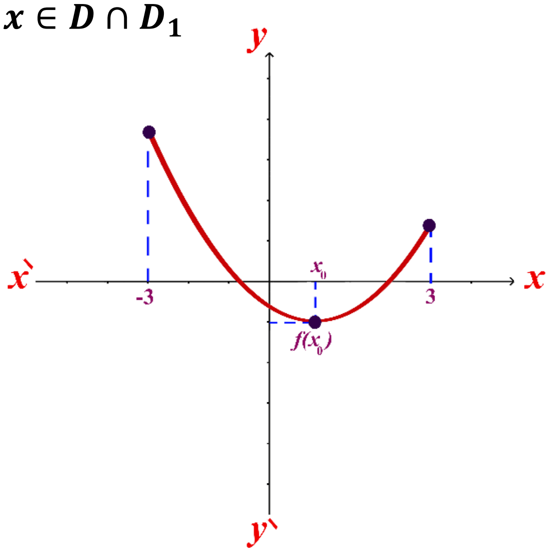
- **Em ji $f(x_0)$ re dibêjin mezintirîn nirxê herêmî ji fonkisyonê re heger tenê navbereke vekirî D_1 hat dîtin ku x_0 bigire li gorî:**

  $$f(x) \leq f(x_0) : \forall\, x \in D \cap D_1$$



- **Em ji $f(x_0)$ re dibêjin biçûktirîn nirxê herêmî ji fonkisyonê re, heger tenê navbereke vekirî D_1 hat dîtin ku x_0 bigire li gorî:**

  $$f(x) \geq f(x_0) \;:\; \forall\, x \in D \cap D_1$$



- **Têbînî**

1. Her mezintirîn nirxekî giştî, mezintirîn nirxekî herêmî ye û her biçûktirîn nirxekî giştî, biçûktirîn nirxekî herêmî ye.

2. Dema ku fonkisyona f di navbereke vekirî de , tam zêdeker an jî tam kêmker be, wê demê ji fonkisyonê re di heman navberê de, mezintirîn nirxên herêmî û biçûktirîn nirxên herêmî tune ne.

Mînak: Em mezintirîn û biçûktirîn nirxên herêmî ji fonkisyona li jêr re bibînin:

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$$

Çare:

Fonkisyon di $\mathbb{R} =]-\infty , +\infty[$ de, pênasekirî, domdar tê daraştin.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x^2 - 4x + 3)$$

$$= -3(x - 3)(x - 1)$$

Dema ku $f'(x) = 0$ be, wê demê: $x = 3$ yan jî: $x = 1$

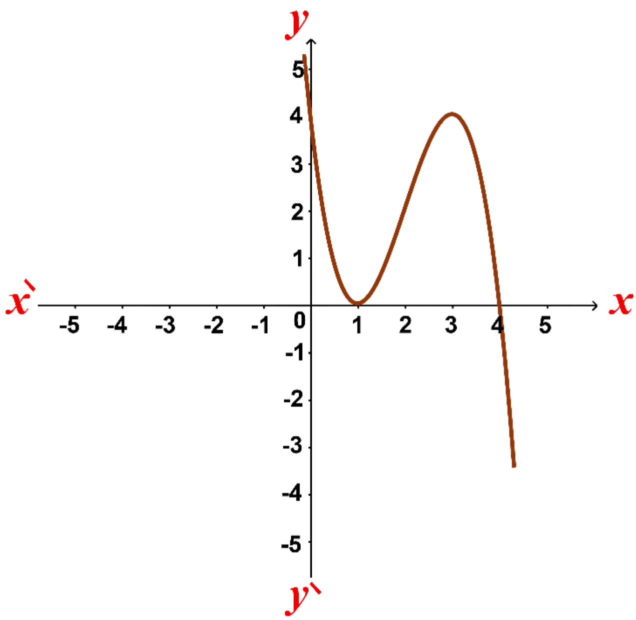
$$f(3) = 4 \qquad , \qquad f(1) = 0$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Em dibînin ku:

$\boldsymbol{f(1) = 0}$ **biçûktirîn nirxê herêmî ye.**

$\boldsymbol{f(3) = 4}$ **mezintirîn nirxê herêmî ye.**



- **Teorî**

Heger $\boldsymbol{f}$ di $\boldsymbol{D}$ de, fonksiyoneke pênasekirî be û $\boldsymbol{x_0 \in D}$ be û heger $\boldsymbol{]a\,,b[}$ navbereke vekirî be û $\boldsymbol{x_0}$ endamê wê be û binkomika $\boldsymbol{D}$ be û heger $\boldsymbol{f}$ di navbera $\boldsymbol{]a\,,b[}$ de, daraştî be:

a) **Dema ku $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ be: $\boldsymbol{x \in]a, x_0[}$ be û heger $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ be: $\boldsymbol{x \in]x_0, b[}$ be, wê demê $\boldsymbol{f(x_0)}$ mezintirîn nirxê herêmî ji $\boldsymbol{f}$ re ye.**

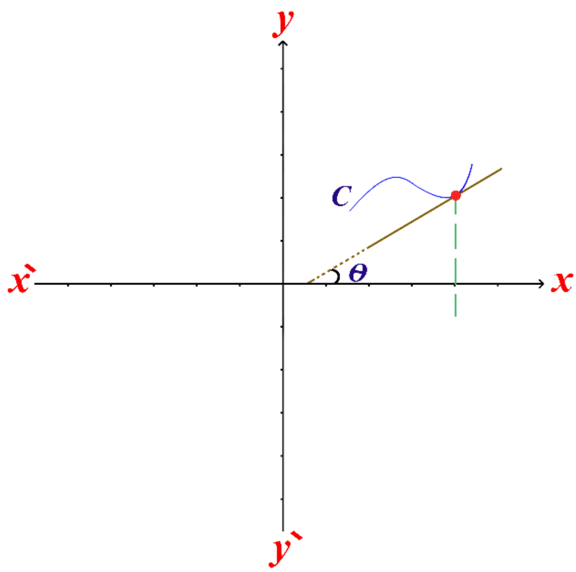
b) **Dema ku $\boldsymbol{f'(x) < 0}$ be: $\boldsymbol{x \in]a, x_0[}$ be û heger $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ be: $\boldsymbol{x \in]x_0, b[}$ be, wê demê $\boldsymbol{f(x_0)}$ biçûktirîn nirxê herêmî ji $\boldsymbol{f}$ re ye.**

5- Hevkêşeyên pêvek û tîk ji xêzika pêldayî re:

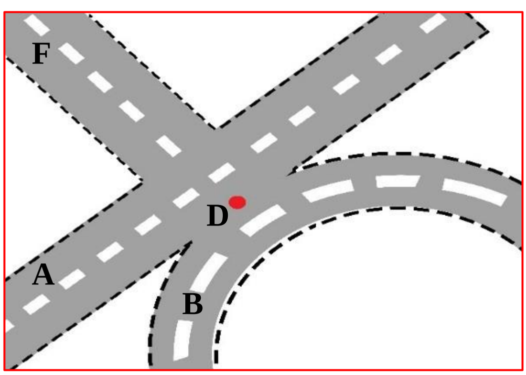
Em dizanin ku xwariya pêvekê ji xêzika pêldayî C re ji fonkisyona f re li cem xalekê x_0 yeksanî daraştiya fonkisyonê li cem wê xalê ye.

Heger (m) xwariya pêvekê be, wê demê: $m = f'(x_0)$

Heger du tewareyên tîk hebin, wê demê xwariya pêvekê dibe $tan\ (\theta)$ ya ku pêvek bi aliyê pozîtîv ê tewareya $x'x$ çêdike.



Mînak: **Teşeya li jêr sê rêyên A, B, F diyar dike, rêyek (A) rastek e û ya din jî (B) pêldayî ye, di xalekê de (D) digihêjin hev û rêya sêyem (F) tîk e.**



Heger $(x_0\,,y_0)$ xala (D) di kordînata tîk de, nîşan bike û (m) xwariya rasteka pêvekê ji C re li cem vê xalê be, wê demê hevkêşeya pêvekê ev e: $y - y_0 = m(x - x_0)$

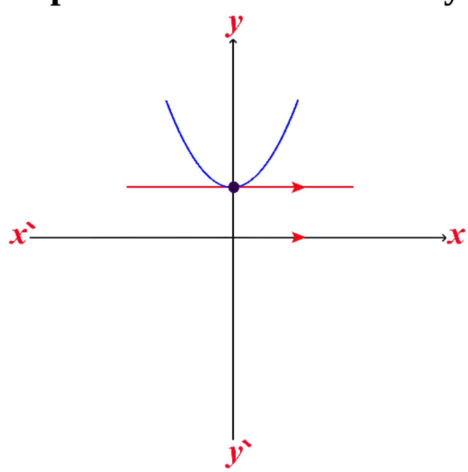
Lê hevkêşeya rasteka li ser pêvekê tîk, li cem wê xalê ev e:

$$y - y_0 = \frac{-1}{m}(x - x_0)$$

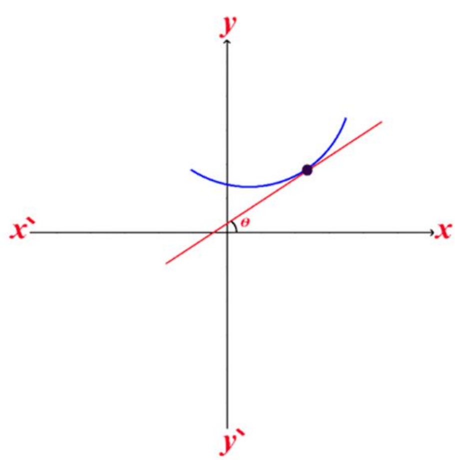
- **Têbînî**

1. Heger $m = f'(x_0) = 0$ be li cem xalekê li ser C wê demê

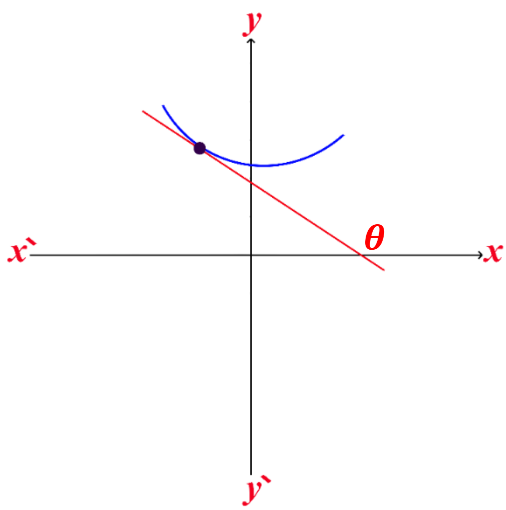
$tan\ (\theta) = 0$ û pêveka C rastênhevî $x'x$ ye û vajî jî rast e.



2. Heger $m = f'(x_0) > 0$ be li cem xalekê li ser C wê demê $tan\ (\theta)$ pozîtîv e û ev tê wateya ku pêvek bi rastênhevî $x'x$ re, goşeyeke teng çêdike û vajî jî rast e.



3. Heger $m = f'(x_0) < 0$ be li cem xalekê li ser C wê demê $tan\ (\theta)$ negetîv e û ev tê wateya ku pêvek bi rastênhevî $x'x$ re, goşeyeke fireh çêdike û vajî jî rast e.



Mînak: Heger C xêzika girafîkî ji fonkisyona li jêr re be ya di $\mathbb{R}$ de pênasekirî: $f(x) = x^2 + 2x + 1$

Em hevkêşeya pêvek û tîka li ser wê ji C re di xala $M(2\ , y)$ de, bibînin:

Çare:

Em $x = 2$ di hevkêşeyê de, bi cih bikin:

$$f(2) = (2)^2 + 2(2) + 1 = 4 + 4 + 1 = 9$$

Xala pêvekirinê: $M(2\ , 9)$

Em daraştina fonkisyonê çêkin: $f'(x) = 2x + 2$

Em nirxê daraştiyê li cem xala pêvekirinê bibînin:

$$m = f'(x) = 2(2) + 2 = 6$$

Hevkêşeya pêvekê: $y - y_0 = m(x - x_0)$

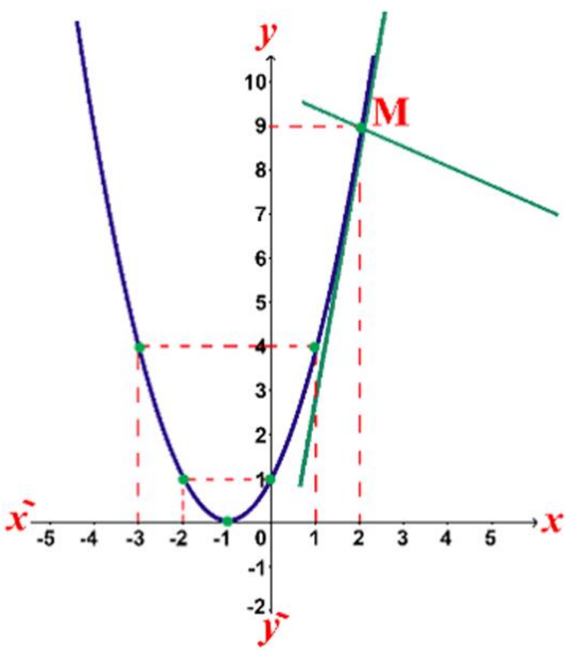
$$\Rightarrow y - 9 = \frac{-1}{6}(x - 2) \Rightarrow y = 6x - 3$$

Hevkêşeya tîka li ser pêvekê:

$$y - y_0 = \frac{-1}{m}(x - x_0) \Rightarrow y - 9 = \frac{-1}{6}(x - 2)$$

$$\Rightarrow 6y - 54 = -x + \Rightarrow x + 6y - 56 = 0$$

x	0	1	-1	2	-2	-3
$f(x)$	1	4	0	9	1	4



HÎNDARÎ

1. Em daraştina fonkisyonê li cem sifirê bi rêya pênaseya fonkisyona daraştî lêkolîn bikin:

$$f(x) = 7x^3 - 5$$

2. Em daraştiyên fonkisyonên li jêr bi rêya rêgezên daraştinê bibînin:

- $f(x) = x\sqrt{x} + 6$
- $f(x) = \frac{5}{3x-1}$
- $f(x) = (2x+3)\sqrt{x^5}$
- $f(x) = \frac{e^x - 1}{ln\,(x)}$

3. Em fonkisyona daraştî ji fonkisyonên li jêr re bibînin:

- $f(x) = x\,sin\,(x)$
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$
- $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
- $f(x) = 2x\,.\sqrt{x}$

4. Fonkisyonên li jêr di xala (a) de, tên daraştin an na?

- $f(x) = \sqrt{x}$ **dema ku** $a = 0$
- $f(x) = x^2 - 4x + 7$ **dema ku** $a = 1$
- $f(x) = x\sqrt{x}$ **dema ku** $a = 0$

5. Em daraştiyên fonkisyonên li jêr bibînin:

- $f(x) = (6x-5)^4$
- $f(x) = ln^2\,(x^2 - 4)$
- $f(x) = ln\,(e^{2x} + 1)$
- $3xy + y^2 = x^2 - 7$

6. Em her sê daraştiyên destpêkê ji fonkisyona li jêr re bibînin:

$$y = x^4 - 2x^2 + 5$$

7. Heger C xêzika girafîkî ya fonkisyona f di $]3 , +\infty[$ de be li gorî:

$$f(x) = \sqrt{x - 3}$$

- Em fonkisyona daraştî ji fonkisyona f re bibînin.

- Em hevkêşeya pêvekê T ji xêzika girafîkî C re di xala $M\ (1 , y)$ de bibînin.

- Em hevkêşeya tîk a li ser pêvekê bibînin.

8. Em guhartina fonkisyona f ya li jêr lêkolîn bikin:

$$f(x) = x + 2\ sin\ (x) \qquad : \qquad 0 < x < 2\pi$$

Piştre em tabloyekê çêkin û xêzika girafîkî xêz bikin.

9. Heger C xêzika girafîkî ya fonkisyona f di $\mathbb{R}$ de, be li gorî:

$$f(x) = e^x - x$$

Em guhartinên vê fonkisyonê lêkolîn bikin.

10. Heger C xêzika girafîkî ya fonkisyona f di $]0 , +\infty[$ de be li gorî:

$$f(x) = x\ .\ ln\ (x)$$

Em guhartinên vê fonkisyonê lêkolîn bikin.

11. Heger C xêzika girafîkî ya fonkisyona f di $\mathbb{R}$ de, be li gorî:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} - 1$$

Em guhartinên fonkisyona f lêkolîn bikin û binêrin ku mezintirîn an jî biçûktirîn nirxên herêmî hene yan na û piştre xêzika wê ya girafîkî xêz bikin.

12. Heger C xêzika girafîkî ya fonkisyona f di $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ de, be li gorî:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

- Em her rastekeke nêzîkera xêzika C ya rastêhevî $x'x$ yan jî $y'y$ encamê bigirin.

- Em guhartinên fonkisyona f lêkolîn bikin û tabloyekê çêkin û encamê bigirin ku mezintirîn an jî biçûktirîn nirxên herêmî hene yan na û piştre xêzika wê ya girafîkî xêz bikin.

13. Heger C xêzika girafîkî ya fonkisyona f di $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ de be li gorî:

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

- Em dawiyên fonkisyonê li cem aliyên komika pênaseyê bibînin û piştre rastekên nêzîker ji C re encamê bigirin.

- Em guhartinên fonkisyona f lêkolîn bikin û tabloyekê çêkin û piştre bibînin ku mezintirîn an jî biçûktirîn nirxên herêmî hene yan na.

WANEYA SÊYEM: FONKISYONA RESEN Û ÎNTEGRAL

Fonkisyona resen: Heger f di $I \subseteq \mathbb{R}$ de, fonksiyonek be, em ji F re dibêjin fonksiyona resen a f ye di I de, heger tenê:

- **F di I de daraştî be.**
- $\forall\, x \in I \implies F'(x) = f(x)$

Mînak: Em fonkisyona resen ji fonkisyonên li jêr re bibînin:

$$f(x) = 2x + 2 \implies F(x) = x^2 + 2x + C$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} \implies F(x) = \sqrt{x^2 + 4} + C$$

$$f(x) = \cos x \implies F(x) = \sin x + C$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \implies F(x) = -\frac{1}{x^2} + C$$

- **Teorî**

Heger F di $I \subseteq \mathbb{R}$ de ji f re fonksiyona resen be, wê demê:

Komika fonkisyonên resen di I de, ji fonksiyona f re bi vî awayî ne:

$$x \to F(x) + C$$

Li gorî ku C neguhêrek e û ew komikeke bêdawî ye, nirxê her fonkisyoneke resen ji ya din li gorî nirxê C cuda ye.

Fonkisyonên resen ji hinek fonkisyonên navdar re

$f(x)$	$F(x)$
0	C
$a \quad : a \in \mathbb{R}^*$	$ax + C$
$x^n \quad : \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n} \quad : \quad n \in \mathbb{N}^*/\{1\}$	$\frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$
$\sin x$ $\sin(ax+b) \quad : \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$	$-\cos x + C$ $-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\cos x$ $\cos(ax+b) \quad : \quad a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$	$\sin x + C$ $\frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

- **Teorî**

Heger F û G di I de, du fonksiyonên resen ên f û g bin, wê demê $F + G$ di I de, fonksiyona resen a $f + g$ ye.

Heger F di I de, fonksiyoneke resen a f be, λ hejmareke rast be, wê demê λF di I de, fonksiyona resen a λf ye.

Mînak: **Em fonkisyonên resen di I de ji her du fonkisyonên li jêr e, bibînin:**

1) $f(x) = \frac{1}{x^3} \qquad I =]-\infty, 0[$

$$F(x) = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2x^2} + C$$

2) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2} \qquad I =]0, +\infty[$

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2} = x^3 - x^{-2} \Rightarrow F(x) = \frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{x^{-2+1}}{-2+1}$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{x} + C$$

Hinek rewşên taybet

Fonksiyon $f(x)$	Fonksiyona resen $F(x)$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+C$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)+C \quad : \quad u\in]0,+\infty[$ $\ln(-u)+C \quad : \quad u\in]-\infty,0[$
$u'e^u$	e^u+C
$u'\sin u$	$-\cos u+C$
$u'\cos u$	$\sin u+C$

Mînak: **Em fonkisyonên resen ji fonkisyonên li jêr re di navberên diyarkirî de, bibînin:**

1) $f(x)=(x-2)(x^2-4x+5)^3 \qquad I=\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{2}{2}(x-2)(x^2-4x+5)^3$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\frac{(x^2-4x+5)^{3+1}}{4}=\frac{1}{8}(x^2-4x+5)^4+C$$

2) $f(x)=\frac{2}{x-5} \qquad I=]-\infty,5[$

$$f(x)=2\times\frac{1}{x-5}$$

$$F(x)=2\ln(5-x)+C$$

3) $f(x)=xe^{x^2} \qquad I=\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{2}{2}xe^{x^2}$$

$$F(x)=\frac{1}{2}e^{u(x)}+C=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

Întegrala bêsînor

Heger f di $I \subseteq \mathbb{R}$ de fonksiyoneke domdar be, wê demê komika fonksiyonên resen jê re di I de, bi vî awayî ye:

$$F(x) + C$$

Bi navê întegrala bêsînor tê naskirin.

Bi sembola $\int f(x)dx = F(x) + C$ tê nîşankirin

Em ji $\int$ re dibêjin hêmaya întegralê.

Em ji f re dibêjin fonkisyona întegralkirî.

Em ji x re dibêjin guhêra întegralê

Em ji F re dibêjin fonkisyona resen.

Em ji C re dibêjin neguhêra întegralê.

Em ji $d(x)$ re dibêjin navîniya guhartina fonkisyonê.

Mînak: Em întegrala fonkisyonên li jêr bibînin:

$$\int 5x^4dx = x^5 + C$$

$$\int 3e^{3x}dx = e^{3x} + C$$

$$\int e^{7x}dx = \frac{1}{7}e^{7x} + C$$

Rêgezên întegrala bêsînor ji hinek fonkisyonên navdar re

1) Întegrala hejmara neguhêr:
Heger a hejmarek neguhêr be, wê demê:

$$\int a\,dx = ax + C$$

Mînak: **Em întegrala li jêr bibînin:**

$$\int 5dx = 5x + C$$

2) Întegrala fonkisyona bihêz:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad : \quad n \neq -1$$

Mînak: **Em întegrala li jêr bibînin:**

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{1}{4}x^4 + C$$

3) $\int a\,.\,f(x)\,.\,dx = a\int f(x)\,.\,dx$

Mînak: **Em întegrala li jêr bibînin:**

$$\int 7x^4\,.\,dx = 7\int x^4\,.\,dx = 7\frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{7}{5}x^5 + C$$

4) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,.\,dx + \int g(x)\,.\,dx$

Mînak: **Em întegrala li jêr bibînin:**

$$\int (x^2 - 2x + 5)dx = \int x^2 dx - \int 2xdx + \int 5dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x + C$$

5) $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1).a} + C$

Mînak: **Em întegrala li jêr bibînin:**

$$\int (3x-7)^4 dx = \frac{(3x-7)^5}{(5).(3)} + C = \frac{(3x-7)^5}{15} + C$$

6) $\int \cos(ax+b)\ .dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

$\int \sin(ax+b)\ .dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

Mînak: **Em întegrala li jêr bibînin:**

$$\int \cos(9x)\, dx = \frac{1}{9}\sin(9x) + C$$

7) Heger u li gorî x fonksiyonek daraştî be û $n \neq -1$ be, wê demê:

$$\int u'\,.\,u^n\,.\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

Mînak: **Em întegrala li jêr bibînin:**

$$\int 6x^2(2x^3-6)^4\,.\,dx = \frac{(2x^3-6)^5}{5} + C$$

8) Heger u li gorî x fonksiyonek daraştî be, wê demê:

$$\int \frac{u'}{u}\,.\,dx = \ln|u| + C$$

Mînak: **Em întegrala li jêr bibînin:**

$$\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(2x^3+1)}{x^4+2x+1}dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^4+2x+1\right| + C$$

9) $\int u' e^u dx = e^u + C$

Mînak: **Em întegrala li jêr bibînin:**

$$\int 2x.\,e^{x^2+4}.\,dx = e^{x^2+4} + C$$

Întegrala biparçekirinê

Dîtina hin întegralan, bi awayê rasterast zehmet e, ji ber vê yekê pêdivî bi riyeke din ji bo dîtina encamên van întegralan heye.

Rêgeza giştî ji întegrala biparçrkirinê re:

Em dizanin ku: $(u\,.\,v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

Em her du aliyan întegral bikin:

$$u\,.\,v = \int u'.\,v\,.\,dx + \int u\,.\,v'.\,dx$$

Wê demê:

$$\int u\,.\,v'.\,dx = u\,.\,v - \int u'.\,v\,.\,dx + C$$

- **Têbînî**

Întegrala biparçekirinê, ji bo hevdana du fonksiyonan tê bikaranîn.

Mînak 1: **Em întegrala li jêr bibînin:**

$$\int x.e^x\,dx$$

Heger $u = x \Longrightarrow u' = 1$

$v' = e^x \Longrightarrow v = e^x$

Wê demê:

$\int u.v'.dx = u.v - \int v.u'.dx$

$\int x.e^x.dx = x.e^x - \int e^x.(1)\,dx = x.e^x - e^x + C$

Mînak 2: **Em întegrala li jêr bibînin:**

$$\int x.\ln(x).dx$$

Heger $u = \ln(x) \Longrightarrow u' = \frac{1}{x}$

$v' = x \Longrightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$\int u.v'.dx = u.v - \int v.u'.dx$

$$\int x.\ln(x).dx = \frac{x^2}{2}.\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}.\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2}.\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C$$

Întegrala bisînor

Heger f di $[a, b]$ de fonksiyonek be û F di $[a, b]$ de fonksiyona resen a $f(x)$ be, wê demê:

$$\int_a^b f(x)\,.\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Mînak: Em întegrala li jêr bibînin:

$$\int_{-1}^{2} 3x^2.\,dx = [x^3]_{-1}^{2} = (2)^3 - (-1)^3 = 8 + 1 = 9$$

Taybetiyên întegrala bisînor

1) $\int_a^a f(x)\,.\,dx = 0$
2) $\int_a^b f(x)\,.\,dx = -\int_b^a f(x)\,.\,dx$
3) $\int_a^b kf(x)\,.\,dx = k\int_a^b f(x)\,.\,dx$
4) $\int_a^b f(x)\,.\,dx = \int_a^b f(t)\,.\,dt$
5) $\int_a^b f(x)\,.\,dx = \int_a^c f(x)\,.\,dx + \int_c^b f(x)\,.\,dx : a < c < b$
6) $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]\,.\,dx = \int_a^b f_1(x)\,.\,dx + \int_a^b f_2(x)\,.\,dx$

Mînak: Em întegralên li jêr bibînin:

1) $\int_1^2 x\,.\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

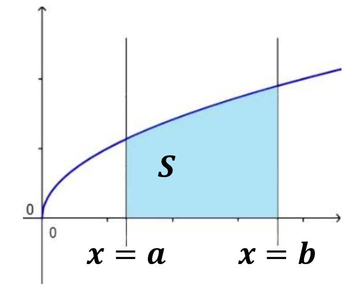
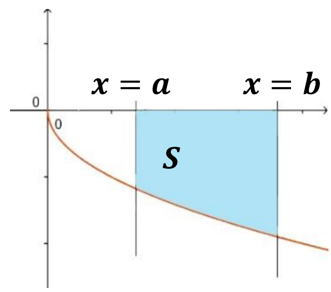
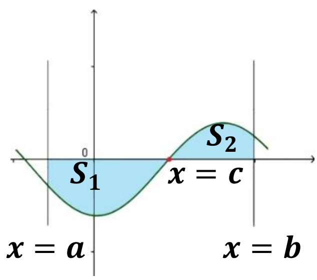
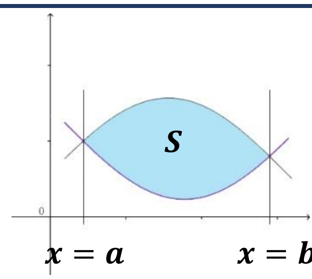
2) $\int_0^3 (x^3 - 4x + 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} + x\right]_0^3$
$= \frac{81}{4} - 18 + 3 = \frac{21}{4}$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = [\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

Pêkanînên întegrala bisînor

Dîtina rûbera ruyê teqaleyekê:

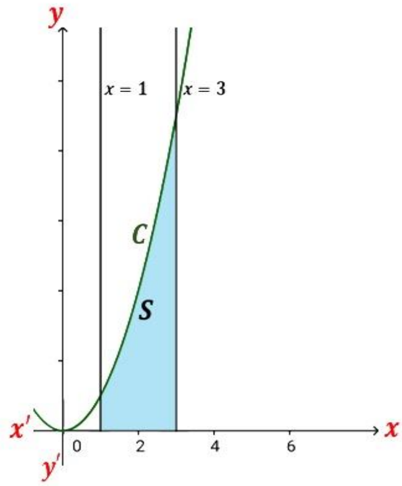
Zanyarê Birîtanî Barrow, bi armanca dîtina rûbera rûyê teqaleyeke bi grafîka fonksiyonan destnîşankirî, bingeha întegrala bisînor danî û çar rewş nîşan kir:

Rewş	Grafîk
Grafîka fonksiyonê C li jora $x'x$ e. Rêgez bi vî awayî ye: $S = \int_{a}^{b} f(x)\,.\,dx$	
Grafîka fonksiyonê C li jêra $x'x$ e. Rêgez bi vî awayî ye: $S = \int_{a}^{b} -f(x)\,.\,dx$	
Parçeyek ji grafîka fonksiyonê C li jora $x'x$ e û ya din li jêra $x'x$ e. Rêgez bi vî awayî ye: $S = -\int_{a}^{c} f(x)\,.\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,.\,dx$	
Rûber di navbera grafîka du fonksiyonan C_1, C_2 de ye. Li gorî ku C_1 jora C_2 ye. Rêgez bi vî awayî ye: $S = \int_{a}^{b} \left(f_1(x) - f_2(x)\right).\,dx$	

- **Têbînî**

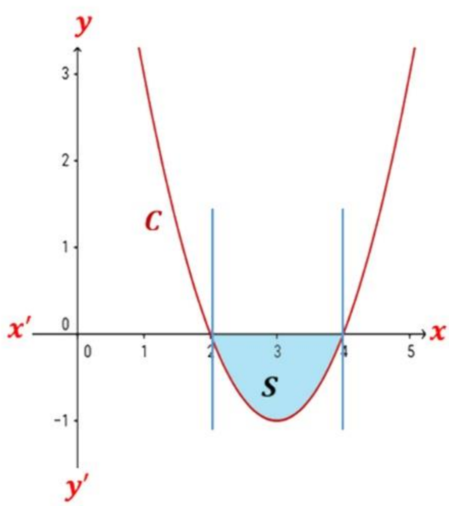
Piştî Barrow rewşên întegrala bisînor zêdetir bûn.

Mînak 1: **Heger $f(x) = x^2$ fonksiyonek be, em rûbera di navbera grafîka $f(x)$ û tewareya $x'x$ û her du rastekên $x = 1$, $x = 3$ de bibînin:**



$$S = \int_a^b f(x) \, . \, dx = \int_1^3 x^2 \, . \, dx = [\frac{x^3}{3}]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Mînak 2: **Heger $f(x) = x^2 - 6x + 8$ fonksiyonek be, em rûberê di navbera grafîka $f(x)$ û tewareya $x'x$ û her du rastekên $x = 2$, $x = 4$ de bibînin:**



$$S = \int_2^4 -f(x).dx = \int_2^4 -(x^2 - 6x + 8).dx$$

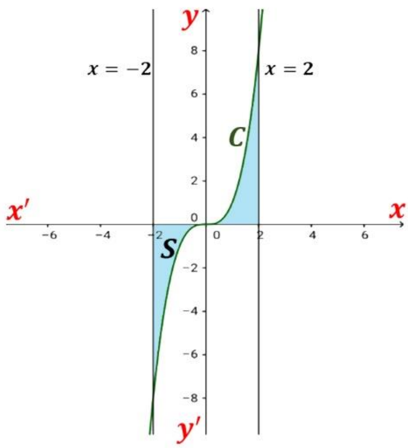
$$= [-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 8x]_2^4$$

$$S = \left(-\frac{4^3}{3} + 3(4)^2 - 8(4)\right) - \left(-\frac{2^3}{3} + 3(2)^2 - 8(2)\right)$$

$$= \left(-\frac{64}{3} + 48 - 32\right) - \left(-\frac{8}{3} + 12 - 16\right)$$

$$= -\frac{16}{3} + \frac{20}{3} = \frac{4}{3}$$

Mînak 3: **Heger $f(x) = x^3$ fonksiyonek be, em rûbera di navbera grafîka $f(x)$ û tewareya $x'x$ û her du rastekên $x = 2, x = -2$ de bibînin:**



$$S = \int_{-2}^{0} -f(x)\,.\,dx + \int_0^2 f(x)\,.\,dx$$

$$= \int_{-2}^{0} -x^3\,.\,dx + \int_0^2 x^3\,.\,dx$$

$$= [-\frac{x^4}{4}]_{-2}^{0} + [\frac{x^4}{4}]_0^2 = \frac{16}{4} + \frac{16}{4} = 8$$

Mînak 4: Heger $\boldsymbol{C_1}$ xêzika girafîkî ji fonkisyona $\boldsymbol{f_1}$ re be ya di $\mathbb{R}$ de pênasekirî li gorî $\boldsymbol{f_1(x) = -x^2 + 4x - 3}$ û heger $\boldsymbol{C_2}$ xêzika girafîkî ji fonkisyona $\boldsymbol{f_2}$ re be ya di $\mathbb{R}$ de pênasekirî li gorî $\boldsymbol{f_2(x) = x^2 - 4x + 3}$

Em rûbera ruyê di navbera $\boldsymbol{C_1}$ û $\boldsymbol{C_2}$ û her du rastekên li jêr de, bibînin: $\boldsymbol{x = 1}$, $\boldsymbol{x = 3}$

$$S = \int_1^3 [f_1(x) - f_2(x)] \, . \, dx$$

$$= \int_1^3 [-x^2 + 4x - 3 - x^2 + 4x - 3] \, . \, dx$$

$$= \int_1^3 [-2x^2 + 8x - 6] \, . \, dx$$

$$= [-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x]_1^3$$

$$= (-18 + 36 - 18) - \left(\frac{-2}{3} + 4 - 6\right) = -\left(\frac{-8}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

HÎNDARÎ

1. Em fonkisyonên resen ji fonkisyonên li jêr re li gorî navberên ji wan re destnîşankirî bibînin:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad : \quad I = \mathbb{R}^*$$

$$f(x) = sin^2(x) \quad : \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = cos\,(5x).\,sin\,(x) \quad : \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{2}{x} + 3 \quad : \quad I =]0\,,+\infty[$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad : \quad I =]1\,,+\infty[$$

2. Em întegralên li jêr bibînin:

$$\int 8e^{2x}.\,dx$$

$$\int \pi e^{x}.\,dx$$

$$\int -e^{-5x}.\,dx$$

$$\int sin\,(9x).\,dx$$

$$\int x^2\,.\,e^{x}.\,dx$$

3. Em întegralên bisînor ên li jêr bibînin:

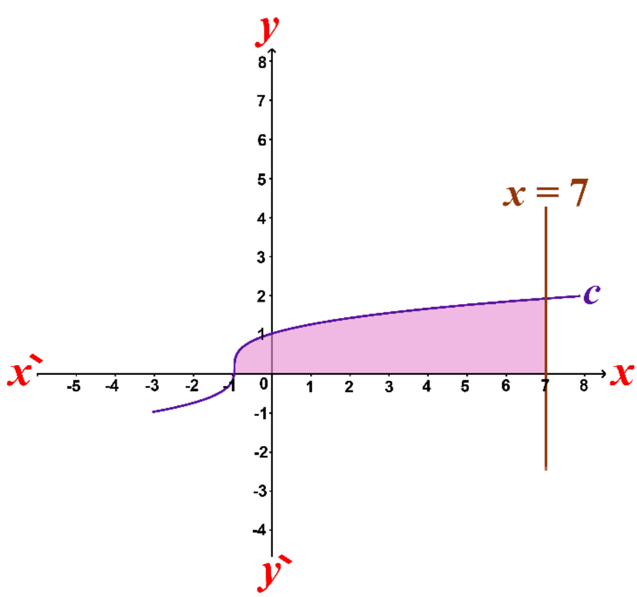
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}\ .dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} cos^2\,(\theta)\ .d\theta$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\ .dx$$

$$\int_{ln(2)}^{ln(3)} e^{2x}\ .dx$$

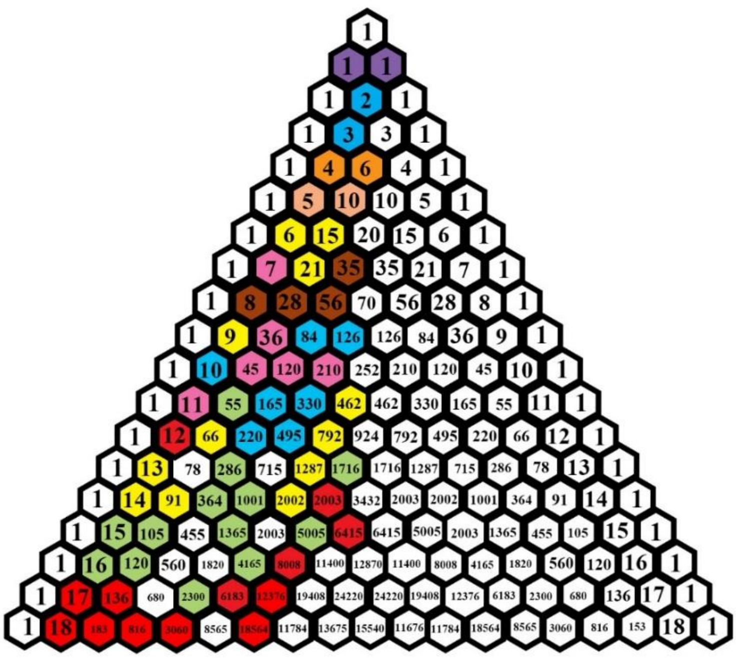
4. Heger $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ fonksiyonek be, em rûbera di navbera C û tewareya $x'x$ û rasteka $x = 7$ de bibînin:



BEŞA DUYEM: ANALÎZA LEVHATÎ

1. RÊBAZÊN HEJMARTINÊ

2. TEORIYA DUPÊKHATE



SÊGOŞEYA PASCAL

WANEYA YEKEM: RÊBAZÊN HEJMARTINÊ

Mijarên mîna rêbaza bingehîn di hejmartinê de, guhartin, levkirin û teoriya dupêkhate, mijarên bingehîn di cebirê de ne û bi zanistên din mîna fîzîk û kîmyayê ve tê girêdan.

Berê me ev têgîn bi kurtasî nas kiriye û di vê salê de, em ê van têgînan fireh bikin û di pêkanînên zanistî de sûdê jê bigirin.

1- Rêbaza bingehîn di hejmartinê de

Heger hejmara rêbazên qedandina karekî (n) rêbaz be û hejmara rêbazên qedandina karekî din (m) rêbaz be, wê demê hejmara rêbazên qedandina karê yekem û yê duyem yeksanî $(n \times m)$ ye.

Mînak: **Çend hejmarên ku ji du jimarên cuda yên endamên komika $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ pêkhatî, çêdibin?**

Hejmara rêbazên çêkirina yekan = 5

Hejmara rêbazên çêkirina dehan = 4

Her wiha hejmara rêbazên çêkirina hejmarên ji du jimarên cuda pêkhatî = $5 \times 4 = 20$

Niha em bihizirin dema ku jimar dubare bibin çend hejmarên ji du jimaran pêkhatî çêdibin.

Hejmara rêbazên çêkirina yekan = 5

Hejmara rêbazên çêkirina dehan = 5

Her wiha hejmara rêbazên çêkirina hejmarên ji du jimarên cuda pêkhatî = $5 \times 5 = 25$

Rewşeke taybet:

Heger hejmara rêbazên qedandina karekî (n) rêbaz be û hejmara rêbazên qedandina karekî din (m) rêbaz be, wê demê hejmara rêbazên qedandina karê yekem an jî yê duyem yeksanî $(n+m)$ rêbaz e.

Mînak: $A=\{1,2,3,5,4,6,8\}$ **komikeke tê de, 4 hejmarên cot û 3 hejmarên kit in.**

Em dixwazin hejmareke ji du jimarên cuda ji endamên vê komikê pêkhatî çêkin, li gorî ku hejmar tenê ji jimarên cot an jî kit pêk were.

- Heger hejmar ji jimarên cot tenê pêk were:

Hejmara rêbazên çêkirina yekan = 4

Hejmara rêbazên çêkirina dehan = 3

Hejmara hemû hejmaran = $4\times 3=12$

- Heger hejmar ji jimarên kit tenê pêk were:

Hejmara rêbazên çêkirina yekan = 3

Hejmara rêbazên çêkirina dehan = 2

Hejmara hemû hejmaran = $3\times 2=6$

Her wiha hejmara rêbazên çêkirina hejmareke ji du jimarên cuda pêkhatî, li gorî ku hejmar ji jimarên cot an jî kit tenê pêk were = $12+6=18$

Rahênan: Heger $A = \{0, 3, 4, 5, 7, 1, 6\}$ komikek be.

Em dixwazin hejmarên ku ji sê jimaran pêk tê di rewşên li jêr de, çêkin:

1. Jimarên hejmarê cuda ne.

2. Jimar wekhev in.

3. Hejmar ji jimarên tekane yan jî jimarên cot tenê pêk tê.

2- Guhartin

Heger $n\,, r$ du hejmarên tam û pozîtîv bin li gorî ku $n \geq r$ be, wê demê hejmara guhartinên ku her yek ji wan ji (r) tişt pêk were û ji nav (n) tişt hatibe birin û bi rêzkirin wiha ye:

$$P(n\,, r) = n\,(n-1)(n-2) \times \ldots \times (n-r+1)$$

Lê hejmara guhartinên (n) di navbera wan de, bi navê (n) faktorî ye û bi sembola $(n!)$ tê nîşankirin û rêgeza wê wiha ye: $P(n\,, n) = n! = n\,(n-1)(n-2) \times \ldots \times 1$

Ew rêgez wiha jî tê nivîsîn:

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)! \\ &= n(n-1)(n-2)! \\ &= n(n-1)(n-2)(n-3)! \end{aligned}$$

Têbînî: $0! = 1$ di heman demê de: $1! = 1$

Em dizanin ku :

$$1! = 1(1-1)!$$

$$1! = 1 \times 0!$$

$$0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Encam:

- $p(n\,,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
- $p(n\,,1) = n$
- $p(n\,,0) = 1$

Mînak 1: Em nirxên guhartinên li jêr bibînin:

- $p(8\,,2) = 8 \times 7 = 56$
- $p(6\,,6) = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

Mînak 2: Heger $p(3n-5\,,5) = p(7\,,5)$ be, em nirxê (n) bibînin:

$$3n - 5 = 7 \;\Longrightarrow 3n = 12 \;\Longrightarrow n = 4$$

Mînak 3: 10 lîstikvan tevlî pêşbirkeke bezînê bi dirêjahiya 100 m bûn, hejmara rêbazên rêzkirina her sê lîstikvanên biserketî çend e?

$$p(10\,,3) = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Ji ber ku rêzkirin girîng e û dubarekirin çênabe.

3- Levkirin

Heger $n\,,r$ du hejmarên tam û pozîtîv bin li gorî ku $n \geq r$ be, wê demê hejmara guhartinên ku her yek ji wan ji (r) tişt pêk were û ji nav (n) tişt hatibe birin bê rêzkirin wiha ye:

$$C(n\,,r) = \frac{p(n\,,r)}{r!} \qquad \text{yan jî} \qquad C(n\,,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Têbînî:

- $C(n\,,n) = C(n\,,0) = 1$
- $C(n\,,1) = n$
- $C(n\,,r) \leq p(n\,,r)$
- Heger $C(n\,,r) = C(n\,,m)$ be, wê demê $r = m$ yan jî $r + m = n$
- $C(n\,,r) = C(n\,,n - r)$

Mînak 1: Em encama levkirina li jêr bibînin:

$$C(8\,,3) = \frac{p(8\,,3)}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$$

Mînak 2: Heger $C(25\,,3n - 5) = C(25\,,2n)$ be, em nirxê (n) bibînin:

Yan: $3n - 5 = 2n \implies n = 5$ pêkhatî ye

Yan jî: $3n - 5 + 2n = 25 \implies 5n = 30 \implies n = 6$ ne pêkhatî ye.

Mînak 3: Di pirtûkxaneya dibistanekê de 15 pirtûkên dîrokê yên cur bi cur hene, bi çend rêbazan em dikarin 4 pirtûkan ji bo xwendinê bigirin?

$$C(15\,,4) = \frac{p(15\,,4)}{4!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1365$$

Ji ber ku rêzkirin ne girîng e û dubarekirin ji pirtûkê re tune ye.

Rahênan:

1. Em encamên bikaranînên li jêr bibînin:

$$p(6\,,2) \qquad\qquad C(7\,,5)$$

2. Em nirxê (n) bibînin:

$$C(25\,,2n-14) = C(25\,,n-1)$$

❖ **Rêgeza rêjedariyê**

$$\frac{C(n\,,r)}{C(n\,,r-1)} = \frac{n-r+1}{r}$$

Tekezkirin:

$$\ell_1 = \frac{C(n\,,r)}{C(n\,,r-1)} = \frac{\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}}{\dfrac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}}$$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \times \frac{(r-1)!\,(n-r+1)!}{n!}$$

$$= \frac{(r-1)!\,(n-r+1)!}{r(r-1)!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-r+1)!}{r(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-r+1)(n-r)!}{r(n-r)!}$$

$$= \frac{n-r+1}{r} = \ell_2$$

Mînak: Heger $\frac{C(n,6)}{C(n,5)}$ be, em $(n-2)!$ bibînin:

Li gorî rêgeza rêjedariyê:

$$\frac{n-6+1}{6}=\frac{1}{3}\Longrightarrow\frac{n-5}{6}=\frac{1}{3}\Longrightarrow n=7$$

Ji bo dîtina $(n-2)!$ em $n=7$ bi cih bikin:

$$(7-2)!=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$$

❖ Rêgeza komkirinê

$$C(n,r)+C(n,r-1)=C(n+1,r)$$

Tekezkirin:

$$\ell_1=C(n,r)+C(n,r-1)$$

$$=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$=\frac{n!}{r(r-1)!\,(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!\,(r-r+1)(r-r)!}$$

$$=\frac{(n-r+1)n!+r\,n!}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$=\frac{n!\,(n+1)}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$=\frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}$$

$$=C(n+1,r)=\ell_2$$

Mînak: Heger $C(n\,,3)+C(n\,,2)=56$ be, em nirxê (n) bibînin:

Li gorî rêgeza komkirinê:

$$C(n+1\,,3)=C(8\,,3)\Rightarrow n+1=8\ \Rightarrow n=7$$

❖ Hejmara rêbazên hilbijartina nimûneyekê bi vegerandin an jî bê vegerandin

Dema hilbijartina (r) tişt ji nav (n) tişt, em rewşên li jêr bibînin:

1. Heger hilbijartin bi vegerandin û rêzkirin be, wê demê hejmara rêbazên hilbijartinê = n^r

Mînak: Hejmara rêbazên çêkirina hejmareke ji sê jimaran pêk tê ji komika $\{1,2,3,4,7\}$ yeksanî:

$$n^r=5^3=5\times5\times5=125$$

2. Heger hilbijartin bê vegerandin û bi rêzkirin be, wê demê hejmara rêbazên hilbijartinê yeksanî: $p(n\,,r)$

Mînak: Hejmara rêbazên rawestina 4 tirimbêlan di qadeke rawestandinê de ku tê de 10 cih hene yeksanî:

$$p(10\,,4)=10\times9\times8\times7=5040$$

3. Heger hilbijartin bê vegerandin û bê rêzkirin be (nimûneyeke ketober), wê demê hejmara rêbazên hilbijartinê yeksanî: C (n, r)

Mînak 1: Hejmara rêbazên hilbijartina tîmeke ku ji 5 lîstikvanan pêk were ji nav 12 lîstikvanan yeksanî:

$$C(12\,,5)=\frac{p(12\,,5)}{5!}=792$$

Mînak 2: Di sindoqekê de 12 gogên sor û 8 gogên spî hene, em hejmara rêbazên kişandina 3 gogên sor û 2 gogên spî di rewşên li jêr de bibînin:

1. Heger kişandin bi vegerandin û rêzkirin be.

2. Heger kişandin bê vegerandin û bi rêzkirin be.

3. Heger kişandin bêvegerandin û bê rêzkirin be.

Çare:

1. Hejmara rêbazan:

$$n_1^{r_1} \times n_2^{r_2} = 12^3 \times 8^2 = 12 \times 12 \times 12 \times 8 \times 8$$

$$= 110\,592$$

2. Hejmara rêbazan:

$$p(12\,,3) \times p(8\,,2) = 12 \times 11 \times 10 \times 8 \times 7 = 73\,920$$

3. Hejmara rêbazan:

$$C(12\,,3) \times C(8\,,2) = \frac{p(12\,,3)}{3!} \times \frac{p(8\,,2)}{3!} = 6\,160$$

HÎNDARÎ

1. Heger $A = \{0, 3, 4, 5, 7, 9\}$ komikek be, em dixwazin hejmarine ku ji çar pêpilkn pêk tê, ji endamê vê komikê di rewşên li jêr de çêkin:

- Jimar cuda ne.

- Wekheviya jimaran çêdibe.

- Hejmar li 5 belav dibe.

2. Heger $p(n-4\ ,\ 9) = p(n-4\ ,\ 9)$ be, em nirxê (n) bibînin.

3. Heger $C(20\ ,3n-1) = C(20\ ,2n)$ be, em nirxê (n) bibînin.

4. Heger $\frac{C(n\ ,\ 4)}{C(n\ ,\ 3)} = \frac{1}{2}$ be, em $(n-1)!$ bibînin.

5. Heger $\frac{C(13\ ,\ r)}{C(13\ ,\ r+1)} = \frac{9}{5}$ be, em nirxê (r) bibînin.

6. Em nirxê $\frac{C(17\ ,\ 6)+C(17\ ,\ 5)}{C(18\ ,\ 5)}$ bibînin.

7. Heger $\frac{C(n\ ,\ 5)}{C(n\ ,\ 4)} = 3$ be, em nirxê (n) bibînin.

8. Hejmara hilbijartina du tîp an jî sê tîpên cuda bi hev re ji endamên komika $\{a, b, c, d, e, f\}$ bê dubarekirin çend e?

9. Dozdeh lîstikvan tevlî pêşbirka avjeniyê bûn bi çend rêbazan lîstikvanên yekem, duyem û sêyem tên rêzkirin?

10. Divê xwendekarek bersiva 10 pirsan ji 13 pirsan bide bi mercê ku herî kêm bersiva 4 pirsan ji pênc pirsên destpêkê bide, xwendekar dikare bi çend rêbazan bersivê bide?

11. Pênc kes bi hev re ji komikeke ji 6 zilam û 8 jinan pêk tê, hatin hilbijartin, bi çend rêbazan her pênc kes di rewşên li jêr de tên hilbijartin:

- Heger her pênc kes heman zayend bin.

- Heger du kes tenê ji her pênc kesan heman zayend bin.

12. Xwendekarekî sala yekem di beşeke zanîngehê de 10 branşan dixwîne û heger herî kêm di 8 branşan de bi ser nekeve, nikare li sala duyem bê veguhestin.

Xwendekar bi çend rêbazan dikare li sala duyem bê veguhestin?

13. Di polekê de 9 xort û 6 keç hene, bi çend rêbazan komîteyeke ji 4 xwendekaran pêk tê, ji vê pole çêdibe, li gorî ku komîte heman zayend be?

WANEYA DUYEM: TEORIYA DUPÊKHATE

Em dizanin ku:

$$(x+a)^0 = 1$$

$$(x+a)^1 = x + a$$

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Em dikarin encamê bigirin ku:

$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3a^2x + a^3$$

Di heman demê de em dikarin encamê bigirin ku:

$$(x+a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4a^3x + a^4$$

Niha em rêgezekê ji bo vekirina $(x+a)^n$ bibînin:

1- Sêgoşeya Pascal (Pascal's triangle)

Qaseya dupêkhate	Qatên pêkhateyên vekirinê
$(x+a)^0 \longrightarrow$	1
$(x+a)^1 \longrightarrow$	1 1
$(x+a)^2 \longrightarrow$	1 2 1
$(x+a)^3 \longrightarrow$	1 3 3 1
$(x+a)^4 \longrightarrow$	1 4 6 4 1
$(x+a)^5 \longrightarrow$	1 5 10 10 5 1

Em dikarin sêgoşeya Pascal bi alîkariya levkirinê jî binivîsînin:

$(x+a)^0 \rightarrow$	1					
$(x+a)^1 \rightarrow$	C(1,0)	C(1,1)				
$(x+a)^2 \rightarrow$	C(2,0)	C(2,1)	C(2,2)			
$(x+a)^3 \rightarrow$	C(3,0)	C(3,1)	C(3,2)	C(3,3)		
$(x+a)^4 \rightarrow$	C(4,0)	C(4,1)	C(4,2)	C(4,3)	C(4,4)	
$(x+a)^5 \rightarrow$	C(5,0)	C(5,1)	C(5,2)	C(5,3)	C(5,4)	C(5,5)

2- Vekirina dupêkhate

Heger $x\,, a \in \mathbb{R}$ û $n \in \mathbb{Z}^{+}$ be, wê demê:

$$(x+a)^n = x^n + C(n,1)x^{n-1}\,a + C(n,2)x^{n-2}a^2 + \cdots + a^n$$

Her wiha:

$$(x-a)^n = x^n - C(n,1)x^{n-1}a + C(n,2)x^{n-2}a^2 - \cdots + (-a)^n$$

Têbînî:

1. Hejmara pêkhateyên vakirina dupêkhateya $(x+a)^n$ yeksanî $n+1$ pêkhate.

2. Vekirin li gorî hêzên (x) berbipaş rêzkirî ne û li gorî hêzên (a) berbipêş rêzkirî ne.

3. Komkirina hêzên (x) û hêzên (a) di çi pêkhateyekê de, yeksanî (n) ye.

4. Levkirin di her pêkhateyekê de, ji pêkhateyên vekirinê hejmareke tam tenê kêmî pêpilka wê pêkhateyê ye.

5. Pêkhateya yekem her tim x^n ye û pêkhateya dawî a^n ye û qatên her duyan hejmara (1) ye.

Mînak: Em vekirina dupêkhateya $(2x+3y)^4$ bibînin:

$$(2x+3y)^4 = (2x)^4 + C(4,1)(2x)^3(3y) + C(4,2)(2x)^2(3y)^2 + C(4,3)(2x)(3y)^3 + (3y)^4$$

$$= 16\,x^4 + 96\,x^3y + 216\,x^2y^2 + 216\,xy^3 + 81y^3$$

Rahênan: Em vekirina dupêkhateyên li jêr bibînin:

$(a+3b)^5$ $\qquad$ $(x^2-1)^6$

❖ **Rewşên taybet**

$$(1+x)^n = 1 + C(n\,,1)x + C(n\,,2)x^2 + \cdots + x^n$$

$$(1-x)^n = 1 - C(n\,,1)x + C(n\,,2)x^2 - \cdots + (-x)^n$$

Mînak: Em vekirina dupêkhateya li jêr bibînin:

$$(1+x)^6 = 1 + C(6\,,1)x + C(6\,,2)x^2 + C(6\,,3)x^3 + C(6\,,4)x^4 + C(6\,,5)x^5 + x^6$$

Em $x=1$ di her du aliyan de bi cih bikin:

$$(1+1)^6 = 1 + C(6\,,1) + C(6\,,2) + C(6\,,3) + C(6\,,4) + C(6\,,5) + 1$$

Her wiha:

$$(2)^6 = C(6\,,0) + C(6\,,1) + C(6\,,2) + C(6\,,3) + C(6\,,4) + C(6\,,5) + C(6\,,6)$$

Rahênan: Em vekirina dupêkhateya $(1-x)^8$ bibînin.

3- Pêkhateya giştî ji vekirina dupêkhateyê

Vekirina $(x+y)^n$ bi vî awayî tê nivîsîn:

$$(x+y)^n = x^n + C(n\,,1)x^{n-1}y + C(n\,,2)x^{n-2}y^2 + \cdots + y^n$$

Em dibînin ku:

$$u_2 = C(n\,,1)x^{n-1}y$$

$$u_3 = C(n\,,2)x^{n-2}y^2$$

Di heman demê de, em dibînin ku:

$$u_9 = C(n\,,8)x^{n-8}y^8$$

Heger em bibêjin ku pêkhateya giştî u_{r+1} ye li gorî ku $n \geq r \geq 0$ be, wê demê u_{r+1} bi vî awayî tê nivîsîn:

$$\boxed{u_{r+1} = C(n\,,r)x^{n-r}y^r}$$

Mînak: **Em qatên pêkhateya şeşem ji vekirina $(x+\frac{2}{x})^8$ bibînin:**

$$u_6 = C(8\,,5)\,(x)^{8-5}\left(\frac{2}{x}\right)^5 = C(8\,,5)\,x^3\,(2)^5\,(x)^{-5}$$

$$= 1792\,x^{-2}$$

Her wiha qatên vê pêkhateyê = 1792

Rahênan: **Li gorî hêzên x yên kêmker di vekirina $(2x+\frac{1}{2})^7$ de, em u_3 , u_7 bibînin û heger $u_3 = 3u_7$ be, em nirxê x bibînin.**

❖ Rêgez

$$(x+a)^n + (x-a)^n = 2(u_1 + u_3 + u_5 + \cdots)$$

$$(x+a)^n - (x-a)^n = 2(u_2 + u_4 + u_6 + \cdots)$$

Mînak 1: **Em encama $(x+2)^6 + (x-2)^6$ bibînin:**

$$(x+2)^6 + (x-2)^6 = 2(u_1 + u_3 + u_5 + u_7)$$

$$= 2(x^6 + C(6\,,2)(x)^4(2)^2 + C(6\,,4)(x)^2(2)^4 + C(6\,,6)(x)^0(2)^6)$$

$$= 2(x^6 + 60x^4 + 240x^2 + 64)$$

Mînak 2: **Em encama $(1+\sqrt{x})^5 - (1-\sqrt{x})^5$ bi awayê herî sade bibînin:**

$$\left(1+\sqrt{x}\right)^5 - \left(1-\sqrt{x}\right)^5 = 2(u_2 + u_4 + u_6)$$

$$= 2\left[C(5,1)(1)^5\left(\sqrt{x}\right) + C(5,3)(1)^2\left(\sqrt{x}\right)^3 + C(5,5)(1)^0(\sqrt{x})^5\right]$$

$$= 2\sqrt{x}(5 + 10x + x^2)$$

Rahênan: **Em encamên bikaranînên li jêr bibînin:**

$$(1+x)^7 + (1-x)^7$$

$$(1+x)^5 - (1-x)^5$$

4- Pêkhateya navîn di vekirina $(x+a)^n$ de

Di vekirina $(x+a)^n$ de, em dibînin ku hejmara pêkhateyên vekirî $k = n + 1$

1. Heger (n) hejmareke cot be, wê demê hejmara pêkhateyên vekirinê hejmareke kit e û pêkhateyeke navîn ji vekirinê re heye û pêpilka wê $\frac{n}{2} + 1$ e.

2. Heger (n) hejmareke kit be, wê demê hejmara pêkhateyên vekirinê hejmareke cot e û du pêkhateyên navîn ji vekirinê re hene û pêpilka wan $\frac{n+1}{2}$, $\frac{n+3}{2}$

Mînak: Em pêkhateya navîn di vekirina $(2x + \frac{1}{2x^2})^{12}$ de bibînin:

Em dibînin ku $n = 12$ cot e, wê demê hejmara pêkhateyan kit e.

Pêpilka pêkhateya navîn: $\frac{n+2}{2} = \frac{12+2}{2} = \frac{14}{2} = 7$

$$u_7 = C(12\,,6)(2x)^6\left(\frac{1}{2x^2}\right)^6$$

$$= C(12\,,6)(2)^6(x)^6(\frac{1}{2})^6(x^{-2})^6$$

$$= C(12\,,6)x^{-6}$$

5- Dîtina pêkhateya ku x^k digire

Em ê hewil bidin pêkhateya x^k bê nivîsîna vekirina dupêkhateyê bi awayekî tam bibînin:

❖ Gavên dîtina pêkhateya x^k

1. Em bibêjin ku ev pêkhate pêkhateya giştî ye u_{r+1} û piştre bi alîkariya (r) wê bibînin.

2. Em komkirina hêzên (x) di pêkhateya giştî de, bi alîkariya (r) bibînin û piştre em ê vê komkirinê yeksanî hêza hatî xwestin (k) binivîsînin.

Her wiha em (r) a ku girtina vê pêkhateyê ji hêza hatî xwestin (k) re bibînin:

$r \in \mathbb{N} \Rightarrow r+1$ pêkhateya hatî xwestin.

Lê dema ku $r \notin \mathbb{N}$ be, tu pêkhate ku hêza hatî xwestin ji vekirinê bigire tune ye.

▪ Têbînî

Di rewşa lêgerîna pêkhateya bê (x), em komkirina hêzên (x) ji pêkhateya giştî yeksanî sifirê binivîsînin.

Mînak: **Ji vekirina $(\frac{3x}{2}+\frac{2}{3x})^{11}$ em qatên (x) bibînin:**

$$u_{r+1} = C(11,r)\left(\frac{3x}{2}\right)^{11-r}\left(\frac{2}{3x}\right)^{r}$$

Bi hevrûkirinê em dibînin ku:

$$x^1 = x^{11-r-r} \Rightarrow 11-2r=1 \Rightarrow r=5$$

Qatên u_6:

$$u_6 = C(11,r)\left(\frac{3}{2}\right)^{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{5} x = 693$$

HÎNDARÎ

1. Em vekirinên dupêkhateyên li jêr bibînin:

$(x+3)^6$, $(2x-y)^5$, $(1+x)^4$

2. Em pêkhateya pêncem ji vekirina $(2+3x)^{11}$ bibînin.

3. Em nirxê (x) a ku hevkêşeya li jêr pêk tine, bibînin:

$$(1+\sqrt{3})^6-\left(1-\sqrt{3}\right)^6=480\sqrt{3}\,x$$

4. Em tekez bikin ku:

$$\frac{C(n\,,r)}{C(n-1\,,r-1)}=\frac{n}{r}$$

Heger rêje di navbera u_6 ji vekirina $(x+\frac{1}{x})^{15}$ û u_5 ji vekirina $(x-\frac{1}{x})^{14}$ yeksanî $\frac{8}{9}$ be, em nirxê (x) bibînin.

5. Heger pêkhateya nehem ji vekirina $(x^2-x^{-2})^{11}$ yeksanî 165 be, em nirxê (x) bibînin.

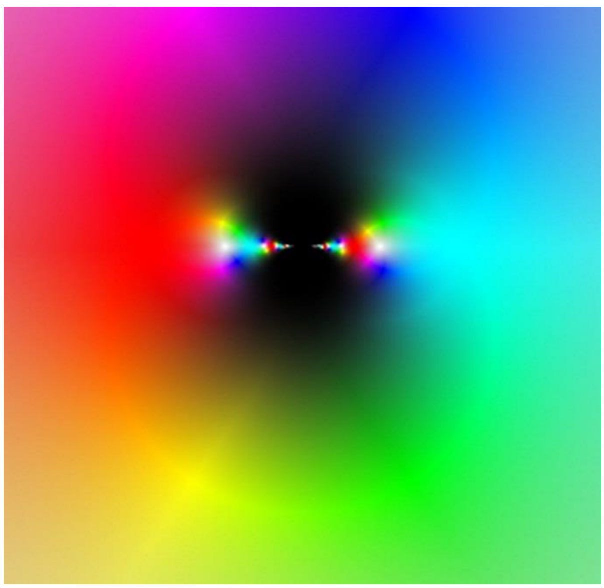
6. Em her du pêkhateyên navîn di vekirina $(\frac{x^2}{3}+\frac{3}{x})^{15}$ de, bibînin.

7. Em qatên x^8 di vekirina $(\frac{2x}{3}+\frac{3}{x})^{12}$ bibînin.

8. Em pêkhateya bê (x) di vekirina $(2x^2-\frac{1}{x})^{12}$ bibînin.

BEŞA SÊYEM: HEJMARÊN KOMPLÊKS

1. AWAYÊ SÊGOŞEYÎ JI HEJMARA KOMPLÊKS RE
2. TEORIYA DÎMWAVIR



WANEYA YEKEM: AWAYÊ SÊGOŞEYÎ JI HEJMARA KOMPLÊKS RE

Jean Robert Argand kesê yekem ê ku hejmarên komplêks xwend û ji bo tekez bike ku ji hemû hevkêşeyên cebirî re kok hene heger rasteqînî yan jî nîgaşbûyî bin, bi kar anî.

Hejmarên komplêks bi xalekê $(x\,,y)$ di kordînatê de bi kar anî li gorî ku (x) beşa rasteqînî li ser tewareya $x'x$ destnîşan dike, lê (y) hejmara nîgaşbûyî li ser tewareya $y'y$ destnîşan dike.

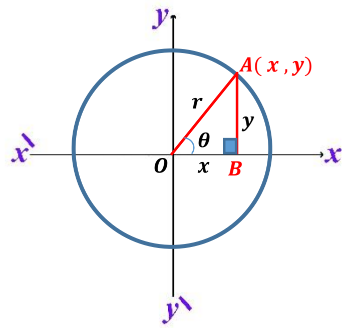
Me berê hejmarên komplêks nas kiriye û me dîtiye ku hejmara komplêks bi awayê $\omega = x + iy$ tê nivîsîn û bi navê awayê cebirî hat naskirin li gorî ku $x\,,y$ du hejmarên rast in û $i^2 = -1$

Me hevjimara hejmara komplêks jî nas kiriye û dîtiye ku bi awayê $\overline{\omega} = x - iy$ tê nivîsîn û bi sembola $\overline{\omega}$ tê nîşankirin.

Di vê waneyê de, em ê awayekî din ji bo nivîsîna hejmara komplêks û nîşankirina wê girafîkî nas bikin.

1- Cotên rêzkirî yên çemserî û dîkartî

Di teşeya li jêr de, bazinekî ku nîveşkêla wî (r) be heye û xala $A(x\,,y)$ li ser bazin e, $A\hat{O}B = \theta$



$$cos(\theta) = \frac{x}{r} \Longrightarrow x = r\,cos\,(\theta)$$

$$sin(\theta) = \frac{y}{r} \Longrightarrow y = r\,sin\,(\theta)$$

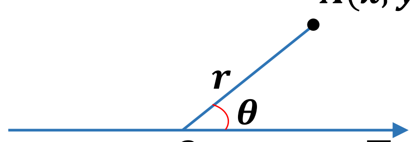
Li gorî Pythagoras di sêgoşeya tîk ABO de:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Di heman demê de: $tan\,(\theta) = \frac{y}{x}$

Bi hesabkirina fonkisyona vajî ji fonkisyona tan re $tan^{-1}(\frac{y}{x})$ em θ bi dest dixin.

Heger em kordînata dîkartî weke kordînata çemserî bibînin, li gorî ku xala hevbirîna tewareyan weke çemser be û tewareya çemserî li ser parçeyê pozîtîv ê tewareya $x'x$ yeksaneyî ye be, em dikarin cotên rêzkirî yên çemserî bi yên dîkartî veguherin û vajî jî rast e.



Veguhartina cotên rêzkirî yên çemsrî bi yên dîkartî

Heger A xalek di cotên rêzkirî yên çemserî de, be û heger cotên rêzkirî yên çemserî ji xala A re $(r\,,\theta)$ be û cotên rêzkirî yên dîkartî ji heman xala A re $(x\,,y)$ be, em dibînin ku:

$$\left.\begin{matrix} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow (x\,,y) = (r\cos(\theta)\,,r\sin(\theta))$$

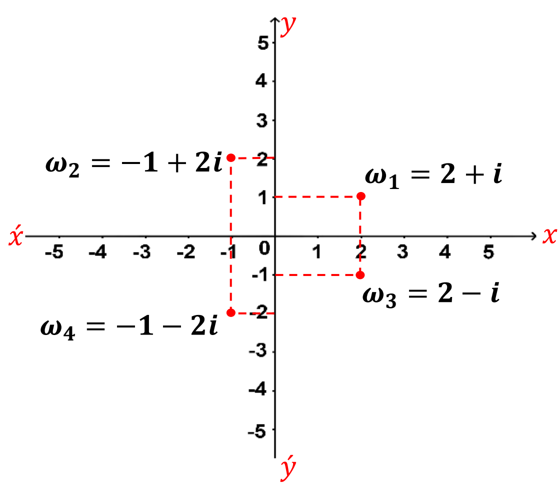
Zaniyarê Arcand hejmara komplêks ω di kordînata tîk de, girafîkî nîşan kir û tewareya asoyî $x'x$ ji bo destnîşankirina parçeyê rasteqînî û tewareya tîkî $y'y$ ji bo destnîşankirina parçeyê nîgaşbûyî ji hejmara komplêks bi kar anî.

Her wiha xala ku cotên wê yên rêzkirî $(x\,,y)$ be, hejmara komplêks $x + yi$ nîşan dike.

Mînak: **Em hejmarên li jêr di kordînatê de nîşan bikin:**

$\omega_1 = 2 + i$, $\omega_2 = -1 + 2i$

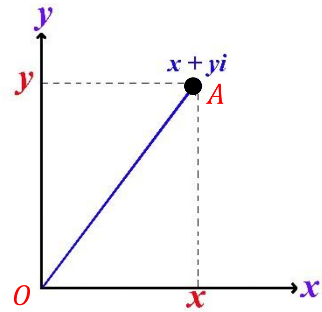
$\omega_3 = 2 - i$, $\omega_4 = -1 - 2i$



▪ Têbînî

Heger $\omega = x + iy$ hejmareke komplêks be û xala $A(x\,, y)$ di kordînatê de, wê nîşan bike, wê demê dirêjahiya hejmara komplêks $|\omega|$ durahiya wê ji navenda (O) ye û têkiliya wê wiha ye:

$$r = |\omega| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Awayê sêgoşeyî (çemserî) ji hejmara komplêks re

Heger $\omega = x + iy$ be, em $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ bi cih bikin:

$$\omega = r\cos(\theta) + i\,r\sin(\theta) \implies \omega = r[\cos(\theta) + i\,\sin(\theta)]$$

Em dikarin pîvana (θ) di rewşên li jêr de li gorî $\theta \in\,]-\pi\,, \pi]$ nas bikin:

1. Heger $x > 0$, $y > 0$ be $\implies$ θ di çaryeka yekem de ye $\implies$

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$$

2. Heger $x < 0$, $y > 0$ be $\implies$ θ di çaryeka duyem de ye $\implies$

$$\theta = \pi + \tan^{-1}(\frac{y}{x})$$

3. Heger $x < 0$, $y < 0$ be $\implies$ θ di çaryeka sêyem de ye $\implies$

$$\theta = -\pi + \tan^{-1}(\frac{y}{x})$$

4. Heger $x > 0$, $y < 0$ be $\implies$ θ di çaryeka çarem de ye $\implies$

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$$

Mînak 1: **Em dirêjahiya hejmara komplêks a li jêr û pêvana goşeya (θ) bibînin û piştre em awayê wê yê sêgoşeyî binivîsînin:**

$$\omega_1 = -\sqrt{3} + i$$

Em dibînin ku: $x = -\sqrt{3}$, $y = 1$

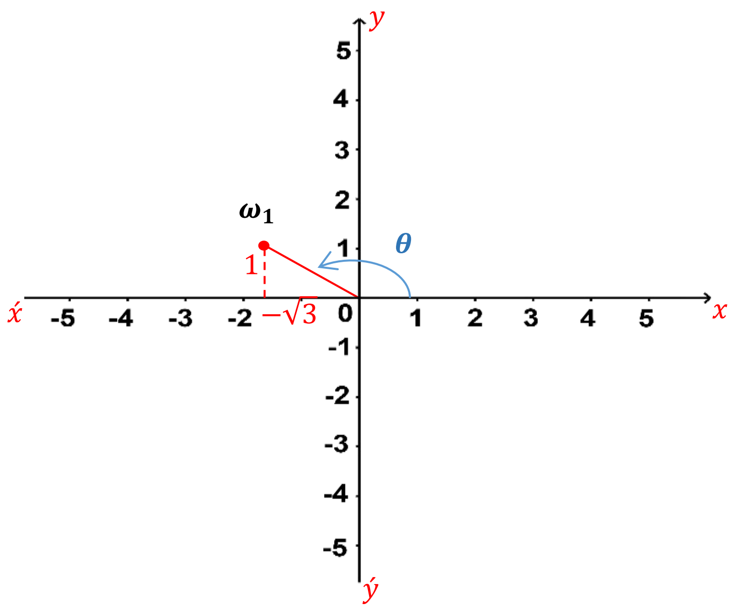
Ji ber vê yekê hejmar di çaryeka duyem de ye

$$r = |\omega_1| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right)$$

$$\Longrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\omega_1 = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]$$



Mînak 2: Em dirêjahiya hejmara komplêks a li jêr û pêvana goşeya (θ) bibînin û piştre em awayê wê yê sêgoşeyî binivîsîninin:

$$\omega_2 = -1 - i$$

Em dibînin ku: $x = -1$, $y = -1$

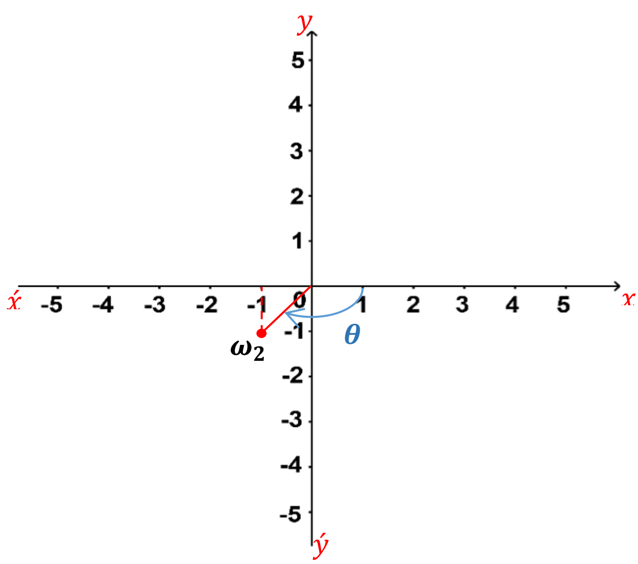
Ji ber vê yekê hejmar di çaryeka sêyem de, ye

$$r = |\omega_2| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta = -\pi + tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = -\pi + tan^{-1}(1) = -\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4}$$

$$\omega_2 = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\,sin\,(\frac{-3\pi}{4})\right]$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \sqrt{2}\left[cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\,sin\,(\frac{3\pi}{4})\right]$$



Rahênan: Em dirêjahiya hejmara komplêks a li jêr û pîvana goşeya (θ) bibînin û piştre em awayê wê yê sêgoşeyî binivîsînin:

$$\omega = \sqrt{3} - i$$

Taybetmendiyên dirêjahî û goşeyê ji hejmara komplêks re

Ji her hejmareke komplêks $\omega = x + iy$ û goşeya wê re:

1. $|\omega| \geq 0$

2. Goşeya hejmara komplêks hejmareke bêdawî ji pîvanan dibe bi zêdekirina hejmareke tam ji dewreyan

Ango: $\theta + 2\pi k \quad : k \in \mathbb{Z}$

3. $|\omega| = |\bar{\omega}| = |-\omega| = |-\bar{\omega}|$

4. $\omega \,.\, \bar{\omega} = |\omega|^2$

Mînak: **Em dirêjahî û pêvana goşeya (θ) ji hejmara komplêks a li jêr re bibînin:**

$$\omega = 2\left[cos(\frac{\pi}{3}) - i\, sin(\frac{\pi}{3})\right] = 2\left[cos(-\frac{\pi}{3}) + i\, sin(-\frac{\pi}{3})\right]$$

Em dibînin ku: $r = 2 \quad , \quad \theta = -\frac{\pi}{3}$

Encam

Heger $\omega = r[cos(\theta) + i\, sin(\theta)]$ **be, wê demê:**

1. $\frac{1}{\omega} = \frac{1}{r}[cos(-\theta) + i\, sin(-\theta)]$

2. $\omega^2 = r^2[cos(2\theta) + i\, sin(2\theta)]$

3. $\omega^n = r^n[cos(n\theta) + i\, sin(n\theta)]$

Mînak: Em hejmara $\omega = 1 - i$ bi awayê sêgoşeyî binivîsîninin û piştre $(1-i)^8$ bibînin:

Çare:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow x > 0 \\ y = -1 \Rightarrow y < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Hejmara komplêks di çaryeka çarem de ye.

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = tan\,(-1) \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\omega = \sqrt{2}\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin(-\frac{\pi}{4})\right]$$

$$(1-i)^8 = \omega^8 = (\sqrt{2})^8\left[cos(\frac{-8\pi}{4}) + i\,sin(\frac{-8\pi}{4})\right]$$

$$(1-i)^8 = 16[cos(-2\pi) + i\,sin(-2\pi)] = 16$$

Awayê hêzî ji hejmara komplêks re

Heger $\omega = x + iy$ hejmareke komplêks be û dirêjahiya wê yeksanî (1) be: $|\omega| = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

Wê demê hejmjareke rast (θ) heye ku $x = cos\,(\theta)$ û $y = sin(\theta)$ pêk tîne.

Hejmara komplêks bi vî awayî tê nivîsîn:

$$\omega = cos(\theta) + i\,sin(\theta)$$

Heger hejmara komplêks bi sembola $e^{i\theta}$ bê nîşankirin, wê demê awayê hêzî jê re wiha tê nivîsîn:

$$\omega = e^{i\theta}$$

Di rewşa giştî de wiha tê nivîsîn:

$$\omega = r\,e^{i\theta}$$

❖ Taybetmendî

1. $e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$

2. Di awayê hêzî de:

$$\omega = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Beşa rasteqînî $\cos(\theta)$ ye û beşa nîgaşbûyî $\sin(\theta)$ ye.

3. Dema ku $\theta = 0$ be, em dibînin ku:

$$e^{0} = \cos(0) + i \sin(0) = 1$$

4. $e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$

$$= \cos(\theta) - i \sin(\theta)$$

$\Longrightarrow \; e^{-i\theta} = \overline{(e^{i\theta})}$

5. Heger dirêjahiya hejmareke komplêks yeksanî (1) be, wê demê vajiya wê yeksanî hevjimara wê ye.

$$|\omega| = 1 \;\Longrightarrow\; \bar{\omega} = \frac{1}{\omega} \;\Longrightarrow \frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$$

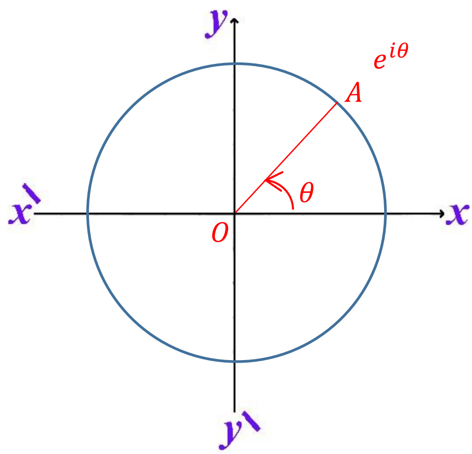
6. $-e^{i\theta} = -\cos(\theta) - i \sin(\theta)$

$$= \cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)$$

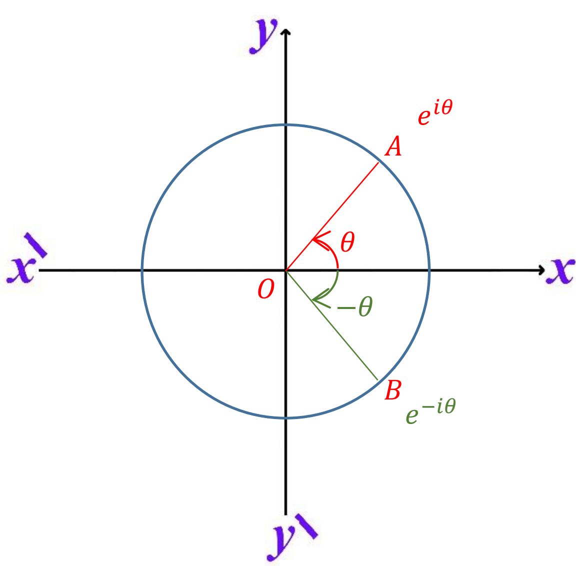
$$= e^{i(\pi+\theta)}$$

Girafîka hejmara komplêks $\omega = e^{i\theta}$

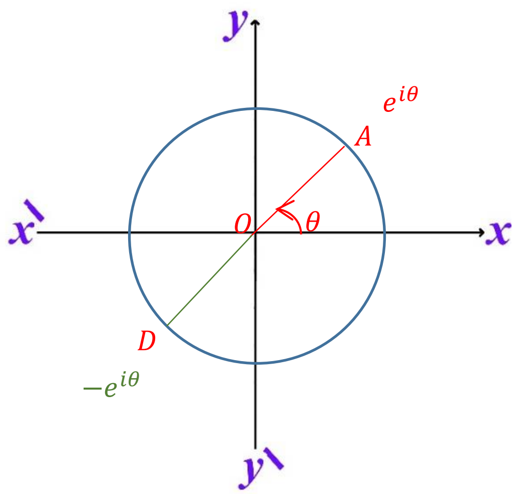
Heger $(O\ ,\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$ kordînateke levhatî be, hejmara $\omega = e^{i\theta}$ di vê kordînatê de, bi xalekê A li ser bazinekî ku nîveşkêla wî (1) be û navenda wî navenda kordînatê be, tê nîşankirin, li gorî ku nîveşkêla OA bi tîra $\vec{\imath}$ re goşeyeke ku pêvana wê (θ) be, çêke.



Lê hejmara komplêks $\overline{\omega} = e^{-i\theta}$ bi xalekê B ku bi xala A li gorî tewareya $x'x$ sîmetrîk be, tê nîşankirin.



Her wiha hejmara komplêks $-\omega = -e^{i\theta}$ bi xalekê D ku bi xala A li gorî navendê sîmetrîk be, tê nîşankirin.



- **Têbînî**

Heger $\theta = 2\pi$ be, wê demê:

$$e^{i2\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$$

Mînak: Em hejmarên komplêks ên li jêr bi awayê hêzê binivîsînin:

$$\omega_1 = 1 + i \qquad \omega_2 = -1 + i$$

$$\omega_3 = -2i \qquad \omega_4 = e^{(3+\frac{\pi}{6})i}$$

Çare:

- $\omega_1 = 1 + i$

$x = 1 \ , \ y = 1 \implies$ **Hejmar di çaryeka yekem de ye.**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}(1) \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\boldsymbol{\omega = r\,e^{i\theta} \Longrightarrow \omega_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

- $\boldsymbol{\omega_2 = -1 + i}$

$\boldsymbol{x = -1}$, $\boldsymbol{y = 1}$ $\Longrightarrow$ **Hejmar di çaryeka duyem de ye.**

$$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{\theta = \pi + tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \pi + tan^{-1}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}}$$

$$\boldsymbol{\omega = r\,e^{i\theta} \Longrightarrow \omega_2 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

- $\boldsymbol{\omega_3 = -2i}$

$\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{y = -2}$ $\Longrightarrow$ **Hejmar li ser beşa nîgetîv a tewareya** $\boldsymbol{y'y}$ **ye.**

$$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4} = 2}$$

$$\boldsymbol{\theta = -\frac{\pi}{2}}$$

$$\boldsymbol{\omega = r\,e^{i\theta} \Longrightarrow \omega_3 = 2\,e^{-i\frac{\pi}{2}}}$$

- $\boldsymbol{\omega_4 = e^{(3 + \frac{\pi}{6})i}}$

$$\boldsymbol{\omega_4 = e^{(3 + \frac{\pi}{6})i} = e^3 \times e^{\frac{\pi}{6}i}}$$

$$\boldsymbol{r = e^3 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{6}}$$

Hevdan û parvekirina hejmarên komplêks bi awayê hêzî

- **Heger $\omega_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ û $\omega_2 = r_2\, e^{i\theta_2}$ be, wê demê:**

$$\omega_1 . \omega_2 = r_1 . r_2 . e^{i\theta_1} . e^{i\theta_2} = r_1 . r_2 . e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Encam

Dema ku $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ be, wê demê:

$$\omega_1 . \omega_2 = r_1 . r_2 . e^{i\,2\theta} \Longrightarrow \omega_1 . \omega_2 = r_1 . r_2\, (e^{i\theta})^2$$

Bi awayekî giştî:

$$\omega_1 . \omega_2 = r_1 . r_2 . e^{i\,n\theta} \Longrightarrow \omega_1 . \omega_2 = r_1 . r_2\, (e^{i\theta})^n$$

- **Heger $\omega_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ û $\omega_2 = r_2\, e^{i\theta_2}$ be, wê demê:**

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_1\, e^{i\,\theta_1}}{r_2\, e^{i\,\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i\,(\theta_1 - \theta_2)}$$

Mînak: **Em encama ω bi awayê hêzî bibînin:**

$$\omega = 2\,[cos(30) + i\,sin(30)] \times 2\,[sin(135) - i\,cos(135)]$$

Em destpêkê $sin(135) - i\,cos(135)$ bikin awayê sêgoşeyî yê rast:

$$sin(135) - i\,cos(135) = sin(90+45) - i\,cos(90+45)$$
$$= cos\,(45) + i\,sin\,(45)$$

$$\Longrightarrow \omega = 2\,[cos(30) + i\,sin(30)] \times 2[cos(45) + i\,sin(45)]$$
$$= 4 \times e^{i\,(30)^\circ} \times e^{i\,(45)^\circ}$$
$$= 4\, e^{i\,(30^\circ + 45^\circ)} = 4\, e^{i\,(75)^\circ}$$

Em $(75)^\circ$ bikin radyan:

$$\frac{75}{180} = \frac{\theta}{\pi} \Longrightarrow \theta = \frac{75\,\pi}{180} = \frac{5\,\pi}{12} \Longrightarrow \omega = 4\,e^{i\,(\frac{5\,\pi}{12})}$$

Mînak: Em hejmara komplêks $\omega = \sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$ bi awayê cebirî $\omega = x + iy$ binivîsînin:

Çare:

$$\omega = \sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}i} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi - \pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{4\pi - \pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\Longrightarrow\ \omega = -1 + i$$

Rahênan: Em hejmara komplêks $\omega = 8\,e^{\frac{\pi}{6}i}$ bi awayê cebirî $\omega = x + iy$ binivîsînin.

HÎNDARÎ

1. Em valahiyên li jêr dagirin:

- Hejmara komplêks $\omega = 3 - 4i$ di kordînata levhatî de, bi xala $A(\dots,\dots)$ tê nîşankirin.

- Heger xala B hejmara komplêks Z di kordînata levhatî de, nîşan bike û B' hejmara komplêks $\overline{Z}$ di kordînata levhatî de, nîşan bike, wê demê B' wêneya ………. Li gorî vajîkirina li gorî ……….

- Dirêjahiya hejmara komplêks $\omega = -5i$ yeksanî ……….

- Heger $Z = \frac{2-i}{2+i}$ be, wê demê $|Z| = \cdots$

- Awayê hêzî ji hejmara komplêks $\omega = -1 + i$ re ……….

- Awayê sêgoşeyî ji hejmara komplêks $Z = 2 - 2\sqrt{3}i$ re ……

2. Em bersiva rast hilbijêrin:

- Heger $\omega = \sqrt{2}[sin(30) + i\,cos(30)]$ be, wê demê:

1) $\theta = 60^\circ$ 2) $\theta = 90^\circ$ 3) $\theta = 120^\circ$

- Heger $\omega = -3$ be, wê demê:

1) $\theta = 0^\circ$ 2) $\theta = 90^\circ$ 3) $\theta = 180^\circ$

- Heger $\omega = -1 + \sqrt{3}\,i$ be, wê demê:

1) $|\overline{\omega}| = -1 + \sqrt{3}i$ 2) $|\overline{\omega}| = \sqrt{2}$ 3) $|\overline{\omega}| = 2$

3. Em dirêjahî û pîvana goşeya θ bibînin û piştre awayê sêgoşeyî ji hejmarên li jêr re binivîsînin:

$$\omega_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i \qquad \omega_2 = 1 - \sqrt{3}\, i$$

$$\omega_3 = -\sqrt{3}\, i \qquad \omega_4 = 5$$

4. Em hejmarên komplêks ên li jêr bi awayê hêzî binivîsînin:

$$\omega_1 = 1 - \sqrt{3}\, i \qquad \omega_2 = \frac{1}{1+i} \qquad \omega_3 = \frac{\sqrt{2}\, i}{1+i}$$

5. Heger $\omega_1 = 1 - \sqrt{3}\, i$, $\omega_2 = 1 + i$ be, em bikaranînên li jêr bi awayê sêgoşeyî û hêzî bibînin:

$$\omega_1 \,.\, \omega_2 \qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} \qquad (\omega_2)^6$$

6. Em tekez bikin ku:

$$e^{3+\pi i} - e^{-\pi i} = (1-e)(1+e+e^2)$$

7. Heger $Z = \frac{\sqrt{3} - i}{1 - i}$ hejmareke komplêks be, em vê hejmarê bi awayê hêzî û piştre bi awayî cebirî binivîsînin û piştre rêjeyên sêgoşeyî ji goşeya $\frac{\pi}{12}$ re encamê bigirin.

WANEYA DUYEM: TEORIYA DÎMWAVIR

1- Teoriya Dîmwavir bi hêzeke tam û pozîtîv

Heger (n) hejmareke tam û pozîtîv be, wê demê:

$$[cos\ (\theta) + i\ sin\ (\theta)]^n = cos\ (n\theta) + i\ sin\ (n\theta)$$

Mînak: **Em encama $(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\ \frac{1}{2})^{24}$ bibînin:**

$\left.\begin{matrix} x > 0 \\ y < 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ **Hejmar di çaryeka çarem de ye.**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\ \frac{1}{2})^{24} = \left[cos\ \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\ sin\ \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{24}$$

$$= cos\ \left(24 \times -\frac{\pi}{6}\right) + i\ sin\ \left(24 \times -\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= cos\ (-4\pi) + i\ sin\ (-4\pi)$$

$$= 1 + 0\ \times 1$$

$$= 1$$

❖ Pêkanînên hejmarên komplêks di sêgoşeyan de

Dîtina rêjeyên sêgoşeyî ji qatên goşeyekê re bi alîkariya rêjeyên sêgoşeyî yên goşeyê:

Mînak: Em rêjeyên sêgoşeyî ji goşeya (2θ) re bi alîkariya rêjeyên sêgoşeyî ji goşeya (θ) re bibînin:

Çare: Ji rêgeza Dîmwavir em dibînin ku:

$$[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta) \ \ldots\ldots (1)$$

Bi alîkariya vekirina dupêkhate em dibînin ku:

$$[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^2 =$$

$$\cos^2(\theta) + 2i\sin(\theta)\cos(\theta) + i^2\sin^2(\theta)$$

$$= [\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] + i[2\sin(\theta).\cos(\theta)] \ \ldots\ldots (2)$$

Bi yeksaniya di navbera her du beşên rasteqînî di (1) û (2) de:

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

Bi yeksaniya di navbera her du beşên nîgaşbûyî di (1) û (2) de:

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta).\cos(\theta)$$

Ji bo dîtina $\tan(2\theta)$:

$$\tan(2\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{2\sin(\theta).\cos(\theta)}{\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)}$$

Bi parvekirina par û paranê li $\cos^2(\theta)$ em dibînin ku:

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan(\theta)}{1 - \tan^2(\theta)}$$

Rahênan: Em $\cos(3\theta)$ bi alîkariya hêzên $\cos(\theta)$ bibînin.

2- Teoriya Dîmwavir bi hêzeke rêjeyî û pozîtîv

Em dizanin ku: Li gorî ku $k \in \mathbb{Z}$

$$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = \cos(\theta + 2\pi k) + i\sin(\theta + 2\pi k)$$

Dema ku (r) hejmareke pozîtîv be, wê demê:

$$[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^{\frac{1}{r}} = \cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{r}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{r}\right)$$

Ango: **Qaseya $[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^{\frac{1}{r}}$ gelek nirxan li gorî nirxê (k) dibe û hejmara van nirxên cuda yeksanî (r) nirxên ku em bi dest dixin dema ku $k = \ldots, -2, -1, -0, 1, 2, \ldots$ û goşeya $\frac{\theta+2\pi k}{r}$ dikeve navbera $-\pi$ û π de.**

Mînak 1: **Em di $\mathbb{C}$ de, komika çareyên hevkêşeya li jêr bibînin:** $\omega^4 = 2 + 2\sqrt{3}i$

Em hejmarê bikin awayê sêgoşeyî:

$$\left.\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Hejmar di çaryeka yekem de ye.}$$

$$r = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\omega^4 = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \omega = (4)^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt[4]{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) \times \frac{1}{4} + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) \times \frac{1}{4}\right]$$

Dema ku $k = 0$ be:

$$\omega_1 = \sqrt[4]{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] = \sqrt[4]{4}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

Dema ku $k = 1$ be:

$$\omega_2 = \sqrt[4]{4}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right] = \sqrt[4]{4}\, e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$$

Dema ku $k = -1$ be:

$$\omega_3 = \sqrt[4]{4}\left[\cos\left(\frac{-5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{-5\pi}{12}\right)\right] = \sqrt[4]{4}\, e^{i\left(\frac{-5\pi}{12}\right)}$$

Dema ku $k = -2$ be:

$$\omega_4 = \sqrt[4]{4}\left[\cos\left(\frac{-11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{-11\pi}{12}\right)\right] = \sqrt[4]{4}\, e^{i\left(\frac{-11\pi}{12}\right)}$$

Mînak 2: Em kokên hevkêşeya $\omega^3 = 1$ bibînin û piştre van kokan di kordînata levhatî de, nîşan bikin:

$$\omega^3 = 1 \implies \omega^3 = \cos(0) + i \sin(0)$$

$$\implies \omega = [\cos(0) + i \sin(0)]^{\frac{1}{3}}$$

$$= \cos\left(2\pi k \times \frac{1}{3}\right) + i \sin\left(2\pi k \times \frac{1}{3}\right)$$

Dema ku $k = 0$ be:

$$\omega_1 = \cos(0) + i \sin(0) = 1$$

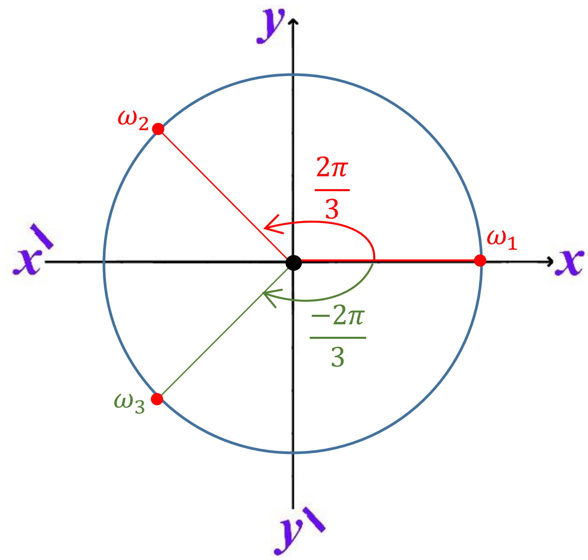
Dema ku $k = 1$ be:

$$\omega_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$$

Dema ku $k = -1$ be:

$$\omega_3 = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

Xêzkirin:



Em dibînin ku kokên hevkêşeyê bazinê ku navenda wê navenda kordînatê ye û nîveşkêla wê (r) ye, li 3 kevanên yeksan parve dike û pîvana her kevanekê $(120)^\circ$ ye.

Ev xal sergoşeyên sêgoşeyeke hemkenar çêdike.

❖ Kokên bi pêpilka (n) ji hejmareke komplêks re

Hevkêşeya $\omega^n = Z \;\; : Z \in \mathbb{C}$ jê re (n) kok hene bi awayê $\omega = Z^{\frac{1}{n}}$

Em dikarin van kokan bi dîtina awayê sêgoşeyî ji hejmara (Z) re bibînin û piştre teoriya Dîmwavir bi kar bînin.

Hemû kok di kordînata levhatî de ne li ser bazinekî tenê ku navenda wê navenda kordînatê ye û dirêjahiya nîveşkêla wê $|Z|^{\frac{1}{n}}$ ye.

Her wiha pirgoşeyeke birêkûpêk çêdike, hejmara sergoşeyên wê (n) ye.

Mînak 1: Em di $\mathbb{C}$ de, çareyên hevkêşeya $\omega^5 = -32$ bibînin û piştre van kokan di kordînata levhatî de, destnîşan bikin:

Çare:

Em hejmara – 32 bikin awayê sêgoşeyî:

$$\left.\begin{matrix} x < 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Hejmar li ser tewareya } x'x \text{ ye.}$$

$$r = \sqrt{(-32)^2} = 32$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{0}{-32}\right) = tan^{-1}(0) \Rightarrow \theta = \pi$$

$$\omega^{32} = 32[cos(\pi) + i\, sin\,(\pi)]$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt[5]{32}\,[cos(\pi) + i\, sin\,(\pi)]^{\frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow \omega = 2\left[cos\,(\pi + 2\pi k) \times \frac{1}{5} + i\, sin\,(\pi + 2\pi k) \times \frac{1}{5}\right]$$

Dema ku $k = 0$ be:

$$\omega_1 = 2\left[cos\,\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\, sin\,\left(\frac{\pi}{5}\right)\right] = 2\, e^{i\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

Pîvana goşeya di navbera her kokekê û koka li pey wê $\frac{2\pi}{5}$ ye.

$$\omega_2 = 2\left[cos\,\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) + i\, sin\,\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)\right]$$

$$= 2\left[cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + i\, sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right]$$

$$\omega_3 = 2\left[cos\,\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) + i\, sin\,\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)\right]$$

$$= 2\,[cos(\pi) + i\, sin(\pi)]$$

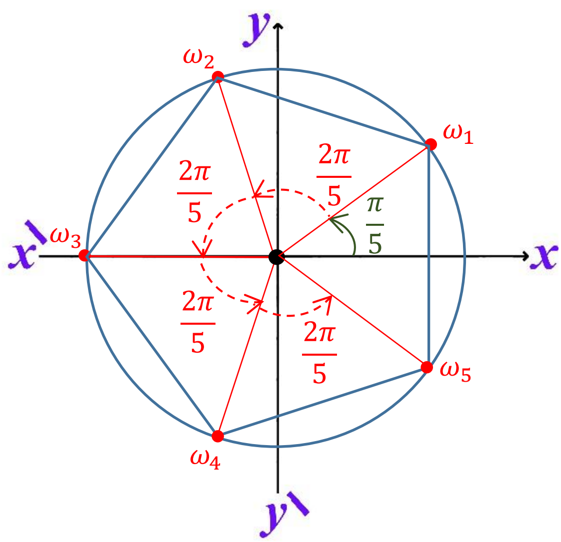
$$\omega_4 = 2\left[\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right]$$

$$\omega_5 = 2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)\right]$$

Em dibînin ku ev kok pêncgoşeyeke birêkûpêk çêkiriye.



Rahênan: Em di kordînata levhatî de, kokên ji hejmara (1) re destnîşan bikin.

Mînak 2: Em kokên damî ji hejmara $\omega = 3 + 4i$ re bibînin:

Heger $(3 + 4i)^{\frac{1}{2}} = x + iy$ be, em her du aliyan dam bikin:

$$3 + 4i = (x + iy)^2 \Rightarrow 3 + 4i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

Bi yeksaniya di navbera her du parçeyên rasteqînî de:

$3 = x^2 - y^2$ .... (1)

Bi yeksaniya di navbera her du parçeyên nîgaşbûyî de:

$4 = 2xy$ .... (2)

Bi damkirina (1) û (2) em dibînin ku:

$(3)^2 = (x^2 - y^2)^2 \Rightarrow 9 = x^4 + y^4 - 2x^2y^2$

$(4)^2 = (2xy)^2 \Rightarrow 16 = 4x^2y^2$

Em her du têkiliyan kom bikin:

$$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2 = 9 + 16$$

$\Rightarrow x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 25$

$\Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5$ .... (3)

Em (1) û (3) kom bikin:

$$2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Dema ku $x = 2$ be, em di (2) de, bi cih bikin:

$$4y = 4 \Rightarrow y = 1$$

Koka yekem: $\omega_1 = 2 + i$

Dema ku $x = -2$ be, em di (2) de, bi cih bikin:

$$-4y = 4 \Rightarrow y = -1$$

Koka duyem: $\omega_2 = -2 - i$

Mînak 3: Em di $\mathbb{C}$ de, çareyên hevkêşeya li jêr bibînin:

$$(1-i)x^2-(3-i)x+4-2i=0$$

Çare: Em dikarin hevkêşeyê bi vî awayî binivîsînin:

$$x^2-\frac{(3-i)x}{(1-i)}+\frac{4-2i}{(1-i)}=0$$

Em $\frac{3-i}{1-i}$ sade bikin, em par û paranê hevdanî hevjimara paranê bikin:

$$\frac{(3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3+3i-i+1}{1+1}=\frac{4+2i}{2}=2+i$$

Di heman demê de, em $\frac{4-2i}{1-i}$ sade bikin:

$$\frac{(4-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{4+4i-2i+2}{1+1}=\frac{6+2i}{2}=3+i$$

Hevkêşe dibe bi vî awayî:

$$x^2-(2+i)x+(3+i)=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$=[-(2+i)]^2-4(1)(3+i)$$

$$=4+4i-1-12-4i=-9$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{-9}=3i$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+i+3i}{2}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+i-3i}{2}=\frac{2-2i}{2}=1-2i$$

HÎNDARÎ

1. Em encama bikaranîna li jêr bibînin:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{22}$$

2. Heger $Z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ hejmarek be, em $(Z)^{48}$ bibînin.

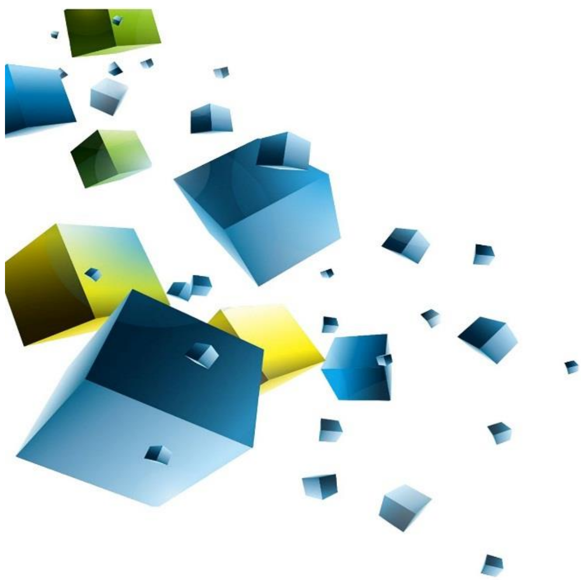
3. Em di $\mathbb{C}$ de, kokên hevkêşeya $\omega^4=1$ bibînin û van kokan di kordînata levhatî de, nîşan bikin.

4. Em kokên kabî ji hejmara komplêks $\omega=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$ re bibînin û van kokan di kordînata levhatî de, nîşan bikin.

5. Em bi awayê sêgoşeyî her du kokên damî ji hejmara $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ re bibînin.

BEŞA ÇAREM: GEOMETRIYA VALAHIYÊ

GEOMETRÎ Û PÎVAN DI TEQALE Û VALAHIYÊ DE



WANE: GEOMETRÎ Û PÎVAN DI TEQALE Û VALAHIYÊ DE

Pêşgotin

Geometrî zanista lêkolîna teşeyan û têkiliya di navbera van teşeyan, goşe û dirêjahiya di navbera wan de ye.

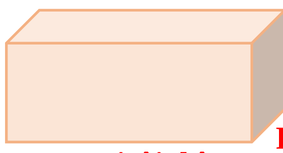
Geometrî dibe du beş:

- **Geometriya teqaleyî: Ji bo lêkolîna teşeyên ku du durahiyên wê tenê hene, dirêjahî û firehî.**

Mînak: Milkêş.

- **Geometriya valahiyê: Ji bo teşeyên ku sê durahiyên wê hene, dirêjahî, firehî û bilindahî.**

Mînak: Pirîzmaya milkêşê, lûle û gewdeyên kovikî û gogî.

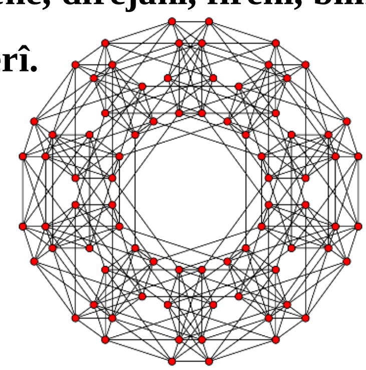


- **Têbînî**

Di dema dawî de, cureyeke nû ji geometriyê hat afirandin, bi navê geometriya minkofiskî tê naskirin.

Çar durahiyên wê hene, dirêjahî, firehî, bilindahî û dem

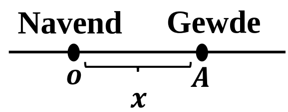
Mînak: Kaba zêdekerî.



1- Destnîşankirina cihê gewdeyekê

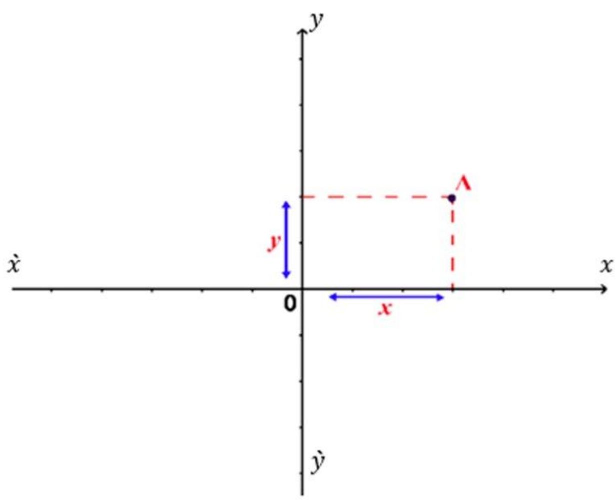
- **Ji bo destnîşankirina cihê gewdeyekê li ser xêzikeke rast, divê durahiya vê gewdeyê ji xaleke xwecih li ser xêzika rast bê naskirin, bi navê xala navendê tê naskirin.**

$\boldsymbol{OA = x \in \mathbb{R}}$



- **Ji bo destnîşankirina cihê gewdeyekê di teqaleyekê de, divê êxistina vê gewdeyê li ser her du tewareyên hevtîk di teqaleya du durahî $(\mathbb{R})^2$ de bê naskirin.**

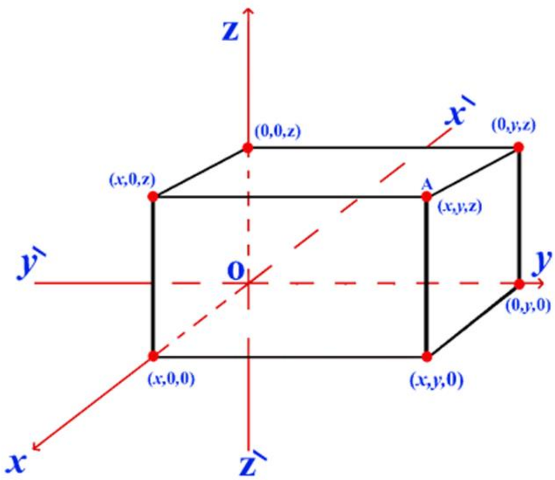
$\boldsymbol{A = (x,}$



Niha em çawa cihê gewdeyekê di valahiyê de destnîşan bikin? Pêdiviya me bi kordînateke hevtîk di valahiya sê durahî $(\mathbb{R})^3$ de heye.

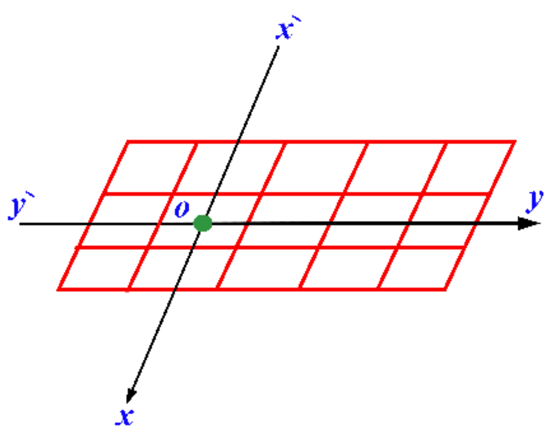
Kordînatên xala (A) di valahiyê de, li gorî sê tewareyên di xaleke tenê de hevbirîn û cot cot hevtîk, dest nîşan dibe, ew jî bi dîtina êxistina vê xalê li ser her tewareyekê.

$$A = (x\,,y\,,z) \quad \in \mathbb{R}^3$$

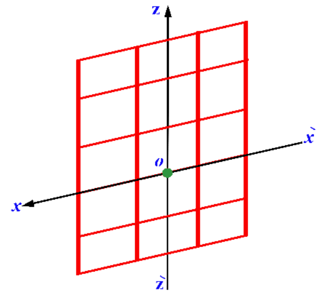


Taybetmendiyên kordînata hevtîk di valahiya sê durahî $(\mathbb{R})^3$ de

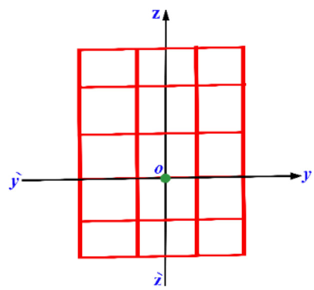
1. Hemû xalên valahiya ku kordînatên wê $(x\,,y\,,O)$ bin, di teqaleya ku ji her du tewareyên $\acute{x}x\,,\acute{y}y$ pêk tê de ye.



2. Hemû xalên valahiya ku kordînatên wê $(x\ ,O, z)$ bin, di teqaleya ku ji her du tewareyên $\acute{x}x\ ,\acute{z}z$ pêk tê de ye.



3. Hemû xalên valahiya ku kordînatên wê $(O\ , y, z)$ bin, di teqaleya ku ji her du tewareyên $\acute{y}y\ ,\acute{z}z$ pêk tê de ye.

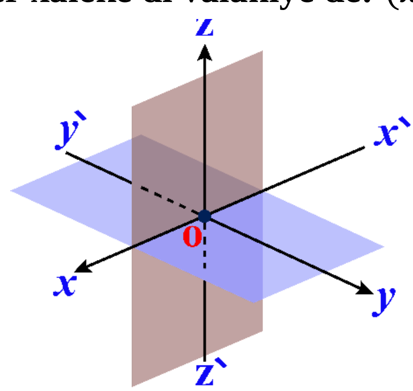


4. Kordînatên her xaleke li ser tewareya $\acute{x}x$ dibe $(x\ , 0\ , 0)$

Kordînatên her xaleke li ser tewareya $\acute{y}y$ dibe $(0, y, 0)$

Kordînatên her xaleke li ser tewareya $\acute{z}z$ dibe $(0\ , 0\ , z)$

5. Kordînatên her xaleke di valahiyê de: $(x\ , y\ , z)$

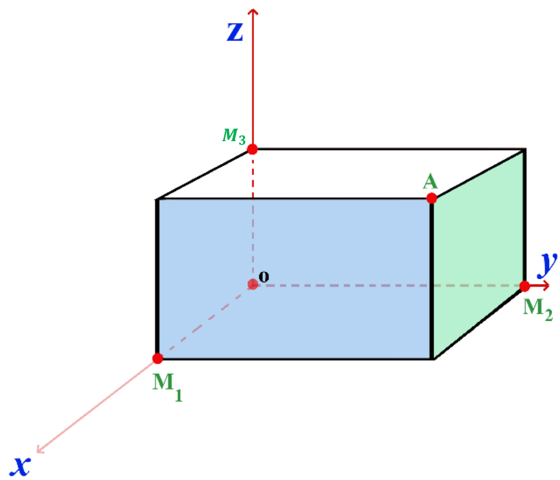


Destnîşankirina cihê xalekê di valahiyê de

Bêtirî rêbazekê ji bo destnîşankirina cihê xalekê di valahiyê de heye.

1. Em ji wê xalê sê teqaleyên hevtîk bi tewareyên $\acute{x}x$, $\acute{y}y$ û $\acute{z}z$ re xêz bikin, wê demê wan di xalên M_1 , M_2 , M_3 de dibire.

$$OM_1 = x \quad , \quad OM_2 = y \quad , \quad OM_3 = z$$



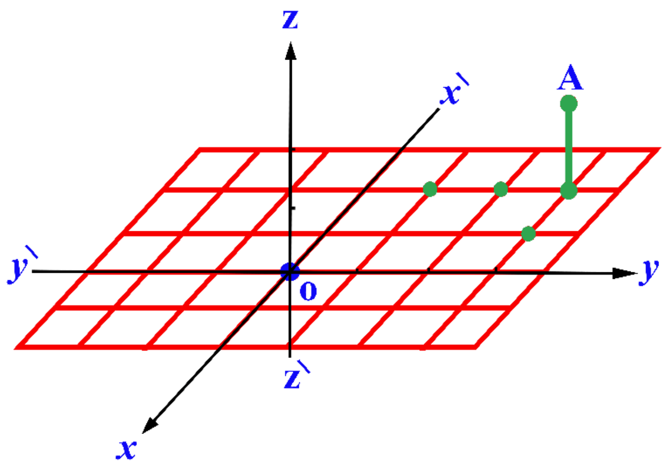
2. Em cihê xala (x , y) di teqaleya $\acute{x}x$, $\acute{y}y$ de, destnîşan bikin û piştre rastênhevî tewareya $\acute{z}z$ jê tevger bikin, di aliyê pozîtîv an jî nîgetîv de, li gorî êxistina sêyem ji xala hatî xwestin re.

Mînak: **Em her sê xalên li jêr di kordînata hevtîk a sê durahî de, destnîşan bikin:**

$$A(-2 , 3 , 2) \quad , \quad B(3 , -1 , 5) \quad , \quad C(4 , 0 , -1)$$

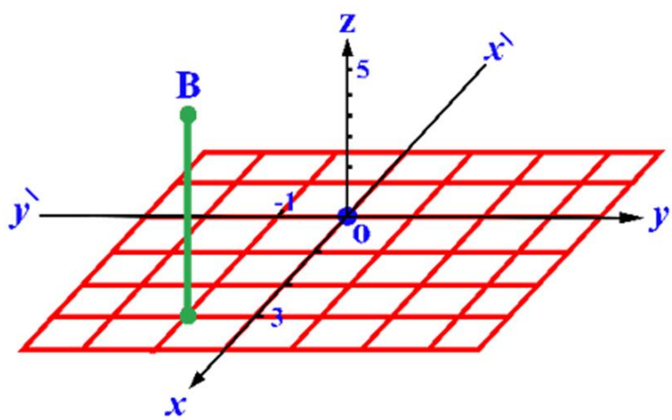
∗ **Em xala yekem $A(-2 , 3 , 2)$ destnîşan bikin:**

Em xala $(-2\ ,3)$ di teqaleya $\acute{x}x\ ,\acute{y}y$ de, destnîşan bikin û piştre bi aliyê pozîtîv ê tewareya $\acute{z}z$ bi qasî du menan tevger bikin, wê demê em xala A bi dest dixin.



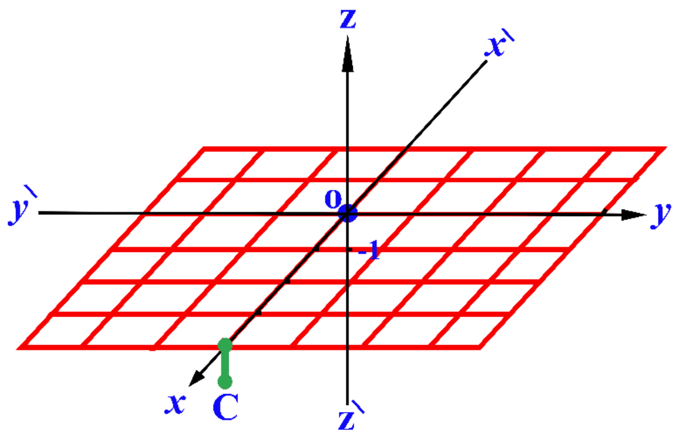
∗ Em xala duyem $B(3\ ,-1\ ,5)$ destnîşan bikin:

Em xala $(3\ ,-1)$ di teqaleya $\acute{x}x\ ,\acute{y}y$ de, destnîşan bikin û piştre bi aliyê pozîtîv ê tewareya $\acute{z}z$ bi qasî pênc menan tevger bikin, wê demê em xala B bi dest dixin.



* **Em xala duyem $C(4\,,0\,,-1)$ destnîşan bikin:**

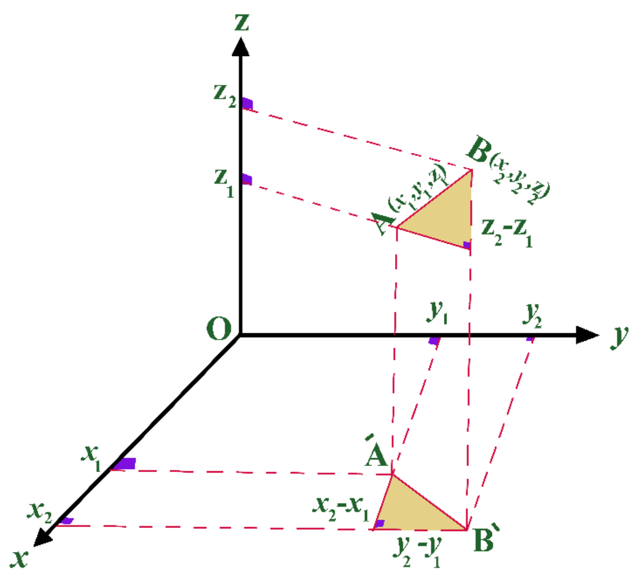
Em xala $(4\,,0)$ di teqaleya $\acute{x}x\,,\acute{y}y$ de destnîşan bikin û piştre bi aliyê nîgetîv ê tewareya $\acute{z}z$ bi qasî meneke tenê tevger bikin, wê demê em xala C bi dest dixin.



2- Durahiya di navbera du xalan di valahiyê de

Heger $A(x_1, y_1\,, z_1)$, $B(x_2\,, y_2\,, z_2)$ du xalên bin di valahiyê de, wê demê durahiya di navbera A û B de wiha ye:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Mînak: Em durahiya di navbera her du xalên li jêr de bibînin:

$$A(3,-1,0)\ ,\ \ B(5,3,-4)$$

$$AB=\sqrt{(5-3)^2+(3+1)^2+(-4+0)^2}$$

$$AB=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36}=6$$

Rahênan: Em durahiya di navbera her du xalên li jêr de bibînin:

$$E(-2,1,3)\ ,\qquad D(-4,3,5)$$

3- Cotên rêzkirî yên nîveka parçerastekekê di valahiyê de

Heger $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ du xal bin di valahiyê de, wê demê kordînatên xala I nîveka parçerasteka AB wiha ye:

$$I\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

Mînak: **Heger $A(2,-2,4)$, $B(8,2,1)$ du xal bin, em kordînatên xala I nîveka AB bibînin:**

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+8}{2}=5$$

$$y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-2+2}{2}=0$$

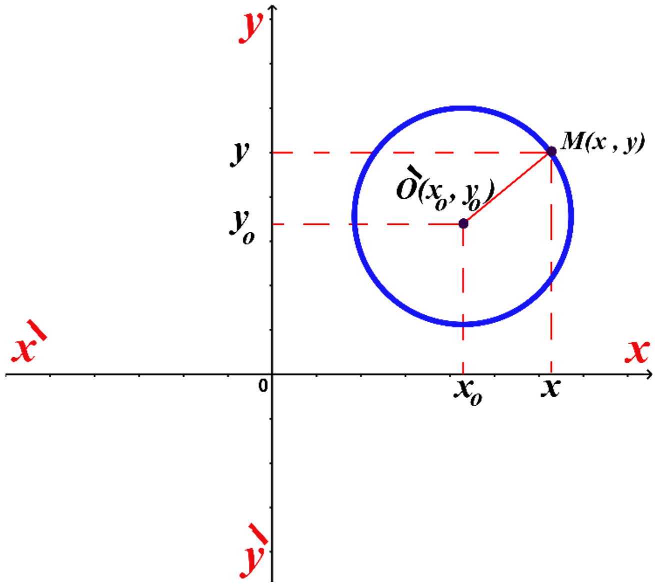
$$z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}$$

Ango: **Kordînatên xala I : $I\left(5,0,\frac{5}{2}\right)$**

4- Hevkêşeya bazinê di teqaleyê de

Bazin: Komika xalên teqaleyên yê dûrî xaleke naskirî $(\acute{O})$ durahiyeke xwecih e (r).

Em ji (r) re dibêjin nîveşkêla bazinê û ji $(\acute{O})$ re dibêjin navenda bazinê.



❖ Hevkêşeya bazinê

Xala $O'(x_0 , y_0)$ navenda bazinê ye û (r) nîveşkêla wê ye, lê xala $M(x , y)$ li ser bazinê ye.

$$\acute{O}M = r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\Rightarrow (\acute{O}M)^2 = r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

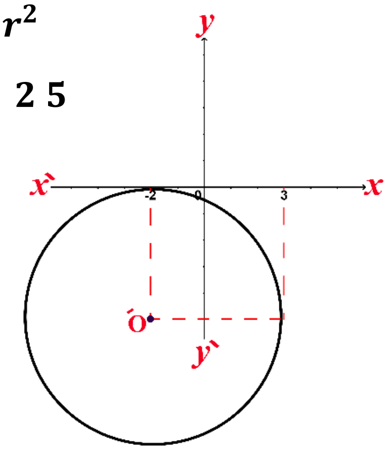
Ango: Hevkêşeya bazinê bi vî awayî ye:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Mînak 1: Em hevkêşeya bazinê ku navenda wî $O'(-2\,,-5)$ be û dirêjahiya nîveşkêla wî $r = 5$ be, bibînin:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$\Longrightarrow (x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 25$$



Mînak 2: Em navend û dirêjahiya nîveşkêla bazinê ku hevkêşeya wî wekî li jêr, bibînin:

$$(x + 6)^2 + (y - 7)^2 = 9$$

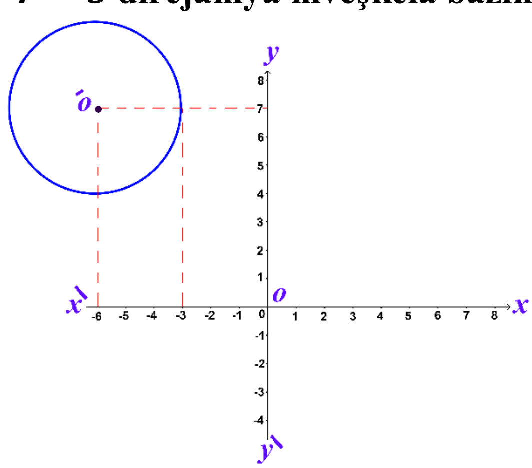
Bi hevrûkirinê bi awayê giştî yê hevkêşeya bazinê re:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Em dibînin ku:

$$\left.\begin{matrix} x_0 = -6 \\ y_0 = 7 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow O'(-6\,,7) \text{ navenda bazinê ye.}$$

$r^2 = 9 \Longrightarrow r = 3$ dirêjahiya nîveşkêla bazinê ye.



❖ Awayê giştî ji hevkêşeya bazinê re

Me dît ku hevkêşeya bazinê wiha ye:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Em kevanan belav bikin:

$$x^2 - 2xx_0 + x_0{}^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0{}^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0{}^2 + y_0{}^2 - r^2 = 0$$

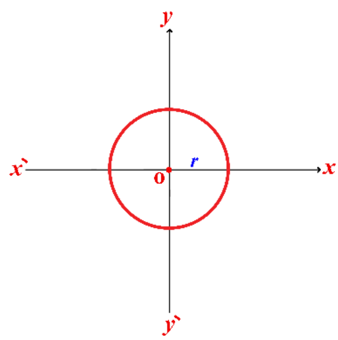
Heger $-2x_0 = a$, $-2y_0 = b$, $x_0{}^2 + y_0{}^2 - r^2 = c$ **be, wê demê:**

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

▪ Rewşeke taybet

Heger navenda bazinê li ser navenda kordînatê de be, dibe bi vî awayî:

$x^2 + y^2 = r^2$



Mînak: Em navend û dirêjahiya nîveşkêla bazinê ku hevkêşeya wî wekî li jêr e, bibînin:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$$

Bidestxistina dama tam em dibînin ku:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 5 = 0$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 - 4 - 1 - 5 = 0$$

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$$

Navenda bazinê: $O'(-2\,,1)$

Dirêjahiya nîveşkêla bazinê: $r = \sqrt{10}$

- **Têbînî**

Her hevkêşeyeke bi awayê $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ piştî bidestxistina dama tam, dibe bi vî awayî:

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

1. Heger $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = 0$ be, hevkêşe xalekê $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ nîşan dike.

2. Heger $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$ be, hevkêşe bazinekî ku navenda wî $O'(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ û dirêjahiya nîveşkêla wî $r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$ be, nîşan dike.

3. Heger $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c < 0$ be, hevkêşe komikeke vala nîşan dike.

Mînak: **Hevkêşeya li jêr çi nîşan dike?**

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 8 = 0$$

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = \frac{16}{4} + \frac{16}{4} - 8 = 8 - 8 = 0$$

Hevkêşe xaleke ku kordînatên wê wekî li jêr nîşan dike:

$$O'\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = O'(-2, 2)$$

5- Hevkêşeya gogê di valahiyê de

Gog: Komika xalên valahiyê yên dûrî xaleke xwecih (P_0) durahiyeke xwecih e (r).

Em ji (P_0) re dibêjin navenda gogê û ji (r) re dibêjin dirêjahiya nîveşkêla gogê.

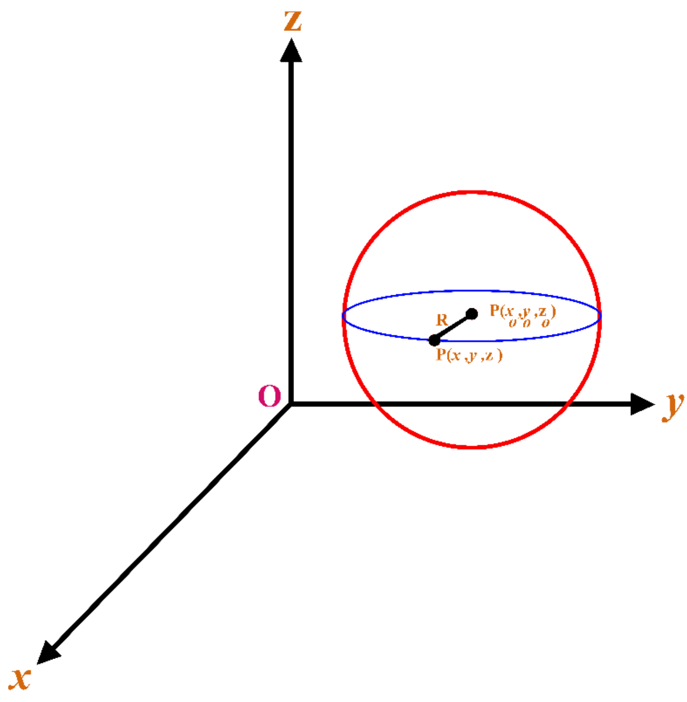
Heger kordînatên navenda gogê $P_0(x_0 , y_0 , z_0)$ bin û dirêjahiya nîveşkêla wî(r) be.

Di heman demê de, heger $P(x , y , z)$ xalek li ser bazinê gogê be, wê demê hevkêşeya gogê bi vî awayî ye:

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

Em her du aliyan dam bikin:

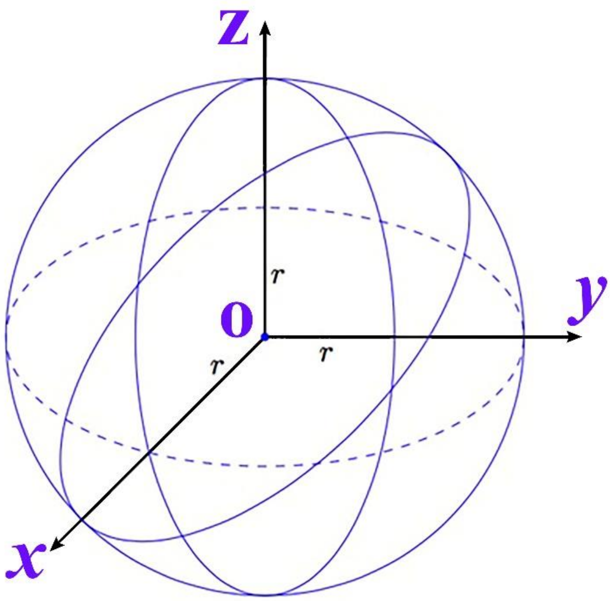
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$



- **Rewşeke taybet**

Heger navenda gogê di navenda kordînatê de be, wê demê hevkêşeya wî dibe bi vî awayî:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



Mînak: Em hevkêşeya gogê ku navenda wî $P(1\,,2\,,-3)$ ye û dirêjahiya nîveşkêla wî $r = 4$ e, bibînin:

Em dizanin ku awayê giştî ji hevkêşeya gogê re wiha ye:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 16$$

HÎNDARÎ

1. Em cihê xalên li jêr bi alîkariya kordînata hevtîk a sê durahî, bibînin:

$$A(3\,,2\,,3) \quad , \quad B(-1\,,4\,,3) \quad , \quad C(0\,,0\,,4)$$

2. Em tekez bikin ku sêgoşeya ABC li gorî xalên li jêr, di (C) de, tîk e û piştre rûbera wê bibînin:

$$A(2\,,-1\,,3) \quad , \quad B(-4\,,4\,,2) \quad , \quad C(-2\,,5\,,1)$$

3. Em tekez bikin ku xalên li jêr sergoşeyên sêgoşeya hemkenar e û rûbera wê bibînin:

$$A(4\,,4\,,0) \quad , \quad B(4\,,0\,,4) \quad , \quad C(0\,,4\,,4)$$

4. Em kordînatên nîveka parçerasteka MN li gorî xalên li jêr bibînin:

$$M(-4\,,3\,,1) \quad , \quad N(3\,,-2\,,4)$$

5. Em navend û dirêjahiya nîveşkêla bazinê ku hevkêşeya wî bi vî awayî bibînin:

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$$

6. Hevkêşeya li jêr çi nîşan dike?

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$$

7. Heger $\boldsymbol{A(3\,,-1)}$, $\boldsymbol{B\,(-1\,,3)}$, $\boldsymbol{C(2\,,-3)}$ be, em:

- Durahiya di navbera xala $(\boldsymbol{A})$ û rasteka $\boldsymbol{BC}$ de bibînin.

- Dirêjahiya $\boldsymbol{BC}$ bibînin.

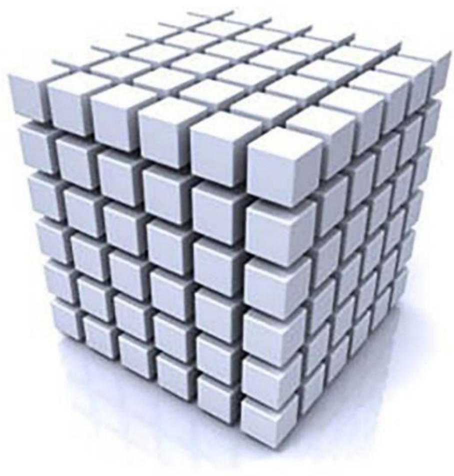
- Rûbera sêgoşeya $\boldsymbol{ABC}$ bibînin.

8. Em hevkêşeya gogê ku eşkêla wî $\boldsymbol{AB}$ ye li gorî xalên li jêr bibînin:

$$\boldsymbol{A(-1\,,5\,,4)} \qquad , \qquad \boldsymbol{B(5\,,1\,,-2)}$$

BEŞA PÊNCEM: MATRÊKS

MATRÊKS



WANE: MATRÊKS

Pirs: Firoşgeheke bazirganî du cureyên caw difiroşe, cureyeke baş ku buhaya metreyekê jê 610 lîre ye û cureyeke pir baş ku buhaya metreyekê jê 1 980 lîre ye.

Heger firotinên vê dikanê di rojekê de 15 metre be û giştî buhaya wê 16 000 lêre be, çend metre ji her cureyekê firot?

Çare:

Heger hejmara metreyên ji cureya baş ên hatî firotin x be û hejmara metreyên ji cureya pir baş ên hatî firotin y be, wê demê:

$x + y = 15$ .... (1)

$610x + 1\,980y = 16\,000$ .... (2)

Bi çarekirina hevbeş ji her du hevkêşeyan re:

$$x = 10 \qquad , \qquad y = 5$$

Em ji her du hevkêşeyên (1) û (2) re dibêjin hevkêşeyên ji pileya yekem û bi du nenasan x , y

Lê her du hevkêşe bi hev re bi navê komika hevkêşeyên ji pileya yekem û bi du nenasan.

Heger em matrêksê ji bo nîşankirina komika van hevkêşeyan bi kar bînin, em wiha dinivîsinin:

$x + y = 15$ .... (1)

$\mathbf{610x + 1\,980y = 16\,000}$ ………. (2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 610 & 1\,980 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 16\,000 \end{bmatrix}$$

Yan jî em wiha binivîsînin: $\boldsymbol{A \,.\, X = B}$

Li gorî ku:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 610 & 1\,980 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 15 \\ 16\,000 \end{bmatrix}$$

Em ji $\boldsymbol{A}$ re dibêjin matrêksa qatan.

Em ji $\boldsymbol{X}$ re dibêjin matrêksa nenasan.

Em ji $\boldsymbol{B}$ re dibêjin matrêksa pêkhateyên neguhêr.

Me berê dîtiye ku matrêks komika endamên di tabloyeke rêzkirî de ye, $\boldsymbol{m}$ rêz û $\boldsymbol{n}$ stun di navbera du kevanên bi vî awyî: [ ]

Matrêks bi sembola $\boldsymbol{A, B}$, … tê nîşankirin.

$\boldsymbol{m \times n}$ **pêpilka matrêksê ye.**

Mînak 1: Matrêksa $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ **matrêkseke dam e ji pêpilka 2×2 ye.**

Mînak 2: Matrêksa $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **matrêkseke dam e ji pêpilka 3×3 ye.**

Mînak 3: Matrêksa $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **matrêkseke ji pêpilka 2×3 ye.**

- **Têbînî**

Matrêks piratîkî di hinek guhartinên ji pileya yekem û çarekirina sîstemeke destnîşankirî ji hevkêşeyên ji pileya yekem bi kartê.

Di heman demê de, di fîzîk xêzkirinên girafîkî yên girêdayî kompîtorê, istatistîk û dibetiyan de, bi kar tê.

Vajiya matrêksê

1. Vajiya matrêkseke dam ji pêpilka 2×2:

Me berê vajiya matrêkseke dam ji pêpilka 2×2 dîtiye, heger A, B du matrêksên dam ji pêpilka 2×2 bin û heger $A \,.\, B = B \,.\, A = I$ wê demê:

B bi navê vajiya hevdanî ya matrêksa A tê naskirin û A, B her yek ji wan vajiya hevdanî ji ya din re ye û bi sembola A^{-1}, B^{-1} tê nîşankirin.

- **Têbînî**

Vajiya hevdanî ya hinek matrêksan tune ye, heger $\Delta = 0$ be.

Heger $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrêksek be, wê demê vajiya hevdanî ji matrêksa A re heye heger diyarkera vê matrêksê $\Delta \neq 0$ be.

Li gorî ku: $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \,.\, d - b \,.\, c$

Wê demê:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- **Bîranîn**

Heger $\Delta \neq 0$ be, ji matrêksê re vajiyeke hevdanî heye, wiha tê nîşankirin:

1. Em cihên her du endamên di eşkêla bingehîn de pev diguherin.

2. Em hêmayên her du endamên di eşkêla duyem de, biguherin.

3. Em matrêksa derketî hevdanî hejmara $\frac{1}{\Delta}$ bikin.

Mînak: **Em vajiya hevdanî ji matrêksa li jêr re bibînin:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Em diyarkerê bibînin:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 1 \times 4 = 6 - 4 = 2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

2. Vajiya matrêkseke dam ji pêpilka 3×3:

Heger $\Delta \neq 0$ be, ji matrêksê re vajiyeke hevdanî heye, bi sembola A^{-1} tê nîşankirin û ew jî matrêkseke dam e li gorî:

$A \,.\, A^{-1} = I$ **: I matrêksa yekaniyê ye.**

- **Têbînî**

Heger Δ= 0 be, ji matrêksê re vajiya hevdanî tune ye.

Mînak: **Em bibînin ka ji matrêksa li jêr re vajiya hevdanî heye yan jî na, em bersiva xwe diyar bikin:**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Em diyarkera matrêksê bibînin:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A = 3(-2-0) + 1(1-1) + 2(0-2)$$

$$A = -6 + 0 - 4 = -10 \neq 0$$

Ji ber ku Δ≠ 0 ye, ji matrêksê re vajiya hevdanî heye.

Matrêksa faktorên hevjimar($\bar{A}$)

Heger A matrêkseke dam ji pêpilka 3×3 be û diyarkera wê Δ be:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Faktora hevjimar ji endama a_{ij} re, nirxê biçûktirîn diyarkera beramberî endama a_{ij} ye, ya ku encama jêbirina rêz û stûna ku dikeve hevbirina endama a_{ij} hevdanî $(-1)^{i+j}$

Her wiha matrêksa hevjimaran bi vî awayî ye:

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

Mînak: Em matrêksa hevjimarên matrêksa *A* bibînin:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

Em faktorên hevjimar ji matrêksa *A* re bikin heman:

$$a_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2$$

$$a_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2$$

$$a_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1$$

$$a_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2$$

$$a_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1$$

$$a_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$a_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-5$$

$$a_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4$$

$$a_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

Matrêksa hevjimaran dibe bi vî awayî:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

- **Têbînî**

Hêmayên ku hatin dayîn wekî li jêr e: $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

Rahênan: Em matrêksa hevjimaran ji matrêksa li jêr re bibînin:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Guhartinên rêzî li ser matrêksan

Heger matrêksek wekî li jêr hebe, m rêz û n stun û bi kurtasî wiha bê nîşankirin:

$$A = [a_{ij}] \quad : \quad i \in \{1, 2, \dots m\} \;\; , \;\; j \in \{1, 2, \dots n\}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Em dikarin van guhartinên rêzî li ser vê matrêksê çêkin:

1) Hevguhartina her du rêzên i, j û sembola wê jî ev e:

$$R_i \leftrightarrow R_j$$

2) **Hevdana rêzekê mîna *j* bi hejmarekê mîna *k*≠0 û sembola wê jî bi vî awayî ye:**

$$kR_j \rightarrow R_j$$

3) **Hevdana rêzekê mîna *j* bi hejmarekê mîna *k* ≠0 û komkirina encamê bi rêza *i* re û di rêza R_i de, bicihkirina wê, sembola wê jî bi vî awayî ye:**

$$kR_j + R_i \rightarrow R_i$$

4) Em dikarin bi rêzkirin di navbera rêz û stûnan de biguherin.

Matrêksên hember

Em ji her du matrêksên *A* û *B* re dibêjin hember in, heger matrêksek ji wan encama ya din be bi çêkirina hejmareke bidawî ji guhartinên rêzî û bi vî awayî tê nivîsîn: $A \sim B$

Mînak: Di matrêksa li jêr de:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Bi hevguhartina rêza yekem bi ya duyem re $R_1 \leftrightarrow R_3$:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bi pêkanîna guhartina $R_3 - \frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_3$ li ser A :

$$A \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Bi pêkanîna guhartina $2R_3 \rightarrow R_3$ li encama jor:

$$A \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Rahênan: Heger A matrêksek be:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Em guhartina $R_2 - 2R_1 \longrightarrow R_2$ li ser A çêkin.

- Em guhartina $R_3 - R_2 \longrightarrow R_3$ li ser A çêkin.

Matrêksa paşvok ($\tilde{A}$)

1. Em matrêksa hevjimaran bibînin.

2. Em bi rêzkirina navbera rêz û stûnan biguherin, ango rêza yekem dibe stûna yekem û rêza duyem dibe stûna duyem û dawî rêza sêyem dibe stûna sêyem.

Mînak: Em matrêksa paşvok ji matrêksa li jêr re bibînin:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Em matrêksa hevjimaran bibînin:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 11 & -2 & -2 \\ -6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Em bi rêzkirina navbera rêz û stûnan biguherin:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & 11 & -6 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Rêbaza dîtina vajiya matrêksa A ya ji pêpilka 3×3

1. Em diyarkera matrêksa A bibînin, bi têbîniya ku $\Delta \neq 0$

2. Em matrêksa hevjimaran $\bar{A}$ bibînin.

3. Em matrêksa paşvok $\tilde{A}$ bibînin.

4. Em vajiya matrêksê A^{-1} li gorî têkiliya li jêr bibînin:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \times \widetilde{A}$$

Mînak: Em vajiya matrêksa li jêr bibînin:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Em diyarkera matrêksê bibînin:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 2(0-20) + (0-5) + 3(16-3)$$

$$\Delta = -40 - 5 + 39 = -6 \neq 0$$

Vajiya hevdanî ji matrêksa A re heye.

Em matrêksa faktorên hevjimar bibînin:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -20 & 5 & 13 \\ 12 & -3 & -9 \\ -14 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Em matrêksa paşvok bibînin:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} -20 & 12 & -14 \\ 5 & -3 & 2 \\ 13 & -9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \times \widetilde{A}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-6} \times \begin{bmatrix} -20 & 12 & -14 \\ 5 & -3 & 2 \\ 13 & -9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{20}{6} & -2 & \frac{14}{6} \\ \frac{-5}{6} & \frac{3}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{-13}{6} & \frac{9}{6} & \frac{-10}{6} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & -2 & \frac{7}{3} \\ \frac{-5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-13}{6} & \frac{3}{2} & \frac{-5}{3} \end{bmatrix}$$

Rahênan: Em vajiya hevdanî ji matrêksa li jêr re bibînin:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Çarekirina hevkêşeyên ji pileya yekem bi alîkariya vajiya hevdanî ji matrêksê re

Em dikarin n hevkêş e ku n nenas digire çare bikin, jê re çareyeke tenê heye bi alîkariya vajiya matrêksê dema ku $n = 2$ yan jî $n = 3$ be. (Du hevkêşeyên bi du nenasan an jî sê hevkêşe bi sê nenasan)

Heger hevkêşe ev bin:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Em hevkêşeya matrêksî binivîsînin:

$$A\,.X = B \Longrightarrow X = A^{-1}\,.B$$

Mînak: Em komika hevkêşeyên li jêr bi alîkariya vajiya matrêksê çare bikin:

$4x + y = 0$ .... (1)

$x + 2z = 15$ .... (2)

$y - 7z = 0$ .... (3)

Hevkêşeya matrêksê: $A\,.X = B$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Em diyarkera matrêksa A bibînin:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 4(0-2) - 1(-7-0) = -1 \neq 0$$

Vajiya hevdanî ji matrêksa A re heye.

Em matrêksa hevjimaran bibînin:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 7 & -28 & -4 \\ 2 & -8 & -1 \end{bmatrix}$$

Em matrêksa paşvok bibînin:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 7 & -28 & -8 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Em vajiya matrêksa A bibînin:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \times \tilde{A}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -2 & 7 & 2 \\ 7 & -28 & -8 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -2 \\ -7 & 28 & 8 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Wê demê: $X = A^{-1} . B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -2 \\ -7 & 28 & 8 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -105 \\ 480 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Ango: Komika çareyên komika hevkêşeyan ev in:

$$x = -105 \quad , \quad y = 480 \quad , \quad z = 60$$

Rahênan: **Em komika hevkêşeyên li jêr bi alîkariya vajiya matrêksê çare bikin:**

$2x - 3y - z = 9$ **………. (1)**

$x + 2y + 3z = 15$ **………. (2)**

$x - 2z = 12$ **………. (3)**

Naskirina şaşîtiyê

Dilo hevkêşeyeke matrêksî nivîsî, ji bo diyarkirina buhayên du seyranan ji bajarê (Q) heta bajarê (S) û (D) ji bo buhaya seyranê çûn û hatin bi kar anî û sembola y ji bo buhaya seyranê di aliyekî tenê de, bi kar anî:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 61 \\ 54 \end{bmatrix}$$

Vajiya hevdanî dît:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Piştre nirxên D , y dît:

$$\begin{bmatrix} D \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 61 \\ 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Ango: **Buhaya seyranê çûn û hatin $D = 34$ lê buhaya seyranê çûn tenê $y = 10$**

Dema ku Dilo saxkolîn çêkir dît ku nirxên ku bi dest xistiye hevkêşeya resen pêk nayêne, gelo di bikaranînên ku Dilo çêkirin şaşîtî kanî?

HÎNDARÎ

1. Heger A matrêksek be:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- Em guhartina $R_2 + 3R_1 \longrightarrow R_2$ li ser A çêkin.

- Em guhartina $R_3 - 2R_2 \longrightarrow R_3$ li ser matrêksa derketî çêkin.

- Em guhartina $2R_3 \longrightarrow R_3$ çêkin.

2. Heger A matrêksek be:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Em matrêksa hember jê re bibînin.

3. Em vajiya hevdanî ji matrêksê re bibînin:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Em komika hevkêşeyên li jêr bi alîkariya vajiya matrêksê bibînin:

$x - y + z = 2$ **.......... (1)**

$x + y - z = 0$ **.......... (2)**

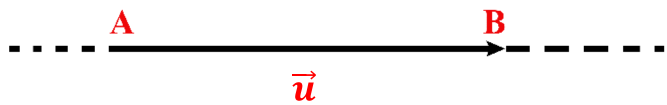
$-x + y + z = 4$ **.......... (3)**

BEŞA ŞEŞEM: DI VALAHIYÊ DE TÎR

1. DI TEQALEYÊ DE TÎR
2. DI VALAHIYÊ DE TÎR
3. DI VALAHIYÊ DE TEQALE
4. DI VALAHIYÊ DE RASTEK

WANEYA YEKEM: DI TEQALEYÊ DE TÎR

Me berê tîr nas kiriye û gotiye ku tîr parçerastekeke tîrkirî ye û bi sembola $\overrightarrow{AB}$ yan jî $\vec{u}$ tê nîşankirin.



Endamên tîrê

1. Xala (A) destpêka tîrê ye û xala (B) dawiya tîrê ye.

2. Dirêjahiya tîrê: Dirêjahiya parçerasteka AB ye û bi sembola $|\overrightarrow{AB}|$ tê nîşankirin.

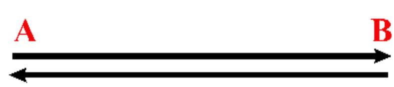
3. Rêgeha tîrê: Her rastekeke rastênhevî tîra $\overrightarrow{AB}$ ye, mîna rasteka AB ya bi navê rahiştekê tê naskirin.

- ## Rewşên taybet

1. Heger her du xalên A , B yeksaneyî bin, em tîra sifirî bi dest dixin û bi sembola $\vec{O}$ nîşan dikin, dirêjahiya wê (O) ye û rahiştekeke destnîşankirî jê re tune ye.

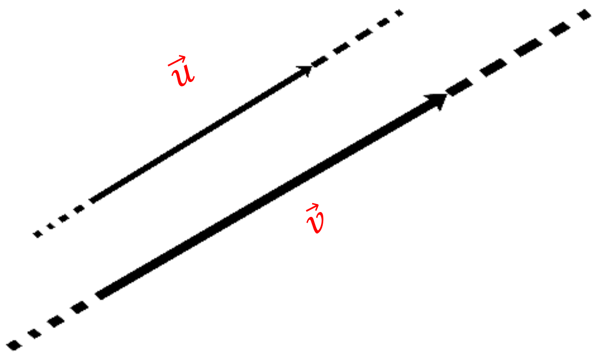
2. Tîrên hevdij: Her du tîrên heman dirêjahî û heman rêgeh lê bi du aliyên hevdij in û bi vî awayî tên nîşankirin:

$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$



3. Tîrên rastênhev: Her du tîrên ku rahiştekên wan rastênhev in û bi vî awayî tên nîşankirin:

$\vec{u} \, // \, \vec{v}$



Bikaranînên li ser tîran di teqaleyê de

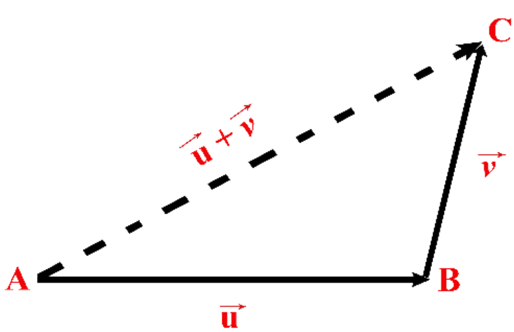
❖ Komkirina du tîran

Heger $\vec{u}$, $\vec{v}$ du tîr bin, em komkirinê bi sembola $\vec{u} + \vec{v}$ nîşan dikin û bi du rêbazan bi dest dixin:

1. Rêbaza Şaslês (Tîrên lipeyhev):

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

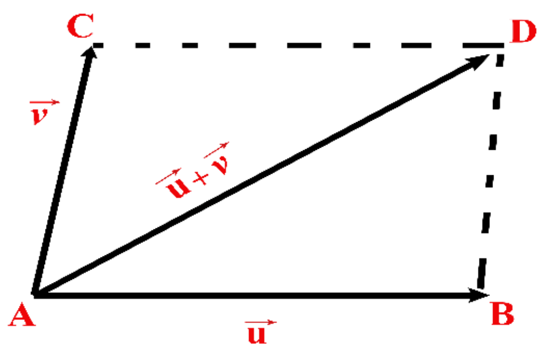
Ango: Komkirina du tîrên lipeyhev, tîreke ku destpêka wê destpêka tîra yekem e û dawiya wê dawiya tîra duyem e.



2. Rêbaza eşkêla kenarên rastênhev (Tîrên heman navend):

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

Komkirina du tîrên heman destpêkê, tîreke ku destpêka wê navenda hevbeş a her du tîran e û dawiya wê sergoşeya çarem a kenarên rastênhev a li ser her du kenaran hatiye çêkirin.

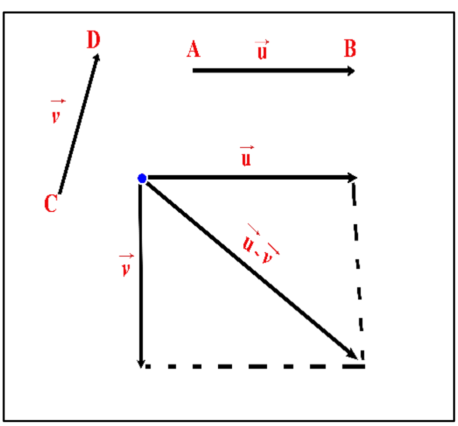


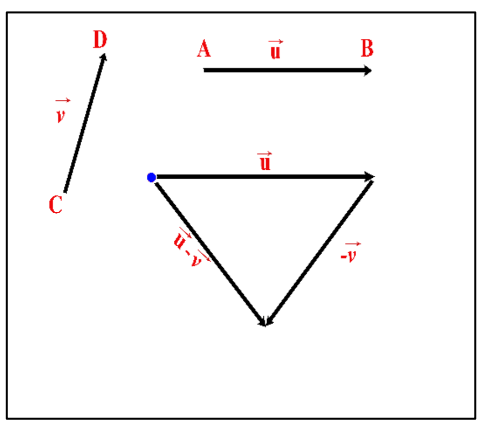
2- Derxistina du tîran

Em bikaranîna derxistinê bikin komkirina hevdij, em tîra yekem komî dija tîra duyem bikin:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Em dikarin her du rêbazên komkirinê di bikaranîna derxistinê de, bi kar bînin.



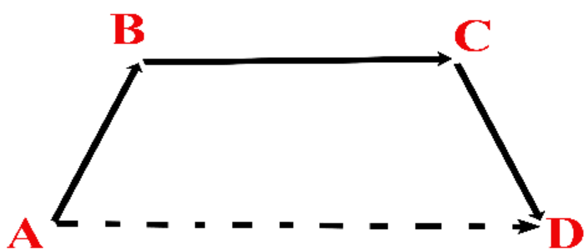


- **Têbînî li ser komkirin û derxistinê**

1. Em komkirina du tîran li ser gelek tîran giştî bikin.

Ango: **Encama komkirina gelek tîran, tîreke ku destpêka wê destpêka tîra yekem e û dawiya wê dawiya tîra dawî ye:**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$



2. Heger $\vec{u} + \vec{v} = \vec{\omega}$ be, wê demê:

$$\vec{u} = \vec{\omega} - \vec{v} \quad \text{yan jî} \quad \vec{v} = \vec{\omega} - \vec{u}$$

3. Ji bo sê xalan A , B , C

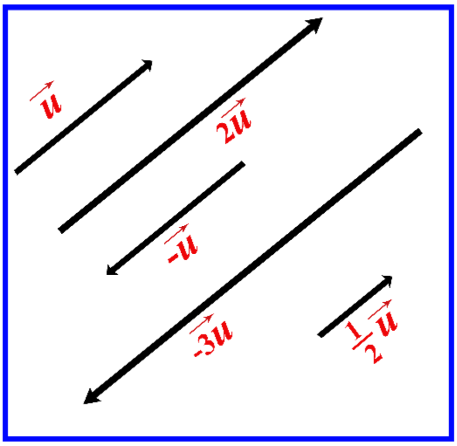
$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$$

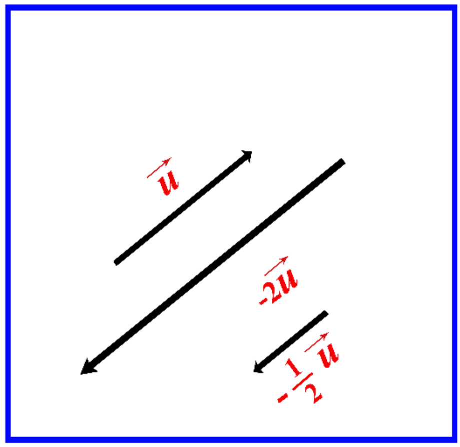
3- Hevdana tîrekê bi hejmareke rast

Hevdana tîra $\vec{u} \neq \vec{0}$ bi hejmareke rast $k \neq 0$ tîrek e û bi sembola $k\,.\,\vec{u}$ tê nîşankirin.

- $\vec{u} \neq \vec{0}$ û $k \neq 0 \Longrightarrow k\vec{u} \neq \vec{0} \Longrightarrow k\vec{u} \,//\, \vec{u}$
- **Heger $k > 0$ be, wê demê $\vec{u}$, $k\vec{u}$ di heman alî de ne.**
- **Heger $k < 0$ be, wê demê $\vec{u}$, $k\vec{u}$ di aliyên hevdij de ne.**
- $|k\,.\,\vec{u}| = |k|\,.\,|\vec{u}|$

Mînak: **Em teşeyên li jêr bibînin:**





❖ Taybetmendiyên bikaranînên li ser tîran

Heger $\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega}$ **sê tîr bin û** $a, b, c \in \mathbb{R}$ **bin, wê demê:**

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{\omega}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{\omega}$

$\vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

$\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$

$1 . \vec{u} = \vec{u}$

$-1 . \vec{u} = -\vec{u}$

$a\,(\vec{u} + \vec{v}) = a . \vec{u} + a . \vec{v}$

$(a + b) . \vec{u} = a . \vec{u} + b . \vec{u}$

$a . (b . \vec{u}) = (a . b) . \vec{u}$

$0 . \vec{u} = \vec{0}$, $k . \vec{0} = \vec{0}$

$k . \vec{u} = \vec{0}$ **yan** $\vec{u} = \vec{0}$ **yan jî** $k = 0$

Mînak: Heger $\vec{u}\,,\vec{v}$ du tîr bin û $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ be, em dirêjahiya her du tîran bibînin:

$$\vec{C} = \frac{1}{5}\,\vec{v} + 3\vec{v} - 10\vec{v} \qquad , \qquad \vec{\omega} = 2\vec{u} - 4\vec{u}$$

$\vec{\omega} = 2\vec{u} - 4\vec{u} = (2-4)\vec{u} = -2\,\vec{u}$

$|\vec{\omega}| = |-2\,\vec{u}| = |-2|\,.|\vec{u}| = 2 \times 3 = 6$

$\vec{C} = \frac{1}{5}\,\vec{v} + 3\vec{v} - 10\vec{v} = \left(\frac{1}{5} + 3 - 10\right)\vec{v} = -\frac{34}{5}\,\vec{v}$

$|\vec{C}| = \left|-\frac{34}{5}\,\vec{v}\right| = \left|-\frac{34}{5}\right|\,.|\vec{v}| = \frac{34}{5} \times 5 = 34$

4- Tîrên xêzikî girêdayî

Em ji her du tîrên $\vec{u}\,,\vec{v}$ re dibêjin xêzikî girêdayî ne heger tîrek encama ya din be bi hevdana wê bi hejmareke rast.

Ango: Heger $k \in \mathbb{R}$ hat dîtin, wê demê:

$$\vec{u} = k\,.\vec{v} \qquad \text{yan jî} \qquad \vec{v} = k\,.\vec{u}$$

- **Encam**

1. Tîra sifirî bi çi tîreke din be, xêzikî girêdayî ye, ji ber ku $\vec{u}$ çi tîr be, wê demê: $\vec{0} = 0\,.\vec{u}$

2. Heger $\vec{u}\,,\vec{v}$ xêzikî girêdayî bin, ev tê wateya ku: $\vec{u} \,//\, \vec{v}$

3. **Vajî:** Heger $\vec{u} \,//\, \vec{v}$ be, ev tê wateya ku $\vec{u}\,,\vec{v}$ xêzikî girêdayî ne.

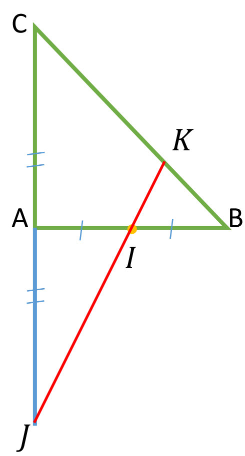
4. Heger $\vec{u}\,,\vec{v}$ xêzikî ne girêdayî bin, wê demê her du tîr ne rastênhev in.

5. Heger A , B , C sê xal bin û du tîr ji tîrên ku bi van xalan destnîşan dibin, xêzikî girêdayî bin, wê demê xalên A , B , C li ser heman rastekê ne û ev xal sergoşeyên sêgoşeyê çênakin.

Lê heger her du tîr xêzikî ne girêdayî bin, wê demê xalên A , B , C sergoşeyên sêgoşeyê çêdikin.

Mînak: **Heger BAC di A de sêgoşeyeke tîk be û I nîvê $\overrightarrow{AB}$ be û J hemaliyê C li gorî A be û K xaleke ku $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$**

Em tekez bikin ku I, J û K li ser heman rastekê ne.



Çareserî:

Ji bo tekezkirinê, divê em tekez bikin ku $\overrightarrow{IJ}$ û $\overrightarrow{IK}$ bi hev ve girêdayî ne.

Li gorî Şasles, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ **(1)**

$$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \qquad (2)$$

Li vir tê dîtin ku $\overrightarrow{IJ} = -3\,\overrightarrow{IK}$ ye, li gorî vê; her du tîrên $\overrightarrow{IJ}$ û $\overrightarrow{IK}$ bi hev ve girêdayî ne.

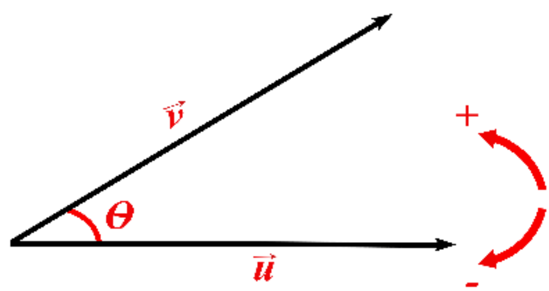
5- Goşeya di navbera du tîran de

Heger $\vec{u}$, $\vec{v}$ du tîr bin, wê demê goşeya di navbera wan de goşeyeke tîrkirî ye û bi sembola $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \theta$ tê nîşankirin.

Em ji $\vec{u}$ re dibêjin kenarê destpêkê û ji $\vec{v}$ re dibêjin kenarê dawiyê.

Heger $\vec{u}$ bi aliyê pozîtîv bizivire ji bo cara yekem li ser $\vec{v}$ bisekine û goşeyeke ku pîvana wê (θ) be nîşan bike û piştre $\vec{u}$ dewreyeke tam ziviri ji bo li ser $\vec{v}$ careke din bisekine, wê demê goşeyeke ku pîvana wê $(\theta + 2\pi)$ be nîşan bike û hwd.

Lê heger $\vec{u}$ bi aliyê nîgetîv zivirî û cara yekem li ser $\vec{v}$ sekinî, wê demê goşeyeke ku pîvana wê $(\theta - 2\pi)$ nîşan dike.



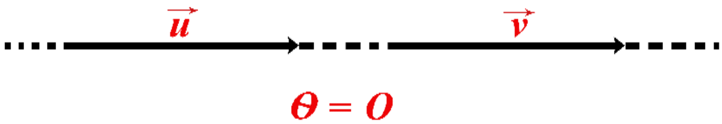
- **Encam**

Ji goşeya tîrkirî re hejmareke bêdawî ji pîvanan heye û bi vê têkiliyê tê dayîn:

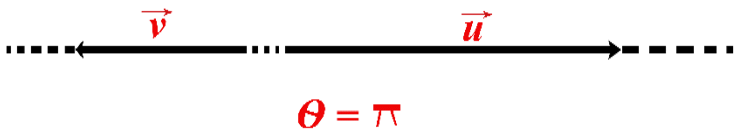
$$\theta + 2\pi k \ : \ k \in \mathbb{Z}$$

- **Têbînî**

1. Heger $\vec{u}$, $\vec{v}$ li ser heman rahiştekê bin û bi heman alî bin, wê demê: $\theta = 0$

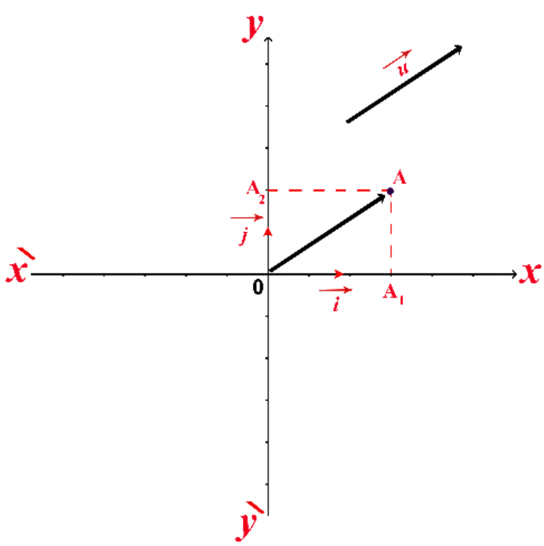


2. Heger $\vec{u}$, $\vec{v}$ li ser heman rahiştekê bin û aliyên hevdij bin, wê demê: $\theta = \pi$



6- Teqaleya kordînatî û kordînata levhatî

Komikeke kordînatî heye ku tewareyên wê $x'x$, $y'y$ bin:



Em ji tîra $\vec{i}$ re dibêjin tîra menê li ser tewareya $x'x$

Em ji tîra $\vec{j}$ re dibêjin tîra menê li ser tewareya $y'y$

Li gorî ku: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$

Di heman demê de: $(\widehat{\vec{i}\ ,\ \vec{j}}) = \frac{\pi}{2}$

Di vê rewşê de, em ji teqaleyê re dibêjin kordînata levhatî ye û bi sembola $(\boldsymbol{O}\,, \vec{\imath}\,, \vec{\jmath})$ tê nîşankirin.

Heger $\vec{u}$ tîrek di vê teqaleyê de be û $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ be û cotên rêzkirî yên A bibe $(x\,, y)$

Heger $A_1\,, A_2$ êxistinên xala A li ser tewareyan be, wê demê:

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$$

Ji ber ku $|OA_1| = x$, $|\vec{\imath}| = 1$ ye, wê demê $\overrightarrow{OA_1}$, $\vec{\imath}$ li ser heman rahiştekê ne $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{OA_1} = x\,\vec{\imath}$

Ji ber ku $|OA_2| = y$, $|\vec{\jmath}| = 1$ ye, wê demê $\overrightarrow{OA_2}$, $\vec{\jmath}$ li ser heman rahiştekê ne $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{OA_2} = y\,\vec{\jmath}$

Em dibînin ku: $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$

Ev raveyeke analîzî ye ji tîra $\vec{u}$ re û em dikarin bi awayekî kurt binivîsînin: $\vec{u}\,(x\,, y)$

Em ji $\overrightarrow{OA}$ re dibêjin tîra navendê ji xala A re

- **Encam**

1. Heger $\vec{u} = x_1\,\vec{\imath} + y_1\,\vec{\jmath}$, $\vec{v} = x_2\,\vec{\imath} + y_2\,\vec{\jmath}$ be, wê demê:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2)\vec{\imath} + (y_1 + y_2)\vec{\jmath}$$

2. Heger $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$: $a \in \mathbb{R}$ be, wê demê:

$$a\,.\vec{u} = (a\,.x)\vec{\imath} + (a\,.y)\vec{\jmath}$$

3. Goşeya tîra $\vec{u}$ bi tewareya $x'x$ re, tewareya tîrkirî ye:

$$(\vec{\imath}\,\widehat{,}\,\vec{u}) = (\vec{\imath}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OA})$$

4. Goşeya tîra $\vec{u}$ bi tewareya $y'y$ re, tewareya tîrkirî ye:

$$(\widehat{\vec{j}\,,\,\vec{u}}) = (\widehat{\vec{j}\,,\,\overrightarrow{OA}})$$

5. Heger $(\vec{\imath}\,,\vec{u}) = \theta$ be, wê demê: $(\vec{\jmath}\,,\vec{u}) = \frac{\pi}{2} - \theta$

6. Heger $A(x_A\,,y_A)$, $B(x_B\,,y_B)$ du xal bin, wê demê:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath}$$

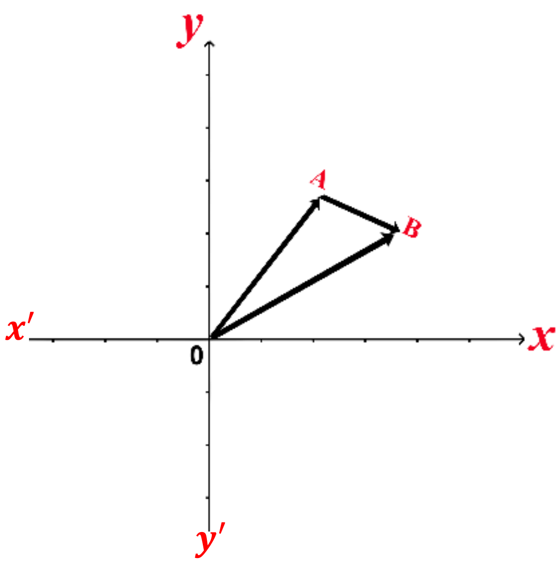
Ew jî raveyeke analîzî ji tîrê re di teqaleyê de ye.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB} = (x_B\,\vec{\imath} + y_B\,\vec{\jmath}) - (x_A\,\vec{\imath} + y_A\,\vec{\jmath})$

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath}$



Mînak: Heger $A(2\,,3)$, $B(-1\,,5)$ du xal bin, em raveya analîzî ji tîra $\overrightarrow{AB}$ re bibînin:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-1 - 2)\vec{\imath} + (5 - 3)\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = -3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}(-3\,,2)$$

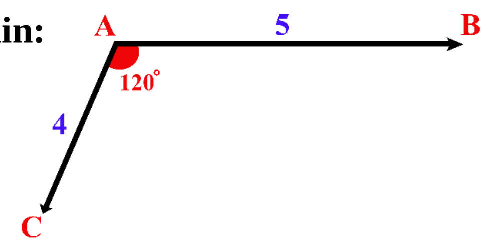
Em ji $(-3\,,2)$ re dibêjin pêkhateyên tîrê.

7- Hevdana xalî ji du tîran re

Heger $(\vec{u} \widehat{,} \vec{v}) = \theta$ be, wê demê hevdana xalî ji her du tîrên $\vec{u}\,,\vec{v}$ re, hejmareke rast e û bi sembola $\vec{u}\,.\vec{v}$ tê nîşankirin û têkiliya wê bi vî awayî ye:

$$\vec{u}\,.\vec{v} = |\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|\,.\cos(\theta)$$

Mînak: Em $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC}$ bibînin:



$$\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos(\theta)$$

$$= 5 \times 4 \times \cos(120)^{\circ}$$

$$= 20 \times \cos(180 - 60)$$

$$= -20 \times \cos(60)^{\circ}$$

$$= -20 \times \frac{1}{2}$$

$$= -10$$

- **Encam**

1) $\vec{v}\,.\,\vec{u} = |\vec{v}|\,.\,|\vec{u}|\,.\,cos\,(-\theta) = \vec{u}\,.\,\vec{v}$

2) **Heger** $\vec{u} \perp \vec{v}$ **be, wê demê:** $(\vec{u} \widehat{,} \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$$\Longrightarrow \vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$$

3) **Vajî: Heger** $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ **be, wê demê:** $\vec{u} \perp \vec{v}$

4) **Ji têkiliya** $\vec{u}\,.\,\vec{v} = |\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|\,.\,cos\,(\theta)$ **em dibînin ku:**

$$cos\,(\theta) = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{|\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|}$$

5) **Dema ku** $\vec{u}\,.\,\vec{u}$ **be, wê demê:**

$$\vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 \Longrightarrow \vec{i}^2 = |\vec{i}|^2 = 1 \quad , \quad \vec{j}^2 = |\vec{j}|^2 = 1$$

6) $\vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{j}\,.\,\vec{i} = 0$

Mînak: Heger $\vec{u}\,,\vec{v}$ **du tîr bin û** $|\vec{u}| = 2\,,\ |\vec{v}| = 3$ **û** $\vec{u}.\vec{v} = 3$ **be, em pîvana goşeya** (θ) **ya di navbera wan de bibînin:**

$$cos\,(\theta) = \frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{|\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|} = \frac{3}{2 \times 3} = \frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

8- Raveyên analîzî

1. Raveya analîzî ji hevdana xalî re di teqaleyê de

Di kordînata levhatî de $(O, \vec{i}, \vec{j})$ her du tîrên li jêr hene:

$$\vec{u} = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} \quad , \quad \vec{v} = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j}$$

Wê demê:

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = (x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j})\,.\,(x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j})$$

$$= x_1\,.\,x_2\,\vec{i}^2 + y_1\,.\,y_2\,\vec{j}^2 + (x_1\,.\,y_2 + y_1\,.\,x_2)\vec{i}\,.\,\vec{j}$$

$$\Longrightarrow \vec{u}\,.\,\vec{v} = x_1\,.\,x_2 + y_1\,.\,y_2$$

Mînak: **Heger $\vec{u}\,(2,3), \vec{v}\,(1,4)$ be, em $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ bibînin:**

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = x_1\,.\,x_2 + y_1\,.\,y_2 = 1 \times 2 + 4 \times 3 = 2 + 12 = 14$$

2. Raveya analîzî ji yeksaniya du tîran re

Heger $\vec{u} = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} \quad , \quad \vec{v} = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j}$ be, wê demê:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ , \ y_1 = y_2$$

- **Rewşeke taybet**

$$\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow x_1 = 0 \ , \ y_1 = 0$$

3. Raveya analîzî ji girêdana xêzikî re

Di kordînata levhatî $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de her du tîrên li jêr hene:

$$\vec{u} = x_1 \vec{\imath} + y_1 \vec{\jmath} \quad , \quad \vec{v} = x_2 \vec{\imath} + y_2 \vec{\jmath}$$

Heger $k \neq 0$, $\vec{u} = k . \vec{v}$ be, wê demê:

$$(x_1 \vec{\imath} + y_1 \vec{\jmath}) = k . (x_2 \vec{\imath} + y_2 \vec{\jmath})$$

$$\Longrightarrow x_1 = k . x_2 \quad , \quad y_1 = k . y_2$$

$$\Leftrightarrow k . x_2 . (y_1) = x_1 . (k . y_2)$$

Raveya analîzî ji girêdana xêzikî re:

$$x_1 . y_2 - x_2 . y_1 = 0$$

Mînak: Heger $\vec{u}(-1, 4)$, $\vec{v}(\frac{1}{2}, -2)$ du tîr bin, em tekez bikin ku her du tîr xêzikî girêdayî ne.

$$x_1 . y_2 - x_2 . y_1 = (-1)(-2) - \frac{1}{2} \times 4 = 2 - 2 = 0$$

Em dibînin ku her du tîr xêzikî girêdayî ne.

- **Encam**

1. Heger $\vec{u} = x_1 \vec{\imath} + y_1 \vec{\jmath}$ tîrek be, wê demê:

$$\vec{u} . \vec{u} = x_1 . x_1 + y_1 . y_1$$

Lê: $|\vec{u}|^2 = \vec{u}^2$

$$\Longrightarrow |\vec{u}|^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 \Longrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2}$$

2. Heger $\vec{u} = x_1 \vec{\imath} + y_1 \vec{\jmath}$, $\vec{v} = x_2 \vec{\imath} + y_2 \vec{\jmath}$ du tîr bin û $cos(\theta) = \frac{\vec{u} . \vec{v}}{|\vec{u}| . |\vec{v}|}$ be, em dibînin ku:

$$cos(\theta) = \frac{x_1 . x_2 + y_1 . y_2}{\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2} \times \sqrt{x_2{}^2 + y_2{}^2}}$$

Mînak: Heger $\vec{u}\,(3,-1), \vec{v}\,(-2,4)$ du tîr bin û $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \theta$ be, em $cos(\theta)$ bibînin:

$$cos(\theta) = \frac{x_1 \,.\, x_2 + y_1 \,.\, y_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} \times \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}}$$

$$= \frac{3 \times (-2) + (-1) \times (4)}{\sqrt{9+1} \times \sqrt{4+16}}$$

$$= \frac{-6-4}{\sqrt{10} \times \sqrt{20}}$$

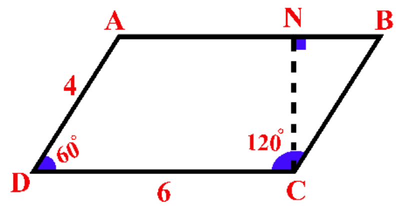
$$= \frac{-10}{10\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

- **Agahî**

Em dizanin ku kar yeksanî hêz hevdanî veguhestinê û em dizanin ku kar enerjî ye û ji ber ku enerjî bi qasiyeke hejmarî tê şîrovekirin, em dikarin hevdana hêzê bi veguhestinê bi navê hevdana xalî ji her du tîrên hêz û veguhestinê nas bikin, wê demê hevdana wan hejmareke rast e.

HÎNDARÎ

1. Em teşeya li jêr bibînin:



- Em encamên bikaranînên li jêr bibînin:

$$\overrightarrow{DA}\,.\,\overrightarrow{DC} \qquad , \qquad \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD}$$

- Heger N êxistina C li ser kenara AB be, em encamên bikaranînên li jêr bibînin:

$$\overrightarrow{DC}\,.\,\overrightarrow{CB} \qquad , \qquad \overrightarrow{CN}\,.\,\overrightarrow{NB} \qquad , \qquad \overrightarrow{CN}\,.\,\overrightarrow{CB}$$

2. Heger $\vec{u}\,(2,-1), \vec{v}\,(1,1)$ du tîr bin û $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \theta$ be, em $cos(\theta)$ bibînin.

3. Em tekez bikin ku her sê xalên li jêr sergoşeyên sêgoşeyekê ne:

$$A(2,5) \quad , \quad B(4,-1) \quad , \quad C(-3,3)$$

4. Heger hevdana xalî ji her du tîrên $\vec{u}, \vec{v}$ re yeksanî 14 be û heger $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 7$ be, em pîvana goşeya $(\vec{u}\,\hat{,}\,\vec{v}) = \theta$ bibînin.

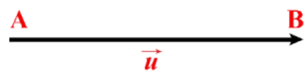
WANEYA DUYEM: DI VALAHIYÊ DE TÎR

Me berê nas kiriye ku du cureyên qasiyan hene: Qasiyên hejmarî û qasiyên tîrî di teqaleya du durahî de.

Niha em ê qasiyên tîrî di valahiyê (sê durahî) de nas bikin.

1- Pênase

- **Tîr: Me berê tîr nas kiriye û gotiye ku parçerastekeke tîrkirî ye, dirêjhahiyek û aliyekî destnîşankirî jê re he**

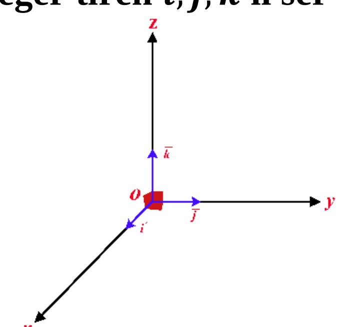


Bi sembola $\overrightarrow{AB}$ yan jî $\vec{u}$ tê nîşankirin.

Di vê waneyê de em ê tîra di valahiyê de nas bikin.

- **Tîra menê: Tîra ku dirêjahiya wê yeksanî mena dirêjahiyê ye.**
- **Tîra mena bingehîn: Parçerastekeke tîrkirî ye, destpêka wê xala destpêka tîrê ye, dirêjahiya wê yeksanî mena dirêjahiyê ye û aliyê wê aliyê pozîtîv ê tewareyên $x'x, y'y, z'z$ ye.**

Heger $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ sê tewareyên di xala (O) de hevbirî bin û di heman teqaleyê de bin û heger tîrên $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ li ser van tewareyan bin li gorî ku:



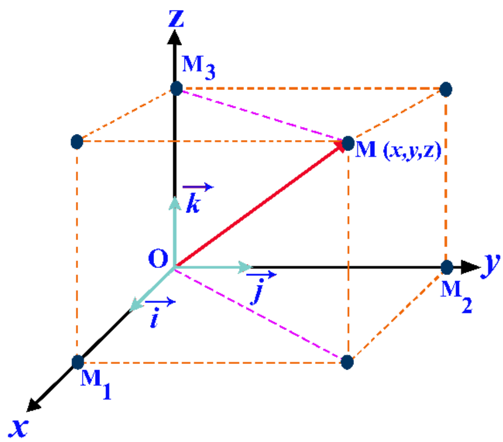
$$\widehat{(\vec{\imath},\vec{\jmath})} = \widehat{(\vec{\jmath},\vec{k})} = \widehat{(\vec{\imath},\vec{k})} = \frac{\pi}{2}$$

$$|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = |\vec{k}| = 1$$

Wê demê em ji tîrên $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ re dibêjin tîrên mena bingehîn û em ji $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ re dibêjin komika cotên rêzkirî ya rêxistinî yan jî kordînata levhatî.

- **Sêyîneyên rêzkirî yên xalekê di valahiyê de**

Heger $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ kordînateke levhatî be û (M) xalek ji valahiyê be, wê demê bi (x, y, z) tê nîşankirin.



Em dibînin ku:

$$OM_1 = x$$

$$OM_2 = y$$

$$OM_3 = z$$

Em ji tîra $\overrightarrow{OM}$ re dibêjin tîra navendê ji xala (M) re.

$$\Longrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Bi awayekî kurt wiha tê nivîsîn:

$$\overrightarrow{OM}(x\,, y\,, z)$$

Li gorî ku em dibînin ku OM eşkêla pirîzmayeke milkêşê ku durahiyên wê x, y, z bin, wê demê dirêjahiya wê $\overrightarrow{OM}$ ye:

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Li gorî rêgeza durahiya di navbera du xalan de.

Di heman demê de, em dibînin ku:

$$\vec{i}(1,0,0) \Rightarrow |\vec{i}| = 1$$

$$\vec{j}(0,1,0) \Rightarrow |\vec{j}| = 1$$

$$\vec{k}(0,0,1) \Rightarrow |\vec{k}| = 1$$

Mînak: Heger $A(2,-1,3)$, $B(0,4,-3)$ be, em dirêjahiyên $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ bibînin:

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(0)^2 + (4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

2- Bikaranînên li ser tîran di valahiyê de

❖ Komkirina tîran di valahiyê de

Heger $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ du tîr bin di valahiyê de, wê demê:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$$

Mînak: Heger $\vec{u}(4,-4,0)$, $\vec{v}(-1,5,2)$ du tîr bin em $\vec{u} + \vec{v}$ bibînin:

$$\vec{u} + \vec{v} = (4-1)\vec{i} + (-4+5)\vec{j} + (0+2)\vec{k}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

* Taybetiyên komkirinê

Heger $\vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ bin, wê demê:

- **Komkirina tîran bikaranîneke hundirîn e:**

$$\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

- **Komkirina tîran bikaranîneke hevguhêr e:**

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

- **Komkirina tîran bikaranîneke yekgirtî ye:**

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{\omega}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{\omega})$$

- **Tîra sifirî li gorî komkirinê endamê bêbandor e:**

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$$

- **Hevbera tîra $\vec{u}$ li gorî komkirinê dija $-\vec{u}$ ye li gorî ku:**

$$\vec{u}+(-\vec{u})=-\vec{u}+\vec{u}=\vec{0}$$

- **Têbînî**

Derxistina du tîran, komkirina tîra yekem bi hevdija tîra duyem e:

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$$

❖ Hevdana tîrekê bi hejmareke rast

Heger $\vec{u}(x\,,y\,,z)\ \in \mathbb{R}^3$ bin û heger $k\in\ \mathbb{R}$ be, wê demê:

$$k\vec{u}=(kx\,,ky\,,kz)$$

Mînak: Dema hevdana hejmara (3) bi tîra $\vec{u}(2\,,-1\,,4)$, em dibînin ku:

$$3\vec{u}=(3\times 2\,,3\times(-1)\,,3\times 4)$$
$$=(6\,,-3\,,12)$$

❖ Taybetiyên hevdana tîrekê bi hejmareke rast

Heger $\vec{u}\,,\vec{v}\ \in \mathbb{R}^3$ bin û heger $a,b\in\ \mathbb{R}$ bin, wê demê:

1. Taybetiya belavkirinê: $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$

2. Taybetiya tevlihevkirinê: $a(b\vec{u})=b(a\vec{u})=(ab)\vec{u}$

Mînak: Heger $\vec{u}(-1\,,5\,,3)$, $\vec{v}(4\,,-1\,,3)$ du tîr bin, wê demê:

$$
\begin{aligned}
2\vec{u} - 3\vec{v} &= 2(-1\,,5\,,3) - 3(4\,,-1\,,3) \\
&= (-2\,,10\,,6) - (12\,,-3\,,9) \\
&= (-2\,,10\,,6) + (-12\,,3\,,-9) \\
&= (-14\,,13\,,-3)
\end{aligned}
$$

Rahênan: Heger $\vec{u}(2\,,-3\,,1)$, $\vec{v}(0\,,2\,,-2)$ du tîr bin:

1. Em $5\vec{u} - 2\vec{v}$ bibînin.

2. Heger $3\vec{\omega} - 4\vec{v} = \vec{u}$ be, em tîra $\vec{\omega}$ û piştre $|\vec{\omega}|$ bibînin.

3- Yeksaniya du tîran di valahiyê de

Heger $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ be, wê demê:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x_1 = x_2\,, y_1 = y_2\,, z_1 = z_2$$

Mînak: Em nirxê $a\,, b\,, c$ yê ku her du tîrên li jêr dike yeksan bibînin:

$$\vec{v}(5\,,1\,,\ c^2)\quad,\quad \vec{u}(a-4\,,\ b^2-3\,,1)$$

Ji ber ku $\vec{u} = \vec{v} \;\Longrightarrow$

$$a - 4 = 5 \Longrightarrow a = 9$$

$$b^2 - 3 = 1 \Longrightarrow\ b^2 = 4 \Longrightarrow b = \pm 2$$

$$c^2 = 1 \Longrightarrow c = \pm 1$$

4- Raveya analîzî ji tîrekê re di valahiyê de

Heger A , B du xal di valahiyê de bin û $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ji wan re du tîrên navendê bin, wê demê:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \implies \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

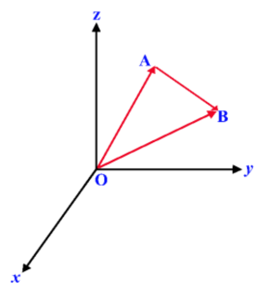
$$\overrightarrow{AB} = \left(x_B\vec{\imath} + y_B\vec{\jmath} + z_B\vec{k}\right) - \left(x_A\vec{\imath} + y_A\vec{\jmath} + z_A\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_B\vec{\imath} + y_B\vec{\jmath} + z_B\vec{k}\right) + \left(x_A\vec{\imath} - y_A\vec{\jmath} - z_A\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\,\vec{k}$$

Ango: Raveya analîzî ji tîra $\overrightarrow{AB}$ re di valahiyê de, bi vê têkiliyê ye:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\,\vec{k}$$



Mînak: Heger $A(-2\,,3\,,1)$, $B(4\,,0\,,4)$ du xal bin di valahiyê de, wê demê:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = (4+2)\vec{\imath} + (0-3)\vec{\jmath} + (2-1)\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = 6\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}$$

Bi kurtahî wiha tê nivîsîn: $\overrightarrow{AB}(6\,,-3\,,1)$

Rahênan: Heger $N(1\,,4\,,-1)$, $M(2\,,-3\,,0)$ du xal bin, em $\overrightarrow{MN}$ bibînin

5- Raveya analîzî ji hevdana xalî re di valahiyê de

Heger $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ du tîr bin, wê demê raveya analîzî ji hevdana wan a xalî re:

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = |\vec{u}| \,.\, |\vec{v}| \,.\, \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$= x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2$$

Dema ku $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$ wê demê:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2 = 0$$

Em dibînin ku: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \,.\, \vec{v}}{|\vec{u}| \,.\, |\vec{v}|}$

$$= \frac{x_1 . x_2 + y_1 . y_2 + z_1\, z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \times \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Mînak: Heger her du tîrên li jêr hebin:

$$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} \quad , \quad \vec{v} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

1. Em $\vec{u} \,.\, \vec{v}$ bibînin û piştre bibînin ka $\vec{u} \perp \vec{v}$ yan na?

2. Heger $(\vec{u} \hat{,} \vec{v}) = \theta$ be, em $\cos(\theta)$

Çare:

1) $\vec{u} . \vec{v} = x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2$

$$= 2 \times 4 + (-1)(-4) + (-2) \times 2 = 8 + 8 - 4 = 12$$

Her du tîr ne hevtîk in.

2) $|\vec{u}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$, $|\vec{v}| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|} = \frac{12}{3 \times 6} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Rahênan: Em tekez bikin ku her du tîrên li jêr hevtîk in:

$$\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \,,\quad \vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

6- Raveya analîzî ji hevdana tîrî di valahiyê de

Heger $\vec{u}$, $\vec{v}$ du tîr bin û $(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v}) = \boldsymbol{\theta}$ be li gorî ku:

$$\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{k}.\boldsymbol{\pi} \ \ : \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$$

Hevdana tîrî ji her du tîrên $\vec{u}$, $\vec{v}$ re, tîreke sêyem e $\vec{\omega}$ û bi sembola $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tê nîşankirin û bi awayê $\vec{\omega} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tê nivîsîn.

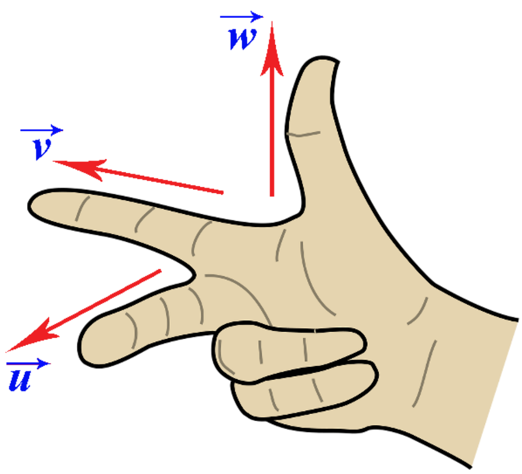
Endamên $\vec{\omega}$:

1. Rahişteka wê rastekeke li ser teqaleya her du tîrên $\vec{u}$, $\vec{v}$ tîk e.

2. Aliyê wê li gorî rêgeza tiliyên destê rastê tê nîşankirin.

3. Dirêjahiya wê:

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}|.\,|\vec{v}|\ |\boldsymbol{sin\theta}|$$



- **Encam**

- $\vec{u} \wedge \vec{u} = 0$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- $(\propto \vec{u}) \wedge (\boldsymbol{\beta}\,\vec{v}) = (\propto\ \boldsymbol{\beta})(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- **Heger herî kêm yek ji her du tîrên $\vec{u}$, $\vec{v}$ tîreke sifirî be, wê demê: $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$**

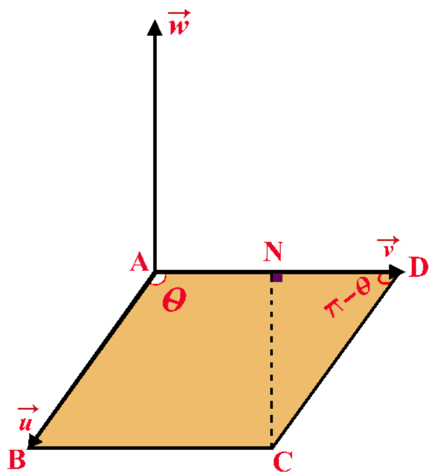
- Heger $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$ û $(\vec{u}\hat{;}\ \vec{v}) = \theta = \pi\, k$ be, wê demê: $sin\theta = 0 \Longrightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

- Em ji tiştên derbasbûyê encamê digirin ku $\vec{u}$, $\vec{v}$ xêzikî girêdayî ne û ev tê wateya ku:$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

- Heger $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{\omega}$ be, wê demê: $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{\omega}$

- Dirêjahiya hevdana tîrî ji du tîrên xêzikî ne girêdayî yeksanî rûbera kenarên rastênhev ên li ser her du tîrên ji xalekê xêzikirî.

Ji teşe em dibînin ku:



$$\sin(\pi - \theta) = \frac{CN}{CD} \Longrightarrow CN = CD.|sin(\pi - \theta)|$$

$$= CD.|sin\ \theta|$$

$$= \vec{u}.|sin\ \theta|$$

Heger S rûbera kenarên rastênhev be:

$$S = AD\,.\,CN = |\vec{u}|.\,|\vec{v}|\;|sin\theta|$$

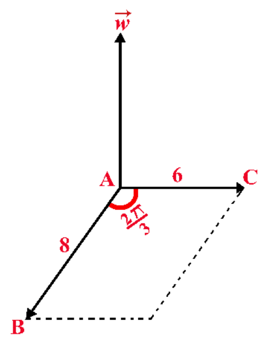
$$S = |\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|\;|sin\theta|$$

- **Rûbera sêgoşeya ABD yeksanî nîvê rûbera kenarên rastênhev ên derbasbûyî: $S(ABD) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right|$**

Mînak: **Em bi xêzkirinê $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}$ bibînin li gorî ku:**

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = 6 \quad , \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = 8 \quad , \quad \left(\overrightarrow{AC}\hat{;}\, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Piştre rûbera kenarên rastênhev ên li ser her du tîrên $\overrightarrow{AB}$ û $\overrightarrow{AC}$ xêzkirî encamê bigirin.



Çare:

$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\,|sin\theta|$$

$$= 6 \times 8 \times \left|sin\frac{\pi}{3}\right|$$

$$= 48 \times \left|sin\frac{\pi}{3}\right| = 48 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

$$S = \left|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}\right| = 24\sqrt{3}$$

Niha em raveya analîzî ji hevdana tîrî re nas bikin:

Heger $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ du tîr bin, wê demê raveya analîzî ji hevdana wan a tîrî re:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Mînak: **Heger her du tîrên li jêr hebin:**

$$\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \qquad\qquad \vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

Em tîra $\vec{u} \wedge \vec{v}$ bibînin û rûbera kenarên rastênhev a li ser her du tîran xêzkirî bibînin:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (1-3)\vec{i} - (2+4)\vec{j} + (6+4)\vec{k} = -2\vec{i} - 6\vec{j} + 10\vec{k}$$

Heger S rûbera kenarên rastênhev ên li ser her du tîran xêzkirî be:

$$S = |\vec{u} \wedge \vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (10)^2} = \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$$

Rahênan:

1) Em rûbera sêgoşeya li ser her du tîrên li jêr xêzkirî bibînin:

$$\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k} \quad , \quad \vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

2)Heger $A(3, 2, -4)$, $B(5, 4, -6)$, $C(9, 8, -10)$ sê xal bin Em raveya analîzî ji tîra $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}$ bibînin. Em çi encamê digirin?

- **Agahî**

Em dizanin ku torka hêzê yeksanî zend hevdanî hêzê û ji ber ku pêdiviya torkê bi nîşankirina aliyê heye, wê demê tork qasiyeke tîrî ye, ji ber vê tork hevdana tîrî ji her du tîrên ku zend û hêzê destnîşan dike û encam tîrek e.

HÎNDARÎ

1. Heger li gorî $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ be, $\vec{u}, \vec{v}$ du tîr bin:

$$\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} \quad , \quad \vec{v} = 4\vec{i} - \lambda\vec{j} + 2\vec{k}$$

Em nirxê λ bibînin ji bo ku $\vec{u} \perp \vec{v}$ be

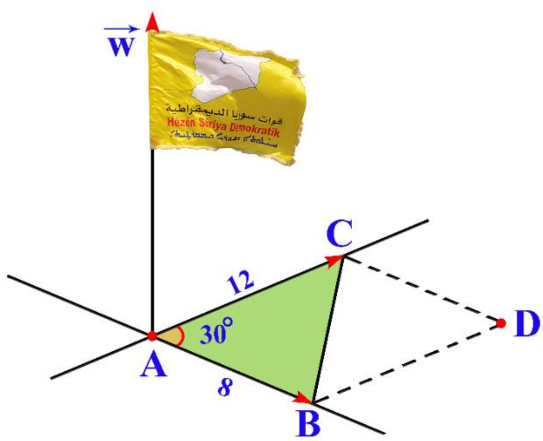
2. Heger $A(1,2,-3)$, $B(2,-1,0)$, $C(3,6,5)$ sê xal bin:

- Em tekez bikin ku her sê xal li ser heman rastekê ne.

- Em raveya analîzî ji tîra $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ bibînin û piştre rûbera sêgoşeya ABC bibînin.

3. Li qada Newrozê ji bo ku em ala QSD bi awayê tîk di erdê de biçikînin, em ê du rastekên hevbirîn li ser erdê xêz bikin ku qoşeya wan 30 pile be.

Em li teşeya li jêr binêrin û rûbera sêgoşeya ABC bibînin:



4. Di kordînata levhatî $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de, heger A, B, C sê xal bin:

$$A\ (2,6,1), \qquad B\ (0,3,-1), \qquad C\ (-2,0,2)$$

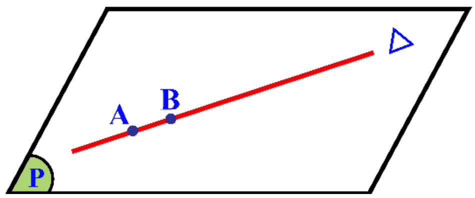
ABC sêgoşe ye yan na?

WANEYA SÊYEM: DI VALAHIYÊ DE TEQALE

Em ê di vê waneyê de, fêrî awayên cuda ji hevkêşeyên teqaleyî di valahiyê de, bibin ji ber ku di endeziyarî, tesmîm û pêkanînên zanista valahiyê de gelekî girîng e.

Teqale û rêbazên destnîşankirina wê

- **Teqale ruyekî hilû û bê sînor e, heger rastekek pê re hevbeş di bêtirî xalekê de, yeksaneyî wê be. (Ango di her xaleke rastekê de, hevbeş bin.)**



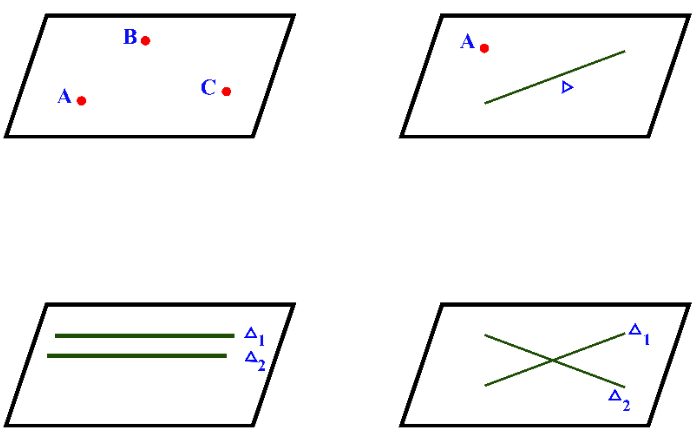
- **Teqale bi gelek rêbazan destnîşan dibe:**

1. Bi du rastekên hevbirîn.

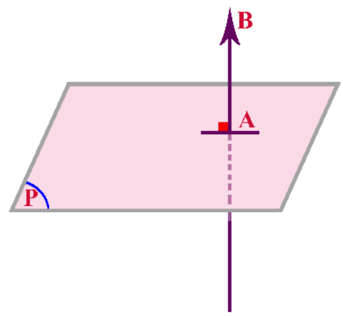
2. Bi du rastekên rastênhev.

3. Bi rastekekê û xaleke derveyî wê.

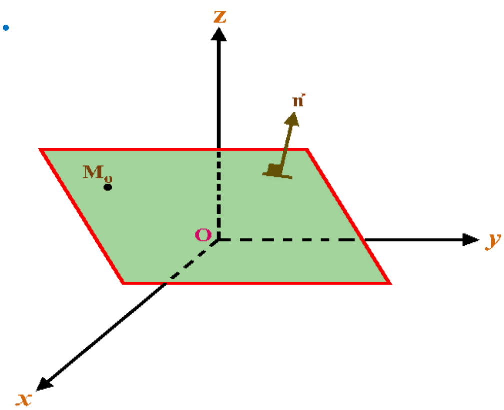
4. Bi sê xalên ne li ser heman rastekê.



- **Em ji tîra $\overrightarrow{AB}$ re dibêjin li ser teqaleya P tîk e, heger rasteka AB li ser vê teqaleyê tîk be.**



1- Hevkêşeya teqaleya di xaleke naskirî re diçe û li ser tîreke naskirî tîk be.



Heger $M_0(x_0, y_0, z_0)$ xaleke naskirî be ku teqaleya P ya li ser tîra $\vec{n}\,(a, b, c)$ tîk, tê re derbas bibe û heger $M(x, y, z)$ di vê teqaleyê de xaleke guhêr be, wê demê vê têkiliyê pêk tîne:

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$$

$$\Longrightarrow \vec{n}\,.\,\overrightarrow{M_0M} = 0$$

$$\Longrightarrow \vec{n}\,.\,(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}) = 0$$

$$\Longrightarrow \vec{n}\,.\,\overrightarrow{OM} - \vec{n}\,.\,\overrightarrow{OM_0} = 0$$

$$\Longrightarrow (a, b, c)(x, y, z) - (a, b, c)(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$\Longrightarrow ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

$$\Longrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$\Longrightarrow ax-ax_0+by-by_0+cz-cz_0=0$$

$$\Longrightarrow ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0$$

Em qaseya li jêr wiha sembol bikin:

$$-(ax_0+by_0+cz_0)=d$$

$$\Longrightarrow ax+by+cz+d=0$$

Ev hevkêşeya dîkartî ji teqaleya P re ye li gorî ku:

$$(a,b,c)\neq(0,0,0)$$

- **Teorî**

Her hevkêşeyeke bi awayê $ax+by+cz+d=0$ li gorî ku $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ be, teqaleyeke di valahiyê de, pênase dike ku tîra $\vec{n}\,(a,b,c)$ li ser wê tîk be.

Lê hevkêşeya teqaleya ku di xala $M_0(x_0,y_0,z_0)$ re diçe û li ser tîra $\vec{n}\,(a,b,c)$ tîk be, wiha ye:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Mînak: **Hevkêşeya teqaleya ku di xala $A(2,5,-1)$ re diçe û tîra $\vec{n}(2,-3,1)$ li ser wê tîk be wiha ye:**

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

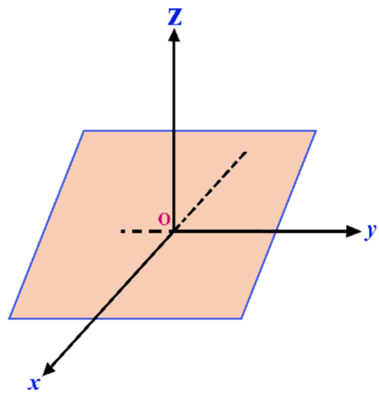
$$2(x-2)-3(y-5)+1(z+1)=0$$

$$2x-4-3y+15+z+1=0$$

$$2x-3y+z+12=0$$

- **Rewşên taybet ji hevkêşeya teqaleyê re**

1. Teqaleya ku di navenda $O(0,0,0)$ re diçe:



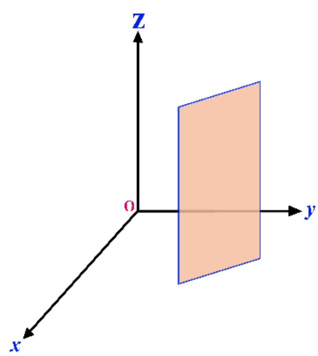
Kordînatên navendê hevkêşeya li jêr pêk tînin:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Em xala $O(0,0,0)$ di hevkêşeyê de bi cih bikin:

$$ax + by + cz = 0$$

2. Teqaleya rastênhevî tewareya $z'z$:



Teqaleya ku hevkêşeya wê bi vî awayî ye:

$$ax + by + cz + d = 0$$

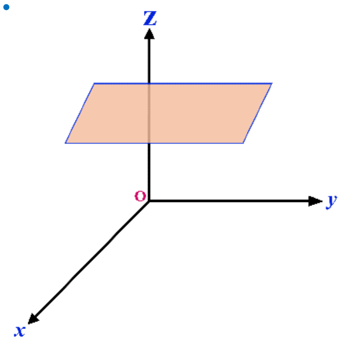
rastênhevî tewareya $z'z$

Heger tîra li ser wê tîk $\vec{n}\,(a, b, c)$ li ser tîra menê $\vec{k}\,(0, 0, 1)$ tîk be, ango $c = 0$ be, wê demê hevkêşe dibe bi vî awayî:

$$ax + by + d = 0$$

Em dibînin ku nenasa z di hevkêşeyê de tune ye.

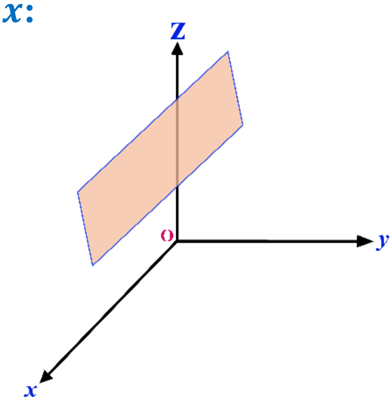
3. Teqaleya rastênhevî tewareya $y'y$:



Bi heman rêbazê em dibînin ku $b = 0$ wê demê hevkêşe dibe bi vî awayî: $\quad ax + cz + d = 0$

Em dibînin ku nenasa y di hevkêşeyê de tune ye.

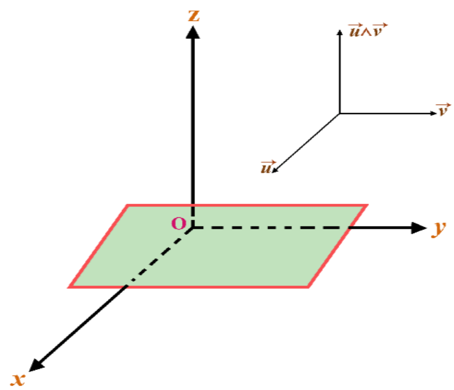
4. Teqaleya rastênhevî tewareya $x'x$:



Bi heman rêbazê em dibînin ku $a = 0$ wê demê hevkêşe dibe bi vî awayî: $by + cz + d = 0$

Em dibînin ku nenasa x di hevkêşeyê de tune ye.

2- Hevkêşeya teqaleya ku di xaleke naskirî re diçe û rastênhevî du tîrên naskirî ye



Heger P teqaleyeke rastênhevî her du tîrên xêzikî ne girêdayî $\vec{u}$, $\vec{v}$ be û heger $\vec{n}$ li ser $\vec{u}$, $\vec{v}$ tîk be û piştre $\vec{n}$ û $\vec{u}$^$\vec{v}$ xêzikî girêdayî bin, wê demê: $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

Rewş vedigere rewşa yekê ya ku me giftûgo kiriye.

Heger $M_0(x_0, y_0, z_0)$ xalxeke naskirî be û $\vec{u}\,(x_1, y_1, z_1)$ û $\vec{v}\,(x_2, y_2, z_2)$ du tîrên xêzikî ne girêdayî bin û ji bo dîtina teqaleya P ya di M_0 re derbas dibe û rastênhevî her du tîrên $\vec{u}$, $\vec{v}$, em hevkêşeya teqaleya ku di M_0 re diçe û li ser $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tîk binivîsînin:

Heger $M(x, y, z)$ xaleke guhêr be, wê demê:

$$\overrightarrow{M_0M} \,.\, (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 0$$

Lê: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_0M} \,.\, (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (x - x_0) \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - (y - y_0) \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + (z) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_0M}\,.(\vec{u}\wedge\vec{v})=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Bi vekirina vê diyarkerê em hevkêşeya teqaleya P bi dest dixin:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0$$

Mînak: **Em hevkêşeya teqaleya ku di xala (2,3,1) derbas dibe û rastênhevî her du tîrên $\vec{u}\,(1,2,-4)$, $\vec{v}(2,-2,1)$ bibînin.**

Çare:

$$\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-6\vec{\imath}-9\vec{\jmath}-6\vec{k}$$

Em dibînin ku: $\vec{n}\neq 0$

Her wiha $\vec{u}$ **,** $\vec{v}$ **xêzikî ne girêdayî ne û** $\vec{n}\,(-6,-9,-6)$ **tîreke li ser teqaleya P ya hatî xwestin tîk e.**

Wê demê hevkêşeya teqaleya P wiha ye:

$$-6\,(x-2)-9\,(y-3)-6\,(z-1)=0$$

$$\Rightarrow\ -6x-9y-6z+45=0$$

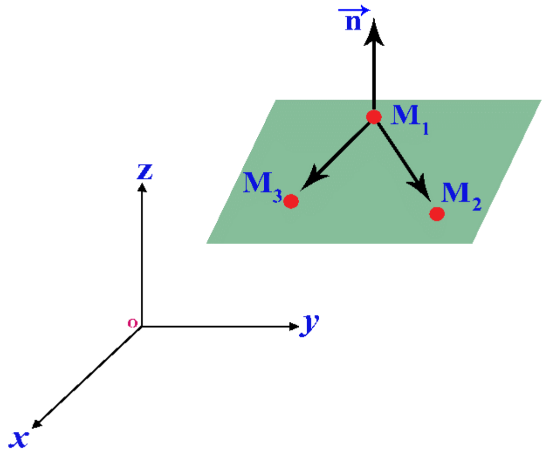
Ev hevkêşeya teqaleya P ya hatî xwestin.

- **Têbînî**

Me dikarîbû diyarkerê bi kar bînin:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0$$

3- Hevkêşeya teqaleya ku ji sê xalên naskirî ne li ser heman rastekê



Heger sê xal hebin:

$$M_1(x_1, y_1, z_1) \qquad M_2(x_2, y_2, z_2) \qquad M_3(x_3, y_3, z_3)$$

Heger her sê xal ne li ser heman rastekê bin:

$$\vec{u} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1)\vec{i} + (y_3 - y_1)\vec{j} + (z_3 - z_1)\vec{k}$$

Me hevkêşeya P ya ku di xala $M_1(x_1, y_1, z_1)$ re derbas dibe û rastênhevî her du tîrên $\vec{u}$, $\vec{v}$ dîtiye:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Bi vekirina vê diyarkerê em hevkêşeya teqaleya P bi dest dixin.

Mînak: Em tekez bikin ku her sê xalên li jêr ne li ser heman rastekê ne:

$$A\ (1, 2, 3) \qquad B\ (2, 1, 2) \qquad C\ (3, 3, 1)$$

Piştre em hevkêşeya teqaleya di her sê xalan re derbas dibe binivîsînin.

Çare:

Her du tîrên li jêr ne rastênhev in:

$$\overrightarrow{AB} = 1\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} - 1\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = 2\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} - 2\vec{k}$$

Ji ber ku: $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1}$

Ji bo dîtina hevkêşeya teqaleya di her sê xalan derbas dibe, em diyarkerê ji bo xalekê $M\ (x, y, z)$ ya di teqaleyê de, belav bikin:

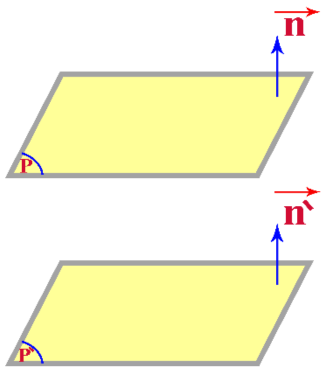
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$x + z - 4 = 0$ hevkêşeya teqaleya P ya hatî xwestin û ew teqaleyeke rastênhevî $y'y$

4- Rewşa du teqaleyan di valahiyê de

Rastênheviya du teqaleyan: **Du teqale rastênhev in, heger tîka li ser teqaleyekê li ser ya din jî tîk be, her wiha em girêdaneke xêzikî di navbera rasteka tîk li ser teqaleya yekem û rasteka tîk li ser teqaleya duyem dibînin.**



- **Têbînî**

Dema ku du teqale rastênhev bin, wê demê yan yeksaneyî ne û yan jî di tu xalan de ne hevbeş in.

Mînak: **Em tekez bikin ku her du teqaleyên li jêr rastênhev in û piştre bibînin ku yeksaneyî ne yan na?**

$$P_1: 3x - 2y + 3z + 2 = 0$$

$$P_2: -9x + 6y - 9z + 5 = 0$$

Çare:

Tîra $\overrightarrow{n_1}\ (3, -2, 3)$ li ser teqaleya yekem P_1 tîk e

Tîra $\overrightarrow{n_2}\ (-9, 6, -9)$ li ser teqaleya duyem P_2 tîk e

Diyar e ku $\overrightarrow{n_2} = -3\,\overrightarrow{n_1}$

Ango: Her du teqale xêzikî girêdayî ne û rastênhev in.

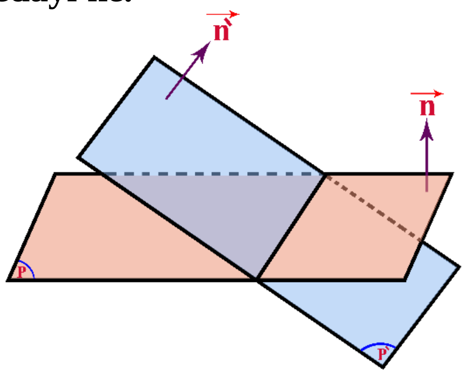
Bi parvekirina her du aliyên hevkêşeya teqaleya P_2 li hejmara (-3) em dibînin:

$$3x - 2y + 3z - \frac{5}{3} = 0$$

Em dibînin ku her du hevkêşeyên P_1 û P_2 cuda ne, her wiha her du teqale ne yeksaneyî ne.

5- Hevbirîna du teqaleyan

Her du teqaleyên ne rastênhev, di rastekekê de hevbirîn in û her tîreke li ser teqaleyekê tîk, bi tu tîreke tîk li ser a din xêzikî ne girêdayî ne.



Mînak: Em tekez bikin ku her du teqaleyên li jêr hevbirîn in:

$$P_1 : x + 4y - z + 5 = 0$$

$$P_2 : -4x + 3y - 3z + 7 = 0$$

Çare:

Tîra $\overrightarrow{n_1}\,(1, 4, -1)$ li ser teqaleya yekem P_1 tîk e

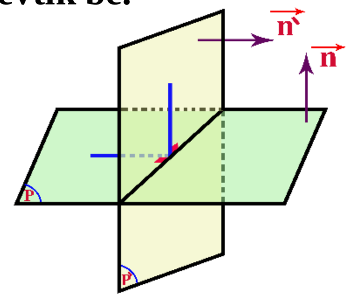
Tîra $\overrightarrow{n_2}\,(-4, 3, -3)$ li ser teqaleya duyem P_2 tîk e

Diyar e ku $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ xêzikî ne girêdayî ne ji ber ku $\frac{-1}{4} \neq \frac{4}{3}$

Ango: Her du teqale hevbirîn in.

- **Rewşeke taybet: Tîkiya du teqaleyan**

Du teqale hevtîk in, heger du tîkên li ser wan hevtîk bin, ango heger tîreke tîk li ser teqaleyekê bi tîreke din ya li ser teqaleya din tîk, hevtîk be.



Mînak: Em hevkêşeya teqaleya tîk li ser teqaleya ku hevkêşeya wê wekî li jêr be û di her du xalên $A\ (-2,1,3)$ û $B\ (-3,-1,2)$ re derbas dibe, bibînin:

$$x + 2y + 2z + 8 = 0$$

Çare: Heger P teqaleya xwestî be û ji ber ku li ser teqaleya din tîk e, wê demê hevkêşeya wê wiha ye:

$$x + 2y + 2z + 8 = 0$$

Wê demê teqaleya P rastênhevî tîra $\vec{u}\ (1,2,2)$

Ji ber ku P di her du xalên A û B re derbas dibe:

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2,1,0)$$

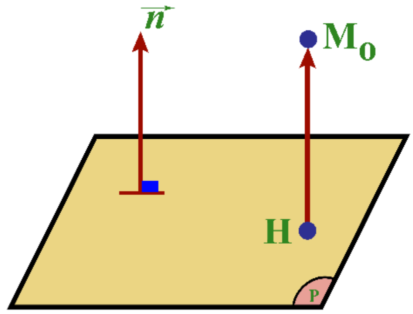
Hevkêşeya P ya di xala A re derbas dibe û heger $M\ (x,y,z)$ xalek jê be, dibe bi vî awayî:

$$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AM} = (1,2,2).\,(x+2,y-1,z-3) = -2x + y - 5$$

Ango hevkêşeya P dibe bi vî awayî: $2x - y + 5 = 0$

Ew teqaleyeke rastênhevî $z'z$ e.

6- Durahiya xaleke naskirî ji teqaleyeke naskirî



Heger hevkêşeya teqaleya P wekî li jêr be:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Heger xala $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ne di teqaleya P de be, em li durahiya xala M_0 ji teqaleya P bibînin.

Heger $H\ (x, y, z)$ êxistina tîk ji xala M_0 re be li ser teqaleya P û heger her du tîrên li jêr xêzikî girêdayî bin

$$\vec{n}\ (a, b, c) \quad , \quad \overrightarrow{HM_0}\ (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$$

Em dibînin ku:

$$\left|\vec{n} \,.\, \overrightarrow{HM_0}\right| = |\vec{n}| \,.\, \left|\overrightarrow{HM_0}\right|$$

$$\Longrightarrow \left|\overrightarrow{HM_0}\right| = \frac{\left|\vec{n} \,.\, \overrightarrow{HM_0}\right|}{|\vec{n}|}$$

$$\Longrightarrow \left|\overrightarrow{HM_0}\right| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax + by + cz)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Longrightarrow \left|\overrightarrow{HM_0}\right| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- **Teorî**

Heger hevkêşeya P wiha be:

$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$$

Heger M_0 xaleke ku kordînatên wê (x_0, y_0, z_0) bin, wê demê durahiya M_0 ji teqaleya P bi vê têkiliyê tê dayîn:

$$d(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Mînak: **Em durahiya xala $A\ (3, 1, 2)$ ji teqaleya P ya ku hevkêşeya wê wekî li jêr e, bibînin:**

$$4x - 12y + 3z + 7 = 0$$

Çare:

$$d(A, P) = \frac{|4 \times 3 - 12 \times 1 + 3 \times 2 + 7|}{\sqrt{(4)^2 + (12)^2 + (3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = \frac{13}{13} = 1$$

HÎNDARÎ

1. Em bersiva rast hilbijêrin:

- **Tîra tîk li ser teqaleya ku hevkêşeya wê wiha ye:**
  $$2x - 3y + 4z - 7 = 0$$
  Ev e:

  $\vec{n}\,(2, 2, 2)$ $\vec{n}\,(2, -3, 4)$ $\vec{n}\,(2, -3, -7)$

- **Hevkêşeya teqaleya ku di xala $(3, 5, -2)$ re derbas dibe û li ser tîra $(3, -1, 4)$ tîk, ev e:**

  $$x - y + 4z - 4 = 0$$

  $$3x + y + 4z + 4 = 0$$

  $$3x - y + 4z + 4 = 0$$

2. Em hevkêşeya teqaleya ku di xala $A\,(1, -2, 4)$ re derbas dibe û li ser rasteka BD tîk li gorî ku $B\,(3, 0, -3)$ û $D\,(-1, -3, 2)$ bibînin.

3. Em hevkêşeya teqaleya ku di xala $(-2, -1, 4)$ re derbas dibe û rastênhevî her du tîrên li jêr, bibînin:

$$\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{v} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

4. Em tekez bikin ku her sê xalên li jêr ne li ser heman rastekê ne:

$A\,(1, 2, -1)$ $B\,(3, 3, -1)$ $C\,(2, 1, -2)$

Piştre em hevkêşeya teqaleya di her sê xalan re derbas dibe bibînin.

5. Em hevkêşeya teqaleya ku di xala $A\ (-1, 2, -3)$ re derbas dibe û rastênhevî teqaleya P' a ku hevkêşeya wê wekî li jêr, bibînin:

$$-x + 2y + z - 3 = 0$$

6. Em bibînin ku her du teqaleyên li jêr rastênhev in û piştre durahiya di navbera wan de bibînin:

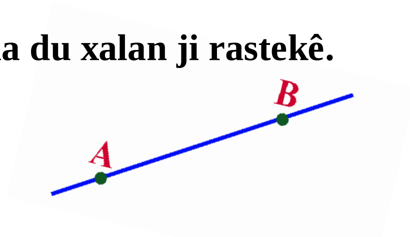
$$P_1: 4x - 2y - z + 7 = 0$$

$$P_2: 8x - 4y - 2z + 15 = 0$$

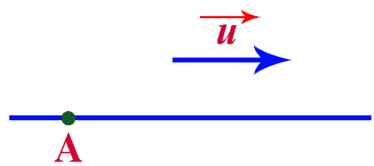
WANEYA ÇAREM: DI VALAHIYÊ DE RASTEK

- **Rêbazên destnîşankirina rastekê di valahiyê de**

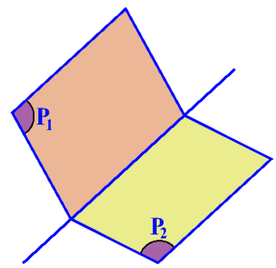
1. Bi naskirina du xalan ji rastekê.



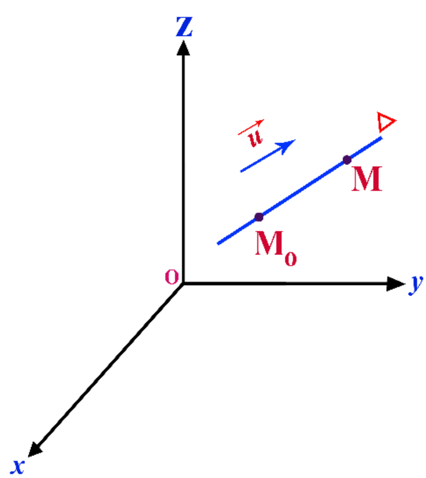
2. Bi naskirina xalekê jê û tîreke rastênhevî wê.



3. Bi naskirina du teqaleyan ku rastek di navbera wan de, hevbeş be.



1- Hevkêşeya rasteka ya ku di xalekê diyar re diçe û rastênhevî tîreke diyar:



Heger M_0 (x_0, y_0, z_0) xalek li ser rasteka Δ be û $\vec{u}(a, b, c)$ tîreke ne sifirî be û heger M (x, y, z) li ser rasteka Δ xaleke guhêr be, dema ku rasteka Δ rastênhevî tîra $\vec{u}$ be, wê demê her du tîrên $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{u}$ xêzikî girêdayî ne.

Her wiha hejmareke rast λ heye ku: $\overrightarrow{M_0M} = \lambda . \vec{u}$

Bi êxistina vê têkiliyê li ser tewareyan em dibînin ku:

$$(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} = \lambda\,(a, b, c)$$

$$(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} = a.\lambda\,\vec{i} + b.\lambda\,\vec{j} + c.\lambda\,\vec{k}$$

Bi yeksanîbûnê em dibînin ku:

$$x - x_0 = a.\lambda \Rightarrow x = x_0 + a.\lambda$$

$$y - y_0 = b.\lambda \Rightarrow y = y_0 + b.\lambda$$

$$z - z_0 = c.\lambda \Rightarrow z = z_0 + c.\lambda$$

Em ji komika li jêr dibêjin komika hevkêşeyên navînciyî ji rasteka Δ re ya ku di xala M_0 re diçe û rastênhevî tîra $\vec{u}$ ye:

$$\begin{cases} x = x_0 + a.\lambda \\ y = y_0 + b.\lambda \\ z = z_0 + c.\lambda \end{cases}$$

Mînak: **Em hevkêşeyên navînciyî ji xêzika rastekê re ya ku di xala $A(2, -1, 3)$ re diçe û tîra $\vec{u}\,(4, -2, 5)$ dipejirîne, bibînin:**

Çare:

$$x = x_0 + a.\lambda \Rightarrow x = 2 + 4\lambda$$

$$y = y_0 + b.\lambda \Rightarrow y = -1 - 2\lambda$$

$$z = z_0 + c.\lambda \Rightarrow z = 3 + 5\lambda$$

- **Têbînî**

λ hejmareke rast e, ne hew hejmareke tenê ya neguhêr nîşan dide, lê gelek nirxên rast ên cuda dibe, ji ber vê yekê bi navê hevkêşeyên navcîniyî tê naskirin.

Li cem her nirxekî navîncî λ em dikarin xalekê li ser rastekê bibînin.

Heger $\boldsymbol{\lambda = 1 \;\Rightarrow x = 2 + 4 = 6}$

$$\boldsymbol{y = -1 - 2 = \; -3}$$

$$\boldsymbol{z = 3 + 5 = 8}$$

Wê demê xala $\boldsymbol{M(6, -3, 8)}$ **li ser rastekê ye.**

Di heman demê de dema ku $\boldsymbol{\lambda = -1}$ **be:**

$$\boldsymbol{x = 2 - 4 = -2}$$

$$\boldsymbol{y = -1 + 2 = 1}$$

$$\boldsymbol{z = 3 - 5 = -2}$$

Wê demê xala $\boldsymbol{M'(-2, 1, -2)}$ **jî li ser rastekê ye.**

Hevkêşeya dîkartî ji rasteka ku di xalekê re diçe û rastênhevî tîra $\vec{u}$ be

Me hevkêşeyên navînciyî ji vê rastekê re dîtiye:

$$\begin{cases} x = x_0 + a.\lambda \\ y = y_0 + b.\lambda \\ z = z_0 + c.\lambda \end{cases}$$

Bi jêbirina λ em dibînin ku:

$$x = x_0 + a\lambda \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{x - x_0}{a}$$

$$y = y_0 + b\lambda \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{y - y_0}{b}$$

$$z = z_0 + c\lambda \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{z - z_0}{c}$$

Wê demê:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Li gorî ku $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Mînak: **Em hevkêşeyên navînciyî ji rasteka d ku di xala $M_0\,(4, 3, -1)$ re diçe û rastênhevî tîra $\vec{u}\,(1, -1, 2)$ ye, bibînin û piştre hevkêşeyên dîkartî ji vê rastekê re bibînin û xalên hevbirîna rasteka d bi teqaleya xoy re bibînin:**

Çare:

Hevkêşeyên navînciyî li gorî ku $\lambda \in \mathbb{R}$ ye:

$$x = x_0 + a\lambda \;\Rightarrow x = 4 + \lambda$$

$$y = y_0 + b\lambda \;\Rightarrow y = 3 - \lambda$$

$$z = z_0 + c\lambda \;\Rightarrow z = -1 + 2\lambda$$

Wê demê hevkêşeyên dîkartî:

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

Yan jî: $2\,(x-4)=z+1 \implies 2x-z=9$

$$-\,(x-4)=y-3 \implies x+y=7$$

Rasteka d rasteka xoy dibire dema ku $z=0$ be.

Bi çareya hevbeş ji komika du hevkêşeyan re em dibînin ku:

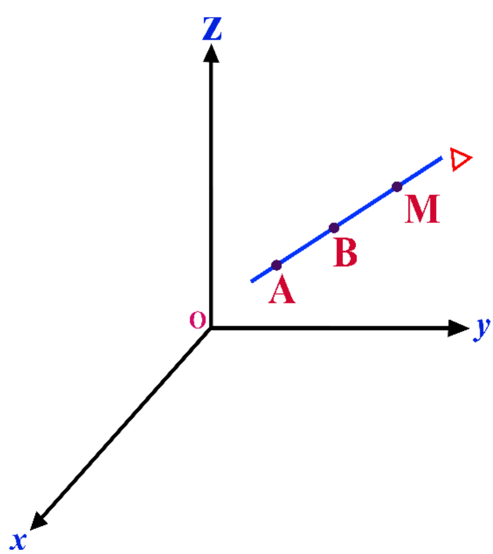
$$2x=9 \implies x=\frac{9}{2}$$

Di heman demê de: $\frac{9}{2}+y=7$

$$\implies y=7-\frac{9}{2} \implies y=\frac{14-9}{2}=\frac{5}{2}$$

Xala hevbirîna rasteka d bi teqaleya xoy dibe: $(\frac{9}{2},\frac{5}{2},0)$

2- Hevkêşeya rasteka ku di du xalên diyar re diçe



Heger $A\ (x_A, y_A, z_A), B\ (x_B, y_B, z_B)$ du xalên ji rastekaΔ bin û $M\ (x, y, z)$ xalek guhêr ji vê rastekê be, wê demê:

$\overrightarrow{AM} \backslash\backslash \overrightarrow{AB}$

Ango: $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \quad : \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Bi êxistina vê têkiliyê li ser tewareyan em dibînin ku:

$$(x - x_A)\vec{i} + (y - y_A)\vec{j} + (z - z_A)\vec{k} =$$

$$\lambda\,(x_B - x_A)\vec{i} + \lambda\,(y_B - y_A)\vec{j} + \lambda(z_B - z_A)$$

$$x - x_A = \lambda\,(x_B - x_A) \Longrightarrow x = x_A + \lambda(x_B - x_A)$$

$$y - y_A = \lambda\,(y_B - y_A) \Longrightarrow y = y_A + \lambda(y_B - y_A)$$

$$z - z_A = \lambda\,(z_B - z_A) \Longrightarrow z = z_A + \lambda(z_B - z_A)$$

Ev hevkêşeyên navînciyî yên rasteka ku di A, B re diçe.

Bi jêbirina λ ji van hevkêşeyan em dibînin ku:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$$

Ew jî hevkêşeyên dîkartî ji rasteka ku di A , B re diçe.

Mînak: Em hevkêşeyên navînciyî û dîkartî ji rasteka ku di her du xalên $A\ (1, 0, 2)$, $B\ (-1, 3, 4)$ re diçe, bibînin:

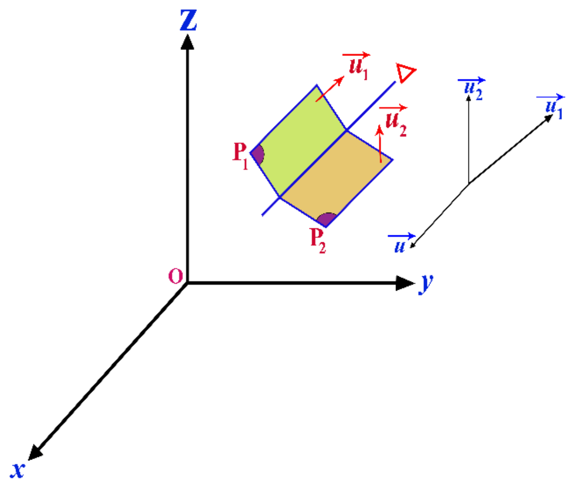
Çare: $x = x_A + \lambda\,(x_B - x_A) \Longrightarrow x = 1 - 2\lambda$

$$y = y_A + \lambda\,(y_B - y_A) \Longrightarrow y = 3\lambda$$

$$z = z_A + \lambda\,(z_B - z_A) \Longrightarrow z = 2 + 2\lambda$$

Hevkêşeyên dîkartî: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-2}{2}$

3- Hevkêşeya rastekeke bi hevbirîna du teqaleyan destnîşankirî



Heger her du teqaleyên li jêr hevbirîn bin û Δ rasteka hevbeş di navbera wan de be:

$$P_1 : \; a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

$$P_2 : \; a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

Wê demê komika her du hevkêşeyan, her du hevkêşeyên rasteka Δ çêdike:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Her tîrek $\vec{u}$ rastênhevî Δ li ser her du tîrên tîk $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ ên her du teqaleyan tîk e, ango $\vec{u} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$

Mînak: **Em hevkêşeyên navînciyî ji rasteka Δ re ya ku bi her du hevkêşeyên li jêr nedestnîşan dibe, bibînin**

$$x - y + 2z - 5 = 0$$

$$3x + 5y - 4z - 1 = 0$$

Çare:

Em tîra rastênhevî rasteka Δ bibînin: $\vec{u} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$

$$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -6\,\vec{i} + 10\,\vec{j} + 8\vec{k}$$

Ango tîra $\vec{u}\,(-6, 10, 8)$ **dibe tîra rastênhevî rasteka Δ**

Xala $M\,(x, y, z)$ **ji rasteka Δ destnîşan dibe:**

Em $x = 1$ **hilbijêrin (Em dikarin çi hejmar be hilbijêrin)**

Em vê komikê bi dest dixin:

$$-y + 2z - 4 = 0$$

$$5y - 4z + 2 = 0$$

Bi çareya hevbeş ji komika her du hevkêşeyan re em dibînin ku: $x = 1 \quad , \quad y = 2 \quad , \quad z = 3$

Kordînatên xala M **wiha ne:** $(1, 2, 3)$

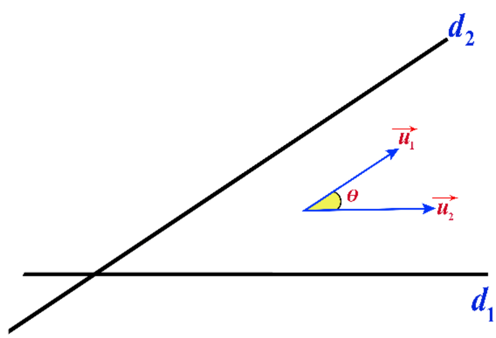
Hevkêşeyên navînciyî:

$x = 1 - 6\lambda$

$y = 2 + 10\lambda$

$z = 3 + 8\lambda \quad : \quad \lambda \in \mathbb{R}$

4- Di valahiyê de, goşeya di navbera du rastekên hevbirîn de



Heger d_1 rastekeke ku rêgeha wê (tîra rastênhevî wê) $\overrightarrow{u_1}(a_1, b_1, c_1)$ be û d_2 rastekeke din be ku rêgeha wê $\overrightarrow{u_2}(a_2, b_2, c_2)$ be û heger ev her du rastek di valahiyê de bin, goşeya di navbera d_1, d_2 de heman goşeya di navbera $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ de ye û bi vê têkiliyê tê dayî:

$$\cos(\theta) = \frac{|\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}| \cdot |\overrightarrow{u_2}|}$$

Mînak: **Em pîvana goşeya di navbera her du rastekên li jêr de bibînin:**

$$d_1: \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = -1 \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

$$d_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = -5 - 3\lambda \end{cases}$$

Ji hevkêşeya rasteka d_1 em dibînin ku: $\overrightarrow{u_1}(-2, 0, 2)$

Ji hevkêşeya rasteka d_2 em dibînin ku: $\overrightarrow{u_2}(0, 3, -3)$

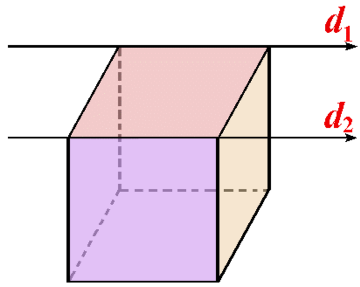
Wê demê:

$$\cos(\theta) = \frac{|\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}| \cdot |\overrightarrow{u_2}|} = \frac{|-2 \times 0 + 0 \times 3 + 2 \times (-3)|}{\sqrt{4+4} \cdot \sqrt{9+9}}$$

$$= \frac{|-6|}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}} = \frac{6}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{9 \times 2}} = \frac{6}{3\sqrt{16}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} = 60^{\circ}$$

5- Di valahiyê de du rastekên rastênhev



Heger $\overrightarrow{u_1}(a_1, b_1, c_1), \overrightarrow{u_2}(a_2, b_2, c_2)$ du tîrên ku bi rêzkirin rastênhevî her du rastekên d_1, d_2 bin, wê demê:

$$d_1 \,//\, d_2 \quad heger \quad \overrightarrow{u_1} \,//\, \overrightarrow{u_2}$$

Ev merc pêk tê bi awayekî ji awayên li jêr:

- $\overrightarrow{u_1} = k\,\overrightarrow{u_2} \quad : \quad k \in \mathbb{R}$
- $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

▪ **Têbînî**

Heger du rasteka di heman teqaleyê de bin, wê demê yan her du rastek rastênhev in û yan jî hevbirîn in, lê heger her du rastek ne di heman teqaleyê de bin, wê demê dibin hevcuda.

Mînak: **Em rewşa her du rastekên li jêr bibînin:**

$$d_1: \begin{cases} x = \lambda_1 \\ y = 1 + 2\lambda_1 \\ z = -\lambda_1 \end{cases}$$

$$d_2: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda_2 \\ y = 1 - 2\lambda_2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Tîra rastênhevî rasteka d_1: $\overrightarrow{u_1}(1, 2, -1)$

Tîra rastênhevî rasteka d_2: $\overrightarrow{u_1}(-2, -2, 0)$

Wê demê:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{-2} \quad , \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-2} = -1 \quad \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

Em dibînin ku her du rastek ne rastênhev in, her wiha hevbirî yan jî hevcuda ne.

Ji ber vê yekê divê em çareya hevbeş ji her du hevkêşeyan re çêkin, ji bo lêkolîna hevbirînê.

Hebûna xaleke hevbeş di navbera wan de tê wateya hebûna du hejmarên rast λ_1 , λ_2 ku van hevkêşeyên li jêr pêk bînin:

$\lambda_1 = 1 - 2\lambda_2$ .... (1)

$1 + 2\lambda_1 = 1 - 2\lambda_2$ .... (2)

$-\lambda_1 = 1$ .... (3)

Bi çarekirina komika her du hevkêşeyên (1) û (3) em dibînin ku:

$$-1 = 1 - 2\lambda_2 \;\Rightarrow 2\lambda_2 = 1 + 1 \Rightarrow \lambda_2 = 1$$

Em $\lambda_2 = 1$ di hevkêşeya (1) de bi cih bikin:

$$\lambda_1 = 1 - 2 \;\Rightarrow \lambda_1 = -1$$

Em $\lambda_1 = -1$ di hevkêşeya (2) de bi cih bikin, em dibînin ku pêk tîne her wiha her du rastek hevbirîn in.

Xala hevbirînê: $(-1, -1, 1)$ dema ku $\lambda_1 = -1$ be.

- **Baldarî**

Dema ku nirxên λ_1 , λ_2 hevkêşeya (2) pêk neyînin, wê demê her du rastek ne hevbirîn in û her wiha hevcuda ne.

6- Di valahiyê de du rastekên hevtîk

Heger $\overrightarrow{u_1}(a_1, b_1, c_1), \overrightarrow{u_2}(a_2, b_2, c_2)$ du tîrên ku bi rêzkirin rastênhevî her du rastekên d_1, d_2 bin, wê demê:

$$d_1 \perp d_2 \quad heger \quad \overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{u_1} \, . \overrightarrow{u_2} = 0$$

Mînak: **Em tekez bikin ku her du rastekên li jêr hevtîk in:**

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

$$d_2 : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + 7\lambda \\ z = 1 + 11\lambda \end{cases}$$

Tîra rastênhevî rasteka d_1: $\overrightarrow{u_1}(2, -1, 1)$

Tîra rastênhevî rasteka d_2: $\overrightarrow{u_2}(-2, 7, 11)$

Em encama $\overrightarrow{u_1} \, . \overrightarrow{u_2}$ bibînin:

$$\overrightarrow{u_1} \, . \overrightarrow{u_2} = x_1 \, . x_2 + \; y_1 \, . y_2 + \; z_1 \, . z_2$$

$$= 2 \times (-2) + (-1)(7) + (1)(11)$$

$$= -4 - 7 + 11 = 0$$

Em dibînin ku: $\overrightarrow{u_1} \, . \overrightarrow{u_2} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2} \Rightarrow d_1 \perp d_2$

Her wiha her du rastek hevtîk in.

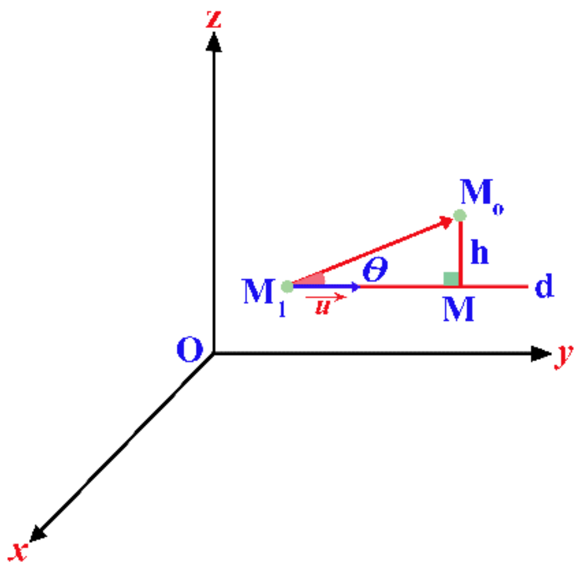
7- Di valahiyê de durahiya xalekê ji rastekekê

Heger d rastekeke ku tîra wê $\vec{u}\,(a,b,c)$ be û heger $M_0\,(x_0,y_0,z_0)$ xalek di valahiyê de be, em dixwazin durahiya M_0 ji rasteka d bibînin:

Heger M êxistina tîk ji xala M_0 re li ser d be û heger M_1 xaleke hilbijartî li ser d be, em dibînin ku:

$$\left|\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{u}\right| = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|\,|\vec{u}|\,.\,sin\,(\theta)$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{u}\right| = |\vec{u}|\,.\,h \Rightarrow h = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$$



Mînak: Em durahiya xala $M_0\,(1,2,3)$ ji rasteka d ya ku hevkêşeyên wê wekî li jêr, bibînin:

$$\begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 8 - 2\lambda \end{cases}$$

Em dibînin ku tîra rastênhevî rasteka d: $\vec{u}\,(3,2,-2)$ û xala $M_1\,(-3,-2,8)$ xalek ji rasteka d ye li gorî ku $\lambda = 0$

$$\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1)\vec{i} + (y_0 - y_1)\vec{j} + (z_0 - z_1)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_1M_0} = (1+3)\vec{i} + (2+2)\vec{j} + (3-8)\vec{k} = 4\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 5\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{u} = (-8+10)\vec{i} - (-8+15)\vec{j} + (8-12)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{u} = 2\,\vec{i} - 7\,\vec{j} - 4\,\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \left|\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{u}\right| = \sqrt{4+49+16} = \sqrt{69}$$

$$\Longrightarrow |\vec{u}| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$$

$$\Longrightarrow \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{69}}{\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{69}{17}} \approx 2$$

HÎNDARÎ

1. Em hevkêşeyên navîciyî ji rasteka ku di xala destpêkê re diçe û rastênhevî tîra $\vec{u}\ (-2, 3, 1)$ ye, bibînin û piştre em du xalan ji vê rastekê bibînin bi hilbijartina nirxine ji bo navîncî λ.

2. Em hevkêşeyên navîciyî ji rasteka Δ re ku di xala $M_0\ (2, -1, 3)$ re diçe û rastênhevî tîra $\vec{u}\,(-3, 4, 1)$ ye, bibînin û piştre em hevkêşeyên dîkartî ji vê rastekê re bibînin û xala hevbirîna Δ bi teqaleya xoz re destnîşan bikin.

3. Em hevkêşeya rasteka ku di her du xalên $A\ (2, 2, -3)$ û $B\ (1, -1, 0)$ re diçe bibînin.

Xala $C\ (1, 3, 2)$ endamê rasteka AB ye yan na?

4. Em hevkêşeyên navînciyî ji rasteka Δ re ya ku bi her du hevkêşeyên li jêr destnîşankirî, bibînin:

$$x + y - z + 1 = 0$$

$$2x - y + 4z + 2 = 0$$

5. Em goşeya di navbera her du rastekên li jêr de bibînin:

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 12\lambda \\ y = -5 - 9\lambda \\ z = -3 + 20\lambda \end{cases}$$

$$\Delta_2 : \begin{cases} x = 4 + 4\lambda \\ y = -8 - 3\lambda \\ z = 9 + 12\lambda \end{cases}$$

6. Her du rastekên li jêr hevtîk in an na? Çima?

$$d_1: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$$

$$d_2: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 4 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

7. Em durahiya xala $M_0\,(2, -1, 3)$ ji rasteka Δ ya ku hevkêşeyên wê wekî li jêr, bibînin:

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

BELAVKIRINA WANEYAN LI SER SALA XWENDINÊ

Heftî / Meh	Heftiya Yekem	Heftiya Duyem	Heftiya Sêyem	Heftiya Çarem
Rezber			**Dawî û domdarî**	**Dawî û domdarî**
Cotmeh	**Dawî û domdarî**	**Daraştin û pêkanînên wê**	**Daraştin û pêkanînên wê**	**Daraştin û pêkanînên wê**
Mijdar	**Fonkisyona resen û întegrala wê**	**Fonkisyona resen û întegrala wê**	**Fonkisyona resen û întegrala wê**	**Rêbazên hejmartinê**
Berfanbar	**Teoriya dupêkhate**	**Awayê sêgoşeyî ji hejmara komplêks re**	**Awayê sêgoşeyî ji hejmara komplêks re**	**Teoriya dîmwavir**
Rêbendan	Lêveger	Nirxandin	Bêhinvedan	Bêhinvedan
Reşemeh	**Geometrî û pîvan di teqale û valahiyê de**	**Geometrî û pîvan di teqale û valahiyê de**	**Matrêks**	**Matrêks**
Avdar	**Di teqaleyê de tîr**	**Di teqaleyê de tîr**	**Di valahiyê de tîr**	**Di valahiyê de tîr**
Cotan	**Di valahiyê de teqale**	**Di valahiyê de teqale**	**Di valahiyê de rastek**	**Di valahiyê de rastek**
Gulan	Lêveger	Nirxandin		